

中等专业学校教学用书

# 大地测量

本溪钢铁学院测量教研组编



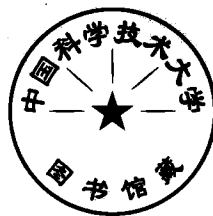
中国工业出版社

中等专业学校教学用书



# 大地測量

本溪鋼鐵學院測量教研組編



中國工業出版社

本書是根据中等专业学校、矿山测量专业59年指导性教育计划及本溪钢铁学院所訂的大地测量教学大纲編写的。本書叙述了建立矿区独立控制网和加密控制网的野外作业方法及内业平差計算。

本書經冶金工业部教育司推荐作为中等专业学校教学用书。

## 大地測量

本溪鋼鐵学院測量教研組編

中国工业出版社出版（北京佟麟閣路丙10号）

（北京市書刊出版事业許可証出字第110号）

中国工业出版社第三印刷厂印刷

新华書店科技发行所发行·各地新华書店經售

开本 $787 \times 1092^{1/16}$ ·印张 $17^{1/8}$ ·字数394,000

1961年9月北京第一版·1961年9月北京第一次印刷

印数001—837·定价(9—4)1.60元

統一書号: 15165·322 (冶金—103)

## 序 言

本書是根据中等专业学校矿山测量专业的大地测量教学大纲编写而成的。

本課的任务在于使学生学会建立作为测制大比例尺(1:5000~1:500)地形图的基础的控制网(加密网或独立网、平面控制网和高程控制网),或建立为矿山生产服务的测量控制点的方法。因此本书中,除包括一般大地测量教材中所讲述的三角测量、基线测量、水准测量、三角网平差计算及高斯平面直角坐标的概念等内容外,还包括了误差理论、最小二乘法理论及真北方位的测定等内容。

最后应该说明,这本教材的编写对我们是初次尝试。由于编者水平有限,时间又非常短促,故错误与缺点在所难免,请读者多加批评和指正,以便再版时修改。

本溪钢铁学院采矿系测量教研组

## 目 录

|                                                 |     |
|-------------------------------------------------|-----|
| 序言 .....                                        | (5) |
| 第一章 緒論 .....                                    | 1   |
| §1-1 控制測量与普通測量、大地測量的关系 .....                    | 1   |
| §1-2 地球形状和大小的概念 .....                           | 1   |
| §1-3 控制网概說 .....                                | 3   |
| §1-4 国家控制网与独立控制网的布設原則 .....                     | 4   |
| 第二章 誤差理論 .....                                  | 5   |
| 第一节 測量誤差 .....                                  | 5   |
| §2-1 測量誤差的概念 .....                              | 5   |
| §2-2 測量誤差的分类 .....                              | 6   |
| §2-3 偶然誤差的特性 .....                              | 7   |
| §2-4 衡量精度的标准 .....                              | 8   |
| 第二节 誤差傳播定律 .....                                | 10  |
| §2-5 倍数函数的誤差傳播定律 .....                          | 10  |
| §2-6 和差函数的誤差傳播定律 .....                          | 11  |
| §2-7 綫性函数的誤差傳播定律 .....                          | 14  |
| §2-8 一般函数的誤差傳播定律 .....                          | 15  |
| 第三节 等精度观测 .....                                 | 17  |
| §2-9 算术平均值原理 .....                              | 17  |
| §2-10 算术平均值的中誤差 .....                           | 18  |
| §2-11 最或是誤差及其特性 .....                           | 19  |
| §2-12 用最或是誤差表示单一观测值的中誤差和算术平均值的中誤差 .....         | 20  |
| 第四节 不等精度观测 .....                                | 23  |
| §2-13 不等精度測量的一般概述 .....                         | 23  |
| §2-14 加权算术平均值 .....                             | 24  |
| §2-15 权与中誤差的关系, 单位权中誤差的概念 .....                 | 26  |
| §2-16 加权算术平均值的中誤差 .....                         | 28  |
| §2-17 不等精度的最或是誤差的性質 .....                       | 29  |
| §2-18 用不等精度的最或是誤差表示单位权观测值的中誤差和加权算术平均值的中誤差 ..... | 30  |
| §2-19 不等精度观测值函数的权 .....                         | 33  |
| 第五节 測量誤差理論的应用 .....                             | 35  |
| §2-20 一个結点的水准路綫和經緯仪导綫的平差 .....                  | 35  |
| §2-21 有二个以上結点的水准路綫或經緯仪导綫的平差——等权代替法 .....        | 40  |
| §2-22 逐漸趋近法 .....                               | 44  |

### 第一篇 矿区三角測量

|                            |    |
|----------------------------|----|
| 第三章 概說 .....               | 49 |
| §3-1 矿区三角測量的用途及布設方案 .....  | 49 |
| §3-2 三角測量工作的程序 .....       | 51 |
| 第四章 选点与选标埋石 .....          | 52 |
| §4-1 选点概說 .....            | 52 |
| §4-2 图形权倒数及三角形最有利的形状 ..... | 52 |

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| §4—3 点的选定 .....                    | 57  |
| §4—4 选标与埋石 .....                   | 58  |
| <b>第五章 基线测量</b> .....              | 61  |
| §5—1 基线测量概說 .....                  | 61  |
| §5—2 基线 and 基线网的选定 .....           | 65  |
| §5—3 基线测量所用的工具 .....               | 65  |
| §5—4 基线测量的步骤 .....                 | 66  |
| §5—5 野外丈量工作 .....                  | 66  |
| §5—6 室内计算工作 .....                  | 69  |
| §5—7 基线尺长度的野外检定 .....              | 73  |
| <b>第六章 水平角观测</b> .....             | 74  |
| §6—1 三角测量所用的测角仪器 .....             | 74  |
| §6—2 测角仪器的读数设备 .....               | 74  |
| §6—3 经纬仪的检验概述 .....                | 79  |
| §6—4 水平角的观测 .....                  | 86  |
| §6—5 归心改正 .....                    | 89  |
| <b>第七章 方位角测定</b> .....             | 93  |
| §7—1 概述 .....                      | 93  |
| §7—2 根据北极星测定地面目标方位角的意义及天球的概念 ..... | 94  |
| §7—3 天球上的点和圈 .....                 | 94  |
| §7—4 天球上的坐标系统 .....                | 95  |
| §7—5 观测站的天文坐标与天球坐标的关系 .....        | 97  |
| §7—6 天文三角形 .....                   | 98  |
| §7—7 日和时的概念 .....                  | 99  |
| §7—8 视太阳日(时)与平太阳日(时) .....         | 99  |
| §7—9 地方时、世界时及标准时 .....             | 101 |
| §7—10 时的换算 .....                   | 102 |
| §7—11 真北方位的测定——北极星任意时角法 .....      | 106 |
| <b>第八章 国家统一直角坐标的概念</b> .....       | 111 |
| §8—1 地图投影的概念 .....                 | 111 |
| §8—2 高斯投影及平面直角坐标的概念 .....          | 112 |
| §8—3 全国统一坐标系统 .....                | 114 |
| §8—4 地方独立坐标系统与全国统一坐标系统的联接 .....    | 115 |
| §8—5 将地方坐标系统换算成全国统一坐标系统的坐标 .....   | 115 |

## 第二篇 高程控制网的布设

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| <b>第九章 概述</b> .....           | 119 |
| <b>第十章 几何水准测量</b> .....       | 120 |
| §10—1 水准点的选定及埋设 .....         | 120 |
| §10—2 水准测量的基本原理 .....         | 120 |
| §10—3 水准测量所用的仪器 .....         | 123 |
| §10—4 影响水准测量精度的因素 .....       | 128 |
| §10—5 水准测量的外业 .....           | 130 |
| §10—6 水准测量的内业 .....           | 131 |
| <b>第十一章 三角高程测量</b> .....      | 132 |
| §11—1 概述 .....                | 132 |
| §11—2 地球曲率和大气折光对三角高程的影响 ..... | 133 |
| §11—3 垂直角(或天顶距)的观测与计算 .....   | 135 |



|                           |     |
|---------------------------|-----|
| \$11—4 高程的平差計算与精度估計 ..... | 136 |
|---------------------------|-----|

### 第三篇 矿区控制测量的平差計算

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| 第十二章 条件观测平差 .....                   | 138 |
| 第一节 条件方程式 .....                     | 138 |
| \$12—1 概論 .....                     | 138 |
| \$12—2 条件方程式的种类 .....               | 139 |
| \$12—3 条件方程式的数目 .....               | 146 |
| 第二节 条件观测平差 .....                    | 155 |
| \$12—4 一般原理 .....                   | 155 |
| \$12—5 法方程式系数的組成及其檢核 .....          | 159 |
| \$12—6 法方程式的解算 .....                | 161 |
| \$12—7 法方程式解算时的檢核 .....             | 162 |
| \$12—8 利用高斯—杜力特格式解算法方程式 .....       | 163 |
| \$12—9 三种成果檢核公式 .....               | 166 |
| \$12—10 大地四边形按照条件平差实例 .....         | 167 |
| \$12—11 条件平差时平差值函数的精度評定 .....       | 173 |
| 第三节 兩組平差法 .....                     | 176 |
| \$12—12 兩組平差法的一般原理 .....            | 176 |
| \$12—13 利用兩組平差法对中心形进行平差的实例 .....    | 179 |
| 第十三章 間接观测平差 .....                   | 190 |
| 第一节 間接平差 .....                      | 190 |
| \$13—1 間接观测平差概論 .....               | 190 |
| \$13—2 观测值的函数为綫性函数时待求元素之确定 .....    | 191 |
| \$13—3 未知数之非綫性函数化为綫性函数 .....        | 198 |
| \$13—4 間接观测平差与条件观测平差的比較 .....       | 201 |
| \$13—5 間接观测平差的精度評定 .....            | 202 |
| 第二节 在固定三角网中插入新点的間接观测平差 .....        | 206 |
| \$13—6 插点平差概論 .....                 | 206 |
| \$13—7 未知数个数的确定 .....               | 206 |
| \$13—8 立出誤差方程式 .....                | 207 |
| \$13—9 法方程式的立出及其解算 .....            | 217 |
| \$13—10 最或是值与改正数的計算及平差結果的最后檢核 ..... | 221 |
| \$13—11 在固定三角网中插入一点的实例 .....        | 222 |
| \$13—12 插点的精度評定及其垂点曲綫的构成 .....      | 231 |
| 第十四章 近似平差法 .....                    | 236 |
| \$14—1 大地四边形的近似平差法 .....            | 236 |
| \$14—2 中心形的近似平差法 .....              | 239 |
| \$14—3 在固定角內插入三角鎖的近似平差 .....        | 240 |
| \$14—4 兩基綫間三角鎖的近似平差 .....           | 243 |
| \$14—5 在兩控制点之間增設三角鎖的平差 .....        | 247 |

# 第一章 緒 論

## §1-1 控制測量与普通測量、大地測量的关系

大地測量的任务主要是在整个地球或地球表面上相当大的一部份用測量方法确定一些点位(平面的和高程的),以作为研究地球的形狀和大小及測制各种比例尺地形图的依据。

普通測量的任务主要是在可将地表当作平面看待的小块土地上測制各种比例尺的地形图,以供各項經濟建設和国防方面的应用。

在較大面积上通过普通測量測制各种比例尺的地形图时,必須保証各相邻图幅能够互相拼接成为一个整体,并要求相同比例尺的在各地区所得地形图的精度达到一致。为此就需要在測图范围内,首先布設和測定一些有整体联系的、具有一定均匀密度和精度的点位,以作进一步測制地形图的控制。这些点所构成的图网就叫控制网,測定这些点的工作就是控制測量。

为了使全国范围内的相同比例尺地形图能够互相拼接并精度一致,就需用科学的合理的方法建立全国的大地控制网,这种工作也就是大地測量的主要内容。

矿区控制測量的任务主要就是在国家大地控制网的基础上进行加密,或建立独立的控制网,以构成作为測制矿区地形图的控制基础,并作为矿山地面或地下的各种工程測量的控制依据。

## §1-2 地球形狀和大小的概念

大地測量(或控制測量)工作都是在地球表面上进行的,而地球的自然表面起伏很大,最高的山嶽頂峰和最深的海洋底处之間的高差将近30公里。为了将这样崎岖不平的地表測繪在一张平面圖紙上,构成我們所需要的地形图,就必须选择一个投影面,以便在其上繪图和計算点的位置。这个投影面应当和地球总体形的表面相符合。現在我們就来認識一下地球的体形和选择一下投影面,并說明在这种投影面上表示点位的方法。

### 一、大地水准面、大地体

地球的大体輪廓是球形的,并且是两极扁平的旋轉橢圓体。在普通測量里講过水准面的概念,它是处处与鉛垂綫方向(即重力方向)相垂直的面。由于高程的不同,水准面可以有无穷多个。假設海洋面处于靜止的平衡状态,那么它就是一个水准面,再把这个面向大陆的內部延伸,我們就可以得到一个連續不斷的、閉合的水准面,这个面称之为大地水准面。大地水准面所包围的体形叫做大地体,它最接近于地球的体形。所以在大地測量学里就把大地水准面和大地体作为研究和測定地球形狀和大小的对象。

### 二、参考橢圓体

虽然大地水准面是代表地球体形的,但由于地球內部物質分布的不均匀和表面地形起伏的緣故,使得各个地点的重力方向发生局部变化。因之处处和重力方向相垂直的大地水准面也就随之而有起伏,成为一个不規則的、无法用簡單的可以計算的数学公式来表示的面。如果用这个面作为投影面,在其上測繪地形图 and 进行点位的計算是異常复杂因



难甚至是不可能的。因此我們应该选择一个能用数学方法简单表示的、在形状和大小方面与大地体相接近的体形来代替大地体，通常选择一个具有适当大小和扁率的旋轉椭圆体来代替大地体，并称它为地球椭圆体。与大地体外形符合最好的地球椭圆体称为总地球椭圆体。总地球椭圆体只有当全地球上都布满了天文大地网并进行了重力测量之后才能求得，在这之前，每一个国家（尤其是領土較大的国家）为了进行测量成果的处理，都采用一个与本国領土比較相合的地球椭圆体，我們称它为参考椭圆体。这个体面即作为該国家測繪地形图和計算点位的投影面。

参考椭圆体的大小用它的长半軸 $a$ 和短半軸 $b$ 来表示。为了計算工作方便，通常用扁率 $\alpha$ 来代替短半軸 $b$ 。所謂扁率就是地球椭圆体的长、短半軸之差和长半軸之比，即：

$$\alpha = \frac{a - b}{a}$$

长半軸 $a$ 和扁率 $\alpha$ 称为参考椭圆体的元素。

求地球椭圆体的形状和大小，要依据广大地区內天文大地测量和重力测量的資料。到目前为止，世界各国已有許多测量学者推算出地球椭圆体的数值，由于他們所用資料的多寡不同，地区范围不同，因此所得地球椭圆体的数值亦不尽相同。

苏联測繪学者Ф.Н.克拉索夫斯基教授所推算的地球椭圆体元素的数值为：

$$a = 6,378,245 \text{ 米}, \alpha = 1:298$$

具有这个数值的椭圆体称为克拉索夫斯基椭圆体。

在这个椭圆体的推导中，不仅采用了苏联本国的大地测量数据，同时也应用了西欧和美国的資料。应用資料的范围包括地球上20,000,000平方公里的面积，并引用了苏联大地科学家研究出来的最新理論，因而得出的結果与地球的真正体形比較最为接近。

现在我国的大地测量工作也采用了克拉索夫斯基椭圆体作为参考椭圆体。

### 三、点的坐标

某点在地球椭圆体上的位置，通常是以大地坐标来表示的。大地坐标包括大地經度和大地緯度。在解释大地經、緯度之前，先要認識两个基本平面（图1—1）：某点的大地子午面——通过該点且包含地球旋轉軸NS的平面，赤道平面——通过椭圆中心O且与地球旋轉軸NS垂直相交的平面。

点P的大地經度  $L$  就是点P的大地子午面与英国格林威治天文台中心的大地子午面（国际間的起始子午面）之間的两面角，在格林威治以东者为东經，以西者为西經。

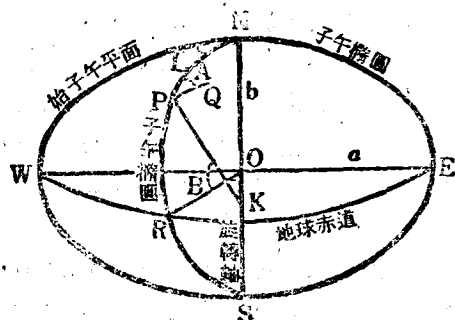


图 1—1

点P的大地緯度  $B$  就是点P的法綫 PK与赤道平面的夹角。在赤道以北者为正，南者为負。

在这一坐标系統中，用大地方位角表示两点連綫的方向。点P至点Q的大地方位角  $A$  就是通过点P的法綫 PK和点Q的平面与点P的大地子午面所成的夹角，該角自点的正北方向順时針量計。

一般点的大地坐标都是由起始点（或大地基准点，其大地坐标为已知）开始，通过

各点向在地球椭圆体上的几何联系(三角网或导线)进行推算而得。

此外,某点的位置也可用天文坐标来表示。天文坐标包括天文经度和天文纬度,它们是通过在该点上安置仪器用天文测量的方法直接确定的。这时点P的天文经度即点P的天文子午面与起始子午面间所成的夹角,通常以 $\lambda$ 来表示。点P的天文纬度即点P的垂线与地球赤道平面所成的夹角,通常以 $\phi$ 来表示。而点P至点Q的天文方位角则是通过点P的垂线和点Q的平面与点P的天文子午面间所夹的角,通常以 $\alpha$ 来表示。

注意上述各定义可以看出,大地经、纬度和大地方位角都是以法线为依据的,也就是说以地球椭圆体面为依据的。而天文经纬度和天文方位角都是以垂线为依据,即以大地水准面为依据。由于地球椭圆体和大地水准面不完全符合,所以同一点的大地坐标与天文坐标之间也稍有差异,这一点在大地测量学中有详细讨论。

因一般矿区测图面积较小,可以将测区范围内的地球表面作为平面看待,且为了适用上的方便起见,所以点的位置均以平面直角坐标x和y表示。

### §1-3 控制网概述

在§1-1节中已经讲到,控制网的用途主要是在全国领土上或在欲测地形图的个别地区内作为测图工作的依据,这种控制包括平面的控制和高程的控制。

#### 一、平面控制网

常用的平面控制网有三角网(锁)及导线网。

三角网或三角锁都是由图1-2所示的三种基本图形:三角形、大地四边形、中点多边形(最基本的图形还是三角形)单独或互相连接在一起而构成的网。

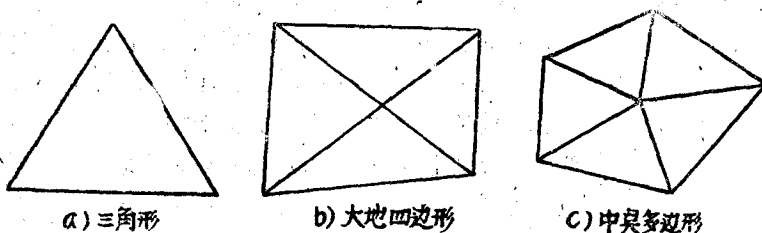


图 1-2

三角网适用在开阔宽广的地区;三角锁适用在开阔狭长的地区(图1-3);在不太开阔的阴蔽地区(在市镇的街道或森林地带)宜用导线网。导线网一般是自行闭合或附合在已知边上,称为闭合导线或附合导线。

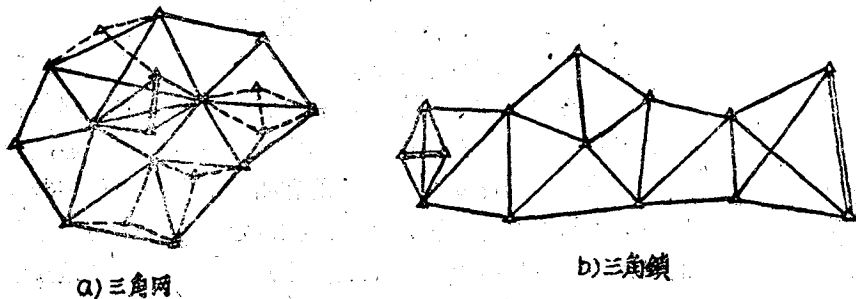


图 1-3

欲确定三角网(鎖)中各点的平面位置(即平面坐标),必須知道某一边的边长及各三角形的內角。这样,运用平面三角学中的正弦公式即可推算出其它各边的边长;如再已知任意一条边的方位角和一个点的坐标,便可用普通测量学中講过的交会法或导綫法推算出其它各点的坐标。用这种方法作平面控制的工作就叫三角测量,也是本課主要講述的內容。

导綫测量在普通测量学中已經講过,这里不再重复。

## 二、高程控制网

单独的高程控制网均布設成路綫形,一般有閉合路綫、附合路綫及支綫三种。此时多用几何水准测量方法进行观测。

高程控制网也可以和平面控制网相結合,即用平面控制点作为高程控制点,此时在平坦地区用几何水准测量方法,但在山区則多用三角高程测量方法进行观测。

### §1-4 国家控制网与独立控制网的布設原則

#### 一、国家控制网的布設原則

(一) 国家控制网是国家测图的基本依据,所以必須要有足够的密度和精度,以便滿足测图的需要和保証测图的质量。测图的比例尺愈大,要求控制点的密度就愈大,精度也愈高。

(二) 从整体到局部的逐級控制。建立国家控制网的目的是为了在全国領土上建立一个統一的坐标系統,使各个地区可以互不相关地同时进行测图工作,而测得的地形图又可以互相拼接。我国領土广大,如果进行一次全面地布网,必将需要很長的时间,而且由于观测誤差的累积,又将使所得成果不能滿足要求的精度。为了解决这个問題,最合理的办法是先在国家整个領土上布設一个骨干性的大地网,然后視测图先后的需要,再在有关区域内以骨干网为基础,逐次的布設补充网进行加密。这样就将控制网分成了几个等級:高等級的先作,且边长較长,精度也高;低等級的逐次后作,且边长也逐等縮短,精度也逐等降低。这就是从大到小的原則,也就是从整体到局部的原則。

我国的平面控制网及高程控制网均分为一、二、三、四等四个等級。一等控制网是国家控制网的骨干,下面再以二等网加以补充;为了滿足較大比例尺的测图需要,再以三等网进行加密;四等网是在二、三等网的基础上作进一步加密的。

一般二等网的密度可以滿足比例尺1:100000和1:50000的测图需要;三等网的密度可以滿足1:25000和1:10000的测图需要;四等网的密度可以滿足1:5000和1:2000的测图需要。

(三) 各等控制网必須有統一的方案和細則。我国領土广大,建立国家控制网是一件极其艰巨而繁重的工作,需要相当长的时期才能完成。在国民經济建設中,許多部門急需用图,故测图工作不可能等待国家控制网完成之后再進行,而經常是同时进行的。在这种情况下,为了使各部門自行建立的控制网在与国家控制网联接之后能成为国家控制网的一部份,以免造成重复浪費,因此就必須要求所有測繪部門在进行控制测量时,在网的布設方案、等級、密度和精度各方面都遵守統一的規定,这样才便于汇集各部門的成果,构成一个統一的整體。我国已拟訂了大地测量法式,在其中詳細地規定了各等控制测量的布設方法、密度和精度等。根据法式又制訂出各等控制测量的細則,詳尽地

规定了进行工作的具体步骤、方法、对仪器的要求、应达到的精度和误差限度以及成果处理、计算的方法、检查验收的制度等。

## 二、独立控制网的布设原则

从测图工作的程序来说，必须先建立控制网，以后才能进行测图。但是国家控制网不能在短时期内完成，有些地区的测图工作又不能等待，因此在这种还没有建立国家控制网或虽已建立一、二等网但在密度或精度上还不能满足测图要求的用图地区，只有先布设独立控制网。

关于布设独立控制网的原则，可以提出以下几点。

(一)独立控制网应尽可能按照国家大地测量法式的规定进行布设，以便将来与国家控制网联接之后，就可成为国家控制网的一部份，否则势必造成测量工作上的重复浪费。

(二)独立控制网应尽可能与国家控制网取得联系，即使尽可能多的独立控制点与国家控制点相合，并且利用一个国家控制点的坐标和一条边的方位角作为起算数据，这样就可能使独立控制网的坐标与国家控制网的坐标系统一致，以便于以后运用。

当在测区内遇到城市或其它机关的高级或同级的控制点时，亦应与之联系起来，并求得统一系统，以便互相利用，避免造成重复浪费。

如果在测区内或附近没有国家控制点时，就必须为独立控制网建立自己的起算数据。当测区面积较小，且在短时期内不会扩展时，可以布设独立的测图控制网，并可以不和国家控制网进行联接。

(三)城市、工矿地区布网等级与国家控制网等级应当一致，如城市测量规范中将控制分为二、三、四等，其与国家控制的二、三、四等的精度是相一致的。

(四)三角网的布设，除应满足目前测图的需要外，同时应考虑到测区可能发展的远景。

## 第二章 误差理论

### 第一节 测量误差

#### § 2-1. 测量误差的概念

一切测量总是用具有一定量度单位的工具去与测量对象比较，从而得到该量的大小。无论所使用的量度工具有如何的精密程度和工作怎样仔细，也不论观测环境安排得如何理想和完善，总是避免不了下列现象的产生：即对同一量进行多次观测，其结果并不相同。闭合导线的内角观测总和与理论值不符、闭合水准路线的高差总和不能正好等于零，等等。有这种现象的产生，就是因为我們测量结果中存在着不可避免的误差。

测量误差之所以产生，总括说来有下列三个方面的原因：

一、仪器精度的限制和结构上不够完善。例如经纬仪的最小读数就代表了一次读数所能达到的精确范围，要获得比最小读数更小的准确数值是不可能的。最小读数也可表明它在结构上的精密程度，不论未来的技术如何发达，要想使结构满足象在平面测量中讲仪器检验时所提出的那些几何关系的要求，也是困难的，就是对仪器进行了校正也不可能达到“理想地”境界。矿山测量中用得较多的另一件工具——钢尺（或皮尺）也

有类似的情况。总之，仪器本身不可避免地要給測量結果帶來誤差。

二、人們感覺器官的鑒別能力有限。例如我們對壁上相距不遠的二個小點逐漸遠離，到一定距離之後，就會發現二個小點再也不能區分。另一最常見之現象是：在筆直公路兩旁的樹距我們愈遠便覺其彼此之間的距離愈近。這些都指出了人們的感覺器官有缺陷，說明人距二點愈遠便愈覺難以區別。由此，必將使我們不論在儀器的安置、瞄準、讀數等方面都會產生誤差。雖然實際工作中可以借助於放大鏡，但它也只能起減少誤差的作用，而不能起消除誤差的作用。

三、外界環境的影響。自然界的溫度、濕度、照明、風等等時刻都在改變着，這種改變使我們不能獲得觀測量的真正數值。

由上面談到的三個原因來看，我們不可能獲得絕對理想度量度工具(儀器)，在現有的技術條件下還不能達到不需要人去觀測，更不能阻止外界環境的變化，或抽象地設想到一個不受外界條件影響的環境中去觀測。因此在我們所獲得之測量成果中，誤差總是不可避免的，觀測值的真正數<sup>①</sup>值永不可獲。

由於在觀測成果中包含着不可避免的誤差，使得觀測結果與理論值不符，這樣必須進行調整，找出最接近於真值的數值，並且評定它的可靠程度，這一切都需要我們具有誤差理論的知識。

## § 2—2 測量誤差的分類

測量誤差按其產生的特徵可分為三類。

一、粗差。這是由於測量工作者的粗心、疏忽大意而在測量、記錄或計算等方面發生的錯誤。如果能在上述可能產生錯誤的三個方面，採用重複而且彼此獨立的工作，在很大程度上會避免粗差之產生。對於有經驗的礦山測量工作者來說，粗差並不是那麼容易產生。但是它一旦產生，後果之嚴重則是無法估計的。因此在實際工作中除了採取必要的校核以外，更重要的是要求測量工作者以認真負責，嚴肅細致的態度來進行工作。

二、系統誤差。在一定條件下反復觀測時，始終保持同一符號、同一數值的誤差叫系統誤差。例如20米長的鋼尺比標準尺長一個a值（或短一個a值），那麼用這樣的鋼

尺所量的距離S，就包含着 $\frac{a}{20} \times S$ 的誤差，這種誤差的大小與距離成正比。又如水準儀的視準軸不平行於水準軸，這就使得水準尺的讀數產生誤差；這種誤差與水準尺和儀器之間的距離成正比。其它如外界溫度、地球曲率、折光影響等等也是產生系統誤差的重要因素。

可以採用加入改正數或適當地組織測量工作等方法來消除系統誤差。例如對尺長不準和溫度影響等等就是採取加入改正數的辦法消除系統誤差。將水準儀置於前後視之中間，可以消除由於視準軸與水平軸不平行而產生的誤差。經緯儀利用正倒鏡消除視準軸與水平軸傾斜的誤差，在度盤上讀取兩游標讀數以消除游標盤的偏心差。這些皆屬適當組織測量方法以消除系統誤差之例。

三、偶然誤差。在一定條件下反復測量時，其誤差的大小和符號都表現了模稜兩

① 應該理解為觀測量在施測時之實際大小，以下簡稱真值。

可。例如量距时估讀毫米数的誤差，水准測量时的讀数誤差，望遠鏡的照准誤差等等皆是。它的产生原因是多方面的，是一种綜合影响的結果（如空气的对流、目标的照明、仪器构造的不够完善、观测者感觉器官的鉴别能力限制等等）。它是既不可避免也无法消除的，我們的任务就在于設法降低它对結果的影响。

在实际工作中，系統誤差和偶然誤差經常同时出現。系統誤差可以設法消除，或使它对測量結果的影响大大减小，和偶然誤差比較，几乎不起什么作用。在这种情况下如何来处理偶然誤差，就是下面要談到的中心內容。也就是說，在今后的討論中，可認為观测結果中不存在着系統誤差，更沒有粗差，而只存在着偶然誤差，因此，我們所講的“誤差理論”实际上是偶然誤差理論。

### § 2—3 偶然誤差的特性

就单个偶然誤差來說，其大小和符号的出現是偶然的，从表面看来，似乎没有什么規律可循、沒有研究的必要。但是辯証唯物主义者認為，世界是有規律的、运动着的客觀世界。偶然誤差的出現絕不是无缘无故的，它必然服从于某种客觀隱避的規律，我們的任务就在于把这种規律寻找出来。为此，前人曾作过上千次的实验，例如統計打靶台射击的結果来总结偶然誤差出現的規律。打靶的时候，無論武器如果优良，無論以如何的注意力来对准靶心，但由于有瞄准誤差及外界环境（如风力）的影响，使得射击結果决不会每次都必中靶心，而更多的是或多或少有些偏离。弹痕偏离靶心的距离即可認為是射击結果产生的偶然誤差。經多次射击結果統計表明，偶然誤差存在下列的四个特性：

一，在一定的观测条件下，偶然誤差的絕對值不会超过一定的范围。

二，絕對值較小的誤差比絕對值較大的誤差出現的机会要多。

三，絕對值相等的正誤差与負誤差出現的机会相等。

四，偶然誤差的算术平均值，随着观测次数的无限增加而趋向于零。

設某量的真值为 $X$ ，观测值为 $L_1, L_2, \dots, L_n$ ，則得相应的几个真誤差（即偶然誤差）为：

$$X - L_1 = \Delta_1 \textcircled{1}$$

$$X - L_2 = \Delta_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$X - L_n = \Delta_n$$

(2-1)

真誤差的算术平均值为：

$$\frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n}{n} = \frac{[\Delta]}{n} \textcircled{2}$$

(2-2)

由第三特性知，式中分子有正有負，而且个数几乎相等，故有彼此抵消的性能。即

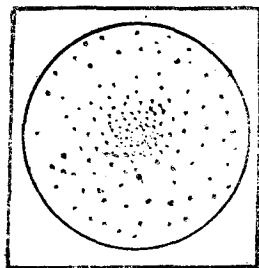


图 2—1

① 以后始終認為真誤差 $\Delta$ 是真值 $X$ 与观测值 $L$ 之差，而且是“純粹的”偶然誤差。

② 是最小二乘法的发明者——高斯，建議用的和数符号。

或不能正好等于零，也是一个很小很小的数值，而当分母  $n$  趋于无限大时，则等式必将等于零，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0 \quad (2-3)$$

如果  $[\Delta]$  与零相差很多，而且个数愈多数值愈大时，那就说明有系统误差存在。这种情况下，必需查明原因，设法消除。这些特性是由实际而来，这里是无法用严密的数学分析方法来加以证明的。但我们可以理解它，而且承认它、运用它。

## § 2-4 衡量精度的标准

对一组观测结果不仅要求出最终数值，而且还要知道该组观测中各个观测值和最终数值的精确程度。如对某量进行多组观测，则因彼此都有不可避免的偶然误差存在，以及观测条件不一，其结果往往不相一致。为了比较各组的精确程度，必须建立一个衡量精度的统一标准，这种标准有绝对的和相对的两种，今分别介绍如下：

### 一、平均误差

某观测列中真误差绝对值的算术平均数叫做平均误差，即：

$$\theta = \pm \frac{|\Delta_1| + |\Delta_2| + \dots + |\Delta_n|}{n} = \pm \frac{[\Delta]}{n} \quad (2-4)$$

给以正负号的意思是指出可能性都相同。这种衡量精度的标准的最大缺点是不能充分鲜明地反映出观测列中所存在着的个别较大的误差。

例如某量分别由甲、乙二人进行了五次条件相同的观测，各获得的真误差为：

甲： -2, +5, -3, -4, -2

乙： -2, 0, +10, -3, -1

平均误差为：

$$\theta_{\text{甲}} = \pm \frac{|2| + |5| + |3| + |4| + |2|}{5} = \pm 3.2$$

$$\theta_{\text{乙}} = \pm \frac{|2| + |0| + |10| + |3| + |1|}{5} = \pm 3.2$$

由平均误差来判断，则该两组观测值的可靠程度是一致的，但是根据经验，误差分配得愈零乱或有较大的数值出现，都是观测精度愈低的表现。因此我们不能认为该两组成果的精度是一致的。如用中误差来作为衡量精度的标准就能很好地克服这个缺点。

### 二、中误差（均方误差）

某观测列中真误差平方的算术平均值开方叫中误差或称均方误差，以  $m$  表示，即：

$$m = \pm \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} \quad (2-5)$$

依上例：

$$m_{\text{甲}} = \pm \sqrt{\frac{2^2 + 5^2 + 3^2 + 4^2 + 2^2}{5}} = \pm \sqrt{\frac{58}{5}} = \pm 3.4$$

① 它代表一组观测值中每一个观测值平均地，与其值相差的大小，后面常称它为单一观测的中误差。



$$m_z = \pm \sqrt{\frac{2^2 + 0^2 + 10^2 + 3^2 + 1^2}{5}} = \pm \sqrt{\frac{114}{5}} = \pm 4.8$$

計算表明乙組的觀測值精度比甲組低。中誤差是衡量精度最好的標準，因而在我國測量工作中一般都採用它作為衡量精度的標準。

### 三、極限誤差

極限誤差在測量中一般又稱為最大允許誤差，它是觀測成果能否被採用的一个標準。實際表明，一組觀測值的偶然誤差有些較中誤差為大、有些則較小。或然率理論證明：大於中誤差的偶然誤差，在100個中大約可能出現32個，大於兩倍中誤差的在100個中可能有5個，大於三倍中誤差的，在1000個中大約只有3個，比三倍中誤差更大的偶然誤差，更難以出現。因而，常把三倍中誤差當作極限誤差，即：

$$\Delta_{\text{極}} = 3m \quad (2-6)$$

在某些場合，有時也採用兩倍中誤差作為極限誤差。極限誤差的應用是很廣泛的，如在經緯儀閉合導線中，規定角度的閉合差不允許大於 $\pm 1.5 t\sqrt{n}$ ，這就是極限誤差，並是採用的三倍中誤差。又如在礦山相向掘進中，我們就是先以貫通的極大允許差來作為極限誤差，然後又以它與中誤差的关系來反求中誤差，從而設計我們應有的測量方法和應使用的儀器。由此也可看出採用中誤差作為衡量精度標準的另一個優點。

### 四、相對誤差

前面所提到的平均誤差、中誤差、極限誤差都是絕對誤差。有時單靠絕對誤差的大小還不足以表達觀測結果的好壞。例如丈量了二段距離，一長為100米，另一長為2米，其中誤差都為 $\pm 1$ 毫米，能不能說兩者的精度相等呢？顯然不能，前者比後者之精度要高。因此，必須採用另一種衡量精度的方法，那就是相對中誤差，它是中誤差與觀測值

之比，如上例，前者的相對中誤差為 $\frac{1}{100 \times 1000} = \frac{1}{100,000}$ ，而後者為 $\frac{1}{2 \times 1000} = \frac{1}{2000}$ 。相對誤差是一個無名數，在測量工作中通常將分子化為1。

在三角測量中，常遇到由於測角與量邊誤差而引起的點位誤差問題。如圖2—2所示，在固定點B上觀測了 $\beta$ 角，丈量了邊長BP=100米。邊長中誤差為 $\pm 5$ 厘米，使P點在邊長方向上移動了 $\Delta s$ 長；測角誤差 $\Delta \beta = \pm 0.5'$ 使P點在邊長垂直方向上移動了一個 $\Delta u$ 值。在這種單位不同的情況下，我們很難比較哪個因素對結果的影響較大，這時我們必須化為相對誤差，才能判斷。顯然：

$$\text{邊長的相對誤差} = \frac{\Delta s}{BP} = \frac{.5}{100 \times 100} = \frac{1}{2000}$$

$$\text{測角的相對誤差} = \frac{\Delta u}{BP} = \frac{\Delta \beta}{\beta} = \frac{0.5'}{3438'} = \frac{1}{6900}$$

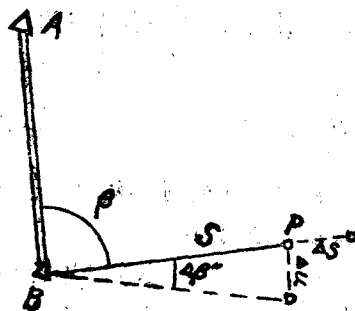


圖 2—2

說明測角誤差比量邊誤差對點位的影響要小。

## 第二节 誤差傳播定律

前面討論的是利用對某量多次觀測的眞誤差來評定單一觀測值的精度問題，但是在測量的實際工作中，所求的未知數並不都是直接測量獲得，而多半是間接計算出來的，例如：

1. 在比例尺為  $1:M$  的圖上量得距離為  $S$ ，求實地長度  $S$ ，計算式為  $S=M \cdot S$ 。

2. 在導線測量中，根據左轉折角來計算坐標方位角，關係式為：

$$\alpha_n = \alpha_0 + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n - n \times 180^\circ$$

3. 根據對同量  $n$  次測量結果來計算算術平均數，即：

$$X = \frac{L_1 + L_2 + \dots + L_n}{n} = \frac{1}{n} L_1 + \frac{1}{n} L_2 + \dots + \frac{1}{n} L_n$$

4. 根據導線邊的水平和坐標方位角  $\alpha$  來計算坐標增量  $\Delta x$ ， $\Delta y$ ，即：

$$\Delta x = S \times \cos \alpha, \Delta y = S \times \sin \alpha$$

這樣就出現了一個問題，知道了直接觀測值的誤差，如何求得間接計算出來的未知數之誤差呢？也就是說，觀測值及其函數在中誤差上存在着怎樣的關係？闡述這些關係的定律，就稱為誤差傳播定律。

函數的形式不同，中誤差的傳播規律也不一樣。下面從中誤差定義入手來討論一些簡單的函數（如倍數，和差，綫性等函數），然後再利用高等數學來推導一般函數的公式。

### §2-5 倍數函數的誤差傳播定律

設有函數

$$Z = k \cdot x \quad (2-7)$$

式中  $k$  為常數； $x$  為觀測值，它的中誤差為  $m_x$ ；函數  $Z$  的中誤差為  $m_z$ 。 $m_z$  與  $m_x$  之關係可由眞誤差的關係導出。

以  $\Delta x$  與  $\Delta Z$  分別表示  $x$  與  $Z$  的眞誤差，由式 (2-7) 知，當  $x$  有一定誤差出現，也必然引起  $Z$  出現一定的誤差，即有

$$Z + \Delta Z = k (x + \Delta x)$$

$$\text{亦即} \quad \Delta Z = k \cdot \Delta x \quad (2-8)$$

若對  $x$  共觀測  $n$  次，出現  $n$  個眞誤差  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ ，由此函數  $Z$  也必然出現  $n$  個眞誤差，分別為：

$$\Delta Z_1 = k \cdot \Delta x_1$$

$$\Delta Z_2 = k \cdot \Delta x_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\Delta Z_n = k \cdot \Delta x_n$$

為了求得中誤差，將上式兩端平方，然後求出總和，