中等专业学校基础课教材

主　编　刘克宁　胡　楚

数学

下册

SHU XUE

中国财政经济出版社

出 版 说 明

为适应中等（职业、职工、成人）专业学校文化基础课教学的需要，我们组织全国九所财经（财贸）、商业、供销、粮食学校的高级讲师、副教授和资历深厚的讲师，编写了中等专业学校基础课系列教材．全套教材包括《语文》上、下册，《数学》上、下册，《物理》，《财经英语》基础部分、提高部分和专业部分三册《物理习题与实验》等．

《数学》（下册）是中等专业基础课系列教材之一，由湖北商业高等专科学校刘克宁副教授任主编，湖北省粮食学校胡楚讲师任副主编，参加编写的人员有：胡楚（第十、十一、十四章），湖北省粮食学校罗吉本讲师（第十二、十三章），刘克宁（第十五章），全书由刘克宁总纂．

该书在编写过程中，得到各有关兄弟学校的大力支持，在此表示感谢．对于书中的不足之处，请读者指正．

编　者

1996 年 6 月

目　录（下册）

第十章 极限与连续

极限是微积分中最基本的概念之一，它是研究微积分的重要工具；连续函数是微积分研究的主要内容．本章介绍复合函数、初等函数、极限的概念及求法等，然后讨论用极限的方法研究函数的连续性．

§10.1 复合函数、初等函数

一、复合函数

设某企业的总收入 R 是产量 Q 的函数 $R=f(Q)$，而该企业的产量 Q 又是投入资源 x 的函数 $Q=g(x)$．这样，对于每一个 x 的值，经过 Q 都有一个 R 的值与之对应，我们就说 R 是 x 的复合函数，记作

$$R=f[g(x)].$$

其中产量 Q 是中间变量，投入的资源 x 是自变量．

一般地，我们有下面复合函数的定义：

定义 设在某一变化过程中，存在三个变量 x、u、y，并且 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$．如果对于 x 值所对应的 u 值，函数 $y=f(u)$ 有定义，则把 $y=f[\varphi(x)]$ 叫做 x 的复合函数，u 叫做中间变量．

例如，$y=1+u^2$， $u=\sin x$，则 $y=1+\sin^2x$ 就是 x 的复合函数．

又如函数 $y=\log_a\sqrt{x}$ 是由函数 $y=\log_a u$，$u=\sqrt{x}$ 复合而成的．

复合函数的中间变量，可以不止一个．例如，若 $y=f(u)$，$u=g(v)$，$v=\varphi(x)$，则 $y=f\{g[\varphi(x)]\}$ 是经过两个中间变量 u，v 复合而成的复合函数．

我们所学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数．一般地，分解复合函数即是由外层向里层逐一拆成基本初等函数或多项式的形式．

例 1 指出下列函数是由哪几个简单函数复合而成的：

(1) $y=a\sqrt{x^2+1}$； (2) $y=5^{\ln\sin x}$；

(3) $y=\ln(1+\cos x)$； (4) $y=\mathrm{tg}^5\sqrt[3]{\ln\arcsin x}$.

解：(1) $y=a\sqrt{x^2+1}$ 是由下列函数复合而成的：

$$y=au^{\frac{1}{2}},\quad u=x^2+1.$$

(2) $y=5^{\ln\sin x}$ 由 $y=5^u$，$u=\ln v$，$v=\sin x$ 复合而成．

(3) $y=\ln(1+\cos x)$ 由 $y=\ln u$，$u=1+v$ 和 $v=\cos x$ 复合而成．

(4) $y=\mathrm{tg}^5\sqrt[3]{\ln\arcsin x}$ 是由 $y=u^5$，$u=\mathrm{tg}v$，$v=\sqrt[3]{w}$，$w=\ln t$，$t=\arcsin x$ 复合而成的．

必须注意，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的．例如，$y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数．因为对于 $u=2+x^2$ 定义域 $(-\infty,+\infty)$ 中任何 x 值所对应的 u 值都大于或等于 2，它们都不能使 $y=\arcsin u$ 有意义．

例 2 指出下列函数的复合过程和定义域：

(1) $y=\lg(1-x)$； (2) $y=e^{\sqrt{\frac{1}{\sin x}}}$；

(3) $y=\arcsin 2x$.

解：(1) $y=\lg(1-x)$是由 $y=\lg u, u=1-x$ 复合而成的；因为 $y=\lg u$ 的定义域是 $u\in(0,+\infty)$，且 $u=1-x$，于是要求 $1-x>0$，则 $x<1$. 因此，$y=\lg(1-x)$的定义域是$(-\infty,1)$.

(2) $y=e^{\sqrt{\frac{1}{\sin x}}}$是由下列简单函数复合而成的：

$y=e^u, u=v^{\frac{1}{2}}, v=\frac{1}{w}, w=\sin x$. 由于 $\sin x\neq 0$，且 $\sin x>0$，所以这个复合函数的定义域是$(2k\pi,(2k+1)\pi), k\in Z$.

(3) 因为 $y=\arcsin 2x$ 是由 $y=\arcsin u, u=2x$ 复合而成的，而 $y=\arcsin u$ 的定义域是$-1\leqslant u\leqslant 1$，即$-1\leqslant 2x\leqslant 1$ 所以 $y=\arcsin 2x$ 的定义域是$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

二、初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成，并能用一个数学式子表示的函数叫做初等函数．如

$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$；　　$y=\sin x^2$；

$y=(x^2+1)e^{\sqrt{x}}+\sin(\lg x)$

等等都是初等函数．

多项式 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$(其中 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 都是实常数)是最简单的初等函数，它的定义域是实数集 R.

由有理分式 $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$(其中 $P(x)$和 $Q(x)$都是多项式)所表示的函数叫做有理函数．显然多项式也是有理函数．

应该指出，分段函数一般不是初等函数，但对于分段函数

$$y=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ -x, x<0\end{cases}$$

来说，它能化为 $y=\sqrt{x^2}$，而 $y=\sqrt{x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2$ 复合而成的，所以这个分段函数是一个初等函数．

习　题　10-1

1．试将 y 表示为 x 的复合函数：

(1) $y=u^2$，　$u=1+\sqrt{v}$，　$v=x^2+2$；

(2) $y=\log_a u$，　$u=\sin v$，　$v=e^t$，　$t=x+1$；

(3) $y=\operatorname{arctg} u$，　$u=5^v$，　$v=x^{\frac{1}{3}}$；

(4) $y=5^u$，　$u=\ln v$，　$v=\sin x$.

2．设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，试求 $f[f(x)]$.

3．指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=\sin 3x$；　(2) $y=\sqrt{\ln x}$；

(3) $y=2^{\sin^3 x}$；　(4) $y=\lg\sin(x^2-1)$；

(5) $y=\cos^2(\sin 5x)$；　(6) $y=e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$.

4．求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\ln x}$；　(2) $y=\arcsin\sqrt{x}$；

(3) $\varphi(x)=\ln(x^2-1)$；(4) $\varphi(x)=\ln\sin x$；

(5) $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$.

§10.2 极　　限

一、数列的极限

先看一个实际例子.

某企业生产设备投资额是10万元,如果规定每年提取的折旧费为该设备帐面价格的10%,那么这项设备的帐面价格(单位:万元)按照第一年、第二年、……的顺序,就可以排列成一列有次序的数:

第一年　10;

第二年　$10-10\times 10\%=10\times\frac{9}{10}$;

第三年　$10\times\frac{9}{10}-10\times\frac{9}{10}\times 10\%=10\times(\frac{9}{10})^2$;

……………………

即为数列:

$$10, 10\times\frac{9}{10}, 10\times(\frac{9}{10})^2, \cdots, 10\times(\frac{9}{10})^{n-1}, \cdots.$$

随着n的无限增大,这项生产设备的帐面价格将会逐渐地接近于零.

我们再观察几个数列的变化趋势:

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$简记为$\left\{\frac{1}{n}\right\}$;

(2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, (\frac{1}{2})^n, \cdots$简记为$\left\{(\frac{1}{2})^n\right\}$;

(3) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \cdots$ 简记为 $\left\{(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}$;

(4) $\frac{1}{2},\frac{5}{4},\frac{7}{8},\frac{17}{16},\frac{31}{32},\cdots$简记为$\left\{1+(-1)^n\frac{1}{2^n}\right\}$.

可以看出，当 n 无限增大(用记号 $n\to\infty$表示，读作"n 趋近于无穷大")时，$\frac{1}{n}$、$(\frac{1}{2})^n$ 和$(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$无限地趋近于常数 0，而 $1+(-1)^n\frac{1}{2^n}$无限地趋近于常数 1. 换句话说，即$\frac{1}{n}$、$(\frac{1}{2})^n$ 和$(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$与 0 差的绝对值可以任意地小，$1+(-1)^n\frac{1}{2^n}$与 1 差的绝对值可以任意地小.

一般地，对数列

$$\{y_n\}:y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n,\cdots$$

有如下极限定义：

定义　如果对于数列$\{y_n\}$，当项数 n 无限增大时，数列 $y_n=f(n)$无限地趋近于一个确定的常数 A，那么数 A 就叫做数列$\{y_n\}$的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}y_n=A,(\text{或当 }n\to\infty\text{时},y_n\to A).$$

注意：定义所说的"数列 y_n 无限地趋近于一个确定的常数 A"是指 y_n 与 A 差的绝对值$|y_n-A|$可以任意地小.

例 1　根据数列极限的定义，试问：

(1) 3 是不是数列$\left\{\frac{3n+4}{n+1}\right\}$的极限?

(2) 1 是不是数列$\left\{2-\frac{1}{n^2}\right\}$的极限?

解：(1) 因为$|y_n-3|=\left|\frac{3n+4}{n+1}-3\right|=\left|\frac{1}{n+1}\right|$，且当 n 无限增大时，数列 $y_n=\frac{3n+4}{n+1}$与数 3 差的绝对值$\left|\frac{1}{n+1}\right|$无限小，所以 3 是数列 y_n 的极限. 即

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{n+1} = 3.$$

(2) 因为 $|y_n - 1| = \left|(2 - \frac{1}{n^2}) - 1\right| = \left|1 - \frac{1}{n^2}\right|$.

可以看出，当 n 无限增大时，数列 $y_n = 2 - \frac{1}{n^2}$ 与数 1 差的绝对值 $\left|1 - \frac{1}{n^2}\right|$ 越来越接近于 1，但不能任意小，所以数 1 不是数列 $y_n = 2 - \frac{1}{n^2}$ 的极限．事实上，当 n 依次取 1,2,3,4,… 等自然数时，y_n 的各项依次为

$$2-1,\quad 2-\frac{1}{4},\quad 2-\frac{1}{9},\quad 2-\frac{1}{16},\cdots.$$

当 n 无限增大时，y_n 无限接近于 2，所以 2 是数列 y_n 的极限．即

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(2 - \frac{1}{n^2}) = 2.$$

例 2　观察下列数列当 n 无限增大时是否有极限？

(1) $y_n = (-1)^n$；　　(2) $y_n = n(n+1)$；

(3) $y_n = n^2 - (n+2)(n-2)$.

解：　(1) 由 $y_n = (-1)^n$ 得数列

$$-1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots.$$

显然，当 n 无限增大时，它的各项始终在 -1 与 1 两数中来回摆动，不趋于一个确定的常数．所以这个数列没有(不存在)极限．

(2) 由 $y_n = n(n+1)$ 得

$$1\times2,\ 2\times3,\ 3\times4,\ \cdots,\ n(n+1),\ \cdots.$$

当 n 无限增大时，$y_n = n(n+1)$ 无限增大，不趋于某一个确定的常数，所以数列没有极限．

(3) 由 $y_n = n^2 - (n+2)(n-2)$ 得

$$4, 4, 4, \cdots, n^2 - (n+2)(n-2), \cdots.$$

这个数列的各项都是 4，当 n 无限增大时，

$$|y_n - 4| = |n^2 - (n+2)(n-2) - 4| = 0$$

自然任意小，所以有

$$\lim_{n \to \infty} [n^2 - (n+2)(n-2)] = 4.$$

例 2 说明，并不是任何数列都有极限．

如果一个数列有(存在)极限，就说这个数列是收敛的；如果数列没有极限，就说这个数列是发散的．

可以证明，数列的极限是唯一的．

二、函数的极限

数列 $y_n = f(n)$ 可以看作是以自然数为自变量的函数．现在我们讨论定义于实数集合上的函数 $y = f(x)$ 的极限．

1．当 $x \to \infty$ 时，函数 $y = f(x)$ 的极限

数列极限中的记号"$n \to \infty$"的意义是指数列的项数按自然数的顺序无限增大．通常，函数的自变量 $x \to \infty$ 是指 x 的绝对值无限增大．为了明确起见，当 x 取正值且无限增大时，记作 $x \to +\infty$；当 x 取负值且其绝对值无限增大时，记作 $x \to -\infty$.

反之，将 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 两种情况可以合并写成 $x \to \infty$.

我们先观察函数 $y = 1 + \frac{1}{x}$ 的图象(如图 10-1).

可以看出，当 $|x|$ 无限增大时，函数 $y = 1 + \frac{1}{x}$ 的值无限地接近于常数 1，即

$$|y-1|=\left|1+\frac{1}{x}-1\right|=\left|\frac{1}{x}\right|$$

可以任意小，我们称 $x\to\infty$ 时，函数 y 以 1 为极限．一般地，有如下极限定义：

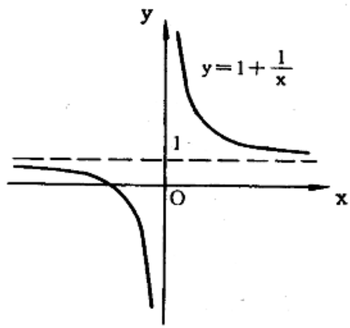

图 10-1

定义　如果当 $|x|$ 无限增大（$x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A（即 $|f(x)-A|$ 可以任意地小），那么数 A 就叫做当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A,\text{（或当}x\to\infty\text{时},f(x)\to A\text{）}.$$

由定义，上述例子可记为

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1.$$

类似地，如果当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么数 A 就叫做当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A,\text{（或}\lim_{x\to-\infty}f(x)=A\text{）}.$$

例 3　说明函数 $y=\frac{1}{x}$，当 $x\to\infty$ 时的极限是零．

解：作函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象（如图 10-2）．

因为当 $x\to\infty$ 时，

$$|y-0|=\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}$$

可以任意小，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

应该注意，有些函数只在 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 其中一种情况下有极限．如图 10-3 所示，函数 $f(x)=e^{-x}$ 当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$，而当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)$ 不能无限趋近于任何一个确定的常数，所以只在 $x\to+\infty$ 时有极限，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$. 同样对于函数 $f(x)=e^{x}$，有 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$.

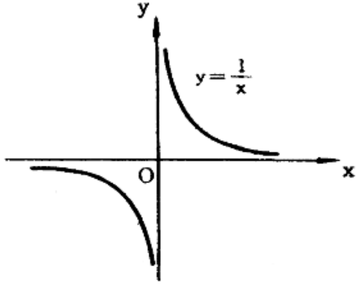

图 10-2

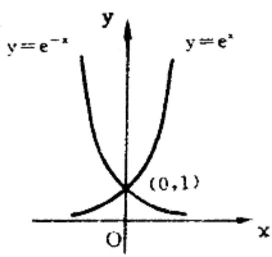

图 10-3

例 4　讨论函数 $y=\operatorname{arctg}x$ 当 $x\to\infty$ 时的极限（如图 10-4）.

解：当 $x\to+\infty$ 时，$\operatorname{arctg}x\to\frac{\pi}{2}$；而当 $x\to-\infty$ 时，$\operatorname{arctg}x\to-\frac{\pi}{2}$. 即

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2}.$$

由于

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x\neq\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x,$$

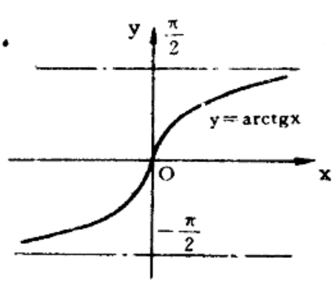

图 10-4

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\text{arcctg}x$不存在．

有些函数如 $y=\sin x$，当 $x\to\infty$ 时，函数 y 总在 -1 与 1 之间摆动，无一定趋向，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在．

一般地，有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=A. \qquad (1)$$

2．当 $x\to x_0$ 时，函数 $y=f(x)$的极限

先观察函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的图象(如图 10-5)．

因函数的定义域是 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，所以当 $x\neq1$ 时，$y=x+1$，其图象是去掉点(1,2)的一条直线，可以看出，不论 x 从大于 1 或小于 1 的方向趋近于 1，函数 y 的值越来越趋近于 2．即 $|y-2|$可以任意地小．一般地，有如下定义：

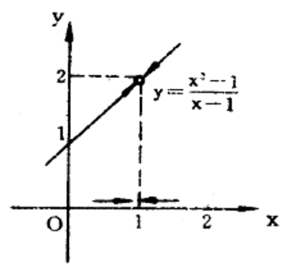

图 10-5

定义　如果当 $x\to x_0$ 时，函数 f(x)无限地趋近于一个确定的常数 A(即$|f(x)-A|$可以任意地小)，那么数 A 就叫做当$x\to x_0$时函数 f(x)的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad (\text{或当}x\to x_0\text{时}, f(x)\to A).$$

由定义，上述例子可记为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

例 5　求下列函数当 $x\to x_0$ 时的极限：

(1) $f(x)=x$；　　(2) $f(x)=C$ (C 为常数)．

解：(1) 因为当 $x\to x_0$ 时，$|f(x)-x_0|=|x-x_0|$可以任

意小，所以

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} x=x_0 .$$

(2) 因为当 $x\to x_0$ 时，$|f(x)-C|=|C-C|=0$ 任意小，所以

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} C=C.$$

值得注意的是

(1) 并不是所有函数在任何点处都有极限．例如，当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}$ 的绝对值无限增大，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$，即 $x\to 0$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}$ 不存在极限．

(2) 函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限值，与函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的函数值是不同的两个概念．函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时有无极限，与 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义无关．如函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处无定义，但当 $x\to 1$ 时，函数 y 的极限是存在的，即

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

3. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限

在 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限定义中，x 是以任意方式（大于 x_0 或小于 x_0）趋近于 x_0 的，但有时仅需要研究函数在点 x_0 处某一侧的变化状况，于是有函数在一点的左、右极限的概念．

当 x 从 x_0 的左侧趋近于 x_0（$x<x_0$）时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，则 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)=A(\text{或 } f(x_0-0)=A).$$

同样，当 x 从 x_0 的右侧趋近于 $x_0(x>x_0)$时，函数f(x)无限地趋近于一个确定的常数 A，则 A 就叫做函数 f(x)当 $x \to x_0$时的右极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)=A(\text{或 } f(x_0+0)=A).$$

因为 $x \to x_0$ 包含了 $x \to x_0^-$ 及 $x \to x_0^+$ 两种方式，所以当 $x \to x_0$ 时 f(x)的极限存在且等于 A，则表明 f(x)的左极限与右极限都存在且等于 A. 反之亦然．

这就是说，函数 f(x)当 $x \to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是 f(x)在点 x_0 处的左极限及右极限存在且相等．即

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x)=\lim_{x \to x_0^+} f(x)=A. \tag{2}$$

假如 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在，但不相等，那么极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$就不存在．

例 6　已知 $f(x)=\begin{cases} x, x \geqslant 2, \\ 2, x<2, \end{cases}$　求　$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

解：因为 $\lim\limits_{x \to 2} f(x)=\lim\limits_{x \to 2} 2=2$，　$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x \to 2^+} x=2$，

即
$$\lim_{x \to 2} f(x)=\lim_{x \to 2^+} f(x)=2,$$

所以
$$\lim_{x \to 2} f(x)=2.$$

请读者作出该函数的图象．

例 7　讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0 \end{cases}$$

当 $x \to 0$ 时的极限．