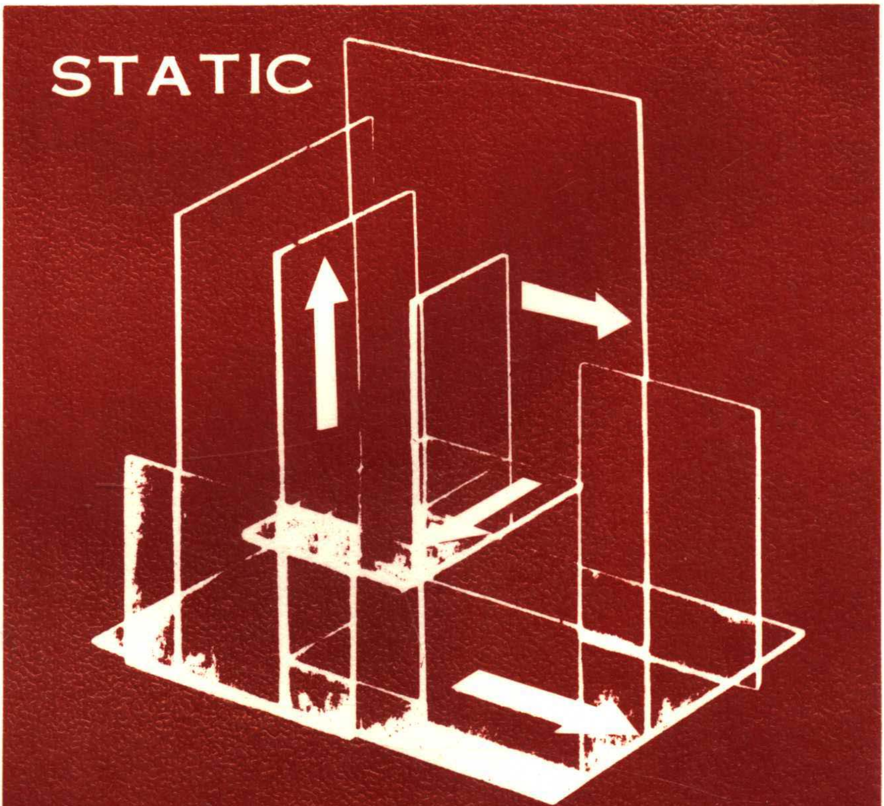
工程靜力學問題詳解

修訂新版（全册）

Vector Mechanics for Engineere

李有誼 編著



天一圖書公司

工程靜力學問題詳解

全册

李友誼 編 著

天一圖書公司

工程靜力學問題詳解

編 著 者：李　友　宜
發 行 所：順達出版社
登　　記：局版台業字第 0307 號
總 經 銷：天一圖書公司
地　　址：台北市金華街 128 號
電　　話：3513920
郵政劃撥：100822
發行日期：民國 71 年 1 月 出版

特價：180 元

目　錄

第一章 簡介（Introduction）

§1.1 何謂力學

力學是物理學的一支，亦爲一應用科學，是研習大部份工程科學上的基礎，專門研究力對於物體所生的結果，力是指所受的外力，物體通常視爲剛體，結果係指平衡的狀況或運動的結果。

剛體是指一物體受力時，其形狀與大小俱無變化而言。宇宙間，尙無絕對剛體的存在，任何物體受外力其形狀，大小總會有相當的變化，當上述變化極小時即可略去該項變化，而將該物體視爲剛體。

力學可作下列劃分：

- 力學
  - 剛體力學
    - 靜力學
    - 動力學
  - 變形體力學
  - 流體力學
    - 不可壓縮流體
    - 可壓縮流體

§1.2 基本觀念和定理

牛頓力學是目前工程科學的基礎，力學的基本關念是空間、時間、質量和力。這些觀念，不能被精確的定義，僅利用人們的直覺和經驗的基礎來定義，並利用它們做爲力學研究構思的依據。

空間的觀念常與點 P 位置的表示相結合，點 P 之位置可藉着一特定參考點或原點的三個長度及已知的方向被確定，稱之爲 P 點的座標。

同時事件發生時間亦應付予。

質量的關念是用於描述基本力學實驗上的物體本質特性。

力是一物體在另一物體上的作用，表達一力時，必須把它的大小、方向，作用點同時表出，可利用向量表示。

在牛頓力學中空間，時間和質量均爲絕對的觀念，而且是相互獨立的。

基本力學的探討完全依據以下的六個以實驗爲證據的基本原理：

(i) 力加法的平行四邊形原理。（詳見 2.1 節）

(ii) 傳遞性原理：一力的作用點可在其作用線上任意移動，該力對該體所生的運動效果不變。

牛頓的三個基本定理：

(iii) 第一定律：若作用於質點的合力爲零時，粒子將保持靜止，（原先爲靜止者）或以等速直線運動（原先爲運動者）。

(iv) 第二定律：如合力作用於質點上不爲零時，則粒子在合力的方向上會產生與合力大小成比例的加速度，在一致的單位系統中可表爲：

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$\vec{F}$爲作用於物體的合力。

m爲物體質量。

$\vec{a}$爲物體加速度。

(v) 第三定律：在接觸物體間的作用力與反作用力，兩力具相同的大小，相同的作用線，但方向相反。（詳見 6.1 節）

(vi) 牛頓的重力定律：二質點的質量分別爲M和m，二者間相互吸引的力大小相等，方向相反，其大小可由

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

求得，其中r爲二質點的距離，G爲萬有引力常數。

如圖 1.1。

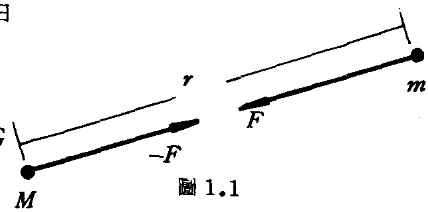


圖 1.1

§1.3　單位制

國際單位系統（SI 制）

基本單位：

長度：米（m）

質量：公斤（kg）

時間：秒（s）

力的單位定義如下：

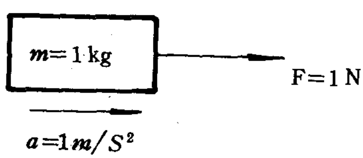


圖1.2

$$1\text{ 牛頓}(\mathrm{N}) = (1\ \mathrm{kg})(1\,\mathrm{m/s^2}) = 1\ \mathrm{kg\,m/s^2}$$

如圖 1.2 所示。

物體的重量W也是一種力，

$$W = mg$$

所以 1 kg 的質量，它的重量是

$$W = (1\ \mathrm{kg})(9.81\,\mathrm{m/s^2}) = 9.81\mathrm{N}$$

如圖 1.3 所示。

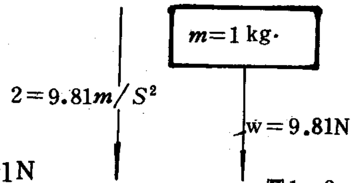


圖1.3

美國通用單位（英制單位）（FLT）

基本單位：

長度：呎（ ft ）

力：磅（ lb ）

時間：秒（ sec ）

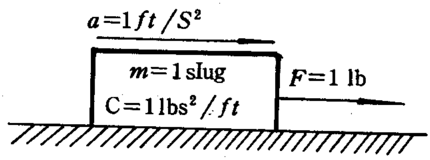


圖1.5

由牛頓第二定律 $F = ma$，如圖 1.5

$$1\ \mathrm{lb} = (1\ \mathrm{slug})(1\ \mathrm{ft/s^2})$$

可得質量

$$1\ \mathrm{slug} = \frac{1\ \mathrm{lb}}{1\ \mathrm{ft/s^2}} = 1\ \mathrm{lb\ s^2/ft}$$

物體的質量爲

$$m = \frac{W}{g} = \frac{1\ \mathrm{lb}}{32.2\ \mathrm{ft/s^2}} = \frac{1}{32.2}\ \mathrm{lb\ s^2/ft}$$

$$(g = 32.2\ \mathrm{ft/s^2})$$

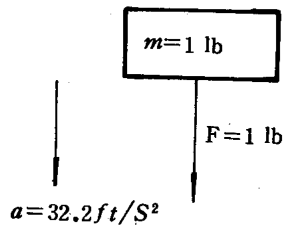


圖1.4

如圖 1.4 。

在工程問題上常會遇到的問題，

$$1\ \mathrm{mile} = 5280\ \mathrm{ft} \doteq 1\ \mathrm{mi}，\quad 1\ \mathrm{in} = \frac{1}{12}\ \mathrm{ft}$$

$$1\ \mathrm{kilopound} = 1000\ \mathrm{lb} = 1\ \mathrm{kip}，\ 1\ \mathrm{ton} = 2000\ \mathrm{lb}$$

§1.4　制度間的轉換

長度：$1\ \mathrm{ft} = 0.3048\ \mathrm{m}$

$$W = mg$$

力：$1\ \mathrm{lb} = (0.4536\mathrm{kg})(9.807\mathrm{m/s^2}) = 4.448\ \mathrm{kgm/s^2} = 4.448\ \mathrm{N}$

質量：$1\ \text{slug} = 1\ \text{lb}\ \text{s}^2/\text{ft} = \dfrac{1\ \text{lb}}{1\ \text{ft/s}^2} = \dfrac{4.448\ \text{N}}{0.3048\ \text{m/s}^2}$

$$= 14.59\ \text{N s}^2/\text{m} = 14.59\ \text{kg}$$

$$1\ \text{pound mass} = 0.4536\ \text{kg}$$

其他的量均爲導出量，英制與SI 制間的換算因子可參閱課本Table 1.3。

§1.5 解題方法

在解力學問題中，必須利用1.2節中所說的力學基本原理，或這些原理所導出的定理來寫出物體靜止或運動條件的方程式，所列方程式的正確與否，可藉着方程式中等號兩邊的單位是否相等來加以檢驗。

例如求50N力在作用線外0.60 m的距離所產生的力矩，假如所列的方程式爲

$$M = F \cdot d = (50\text{N})(0.60\text{m}) = 30\ \text{N}\cdot\text{m}$$

而N·m即爲力矩的單位，可知所列方程式是正確的，若非此單位，則所求的答案必爲錯誤的解。

§1.6 數值的正確性

工程方面的問題中，數據的準確度很少有大於0.2％的要求更大的準確度是沒有必要的，在解工程上問題不應只記合乎意義的數位而忽視了合理性，亦即應採取適當的有效數位，此有效位數必須合於0.2％的準確度即可，沒有必要達到更高的準確性。

第二章　平面上的力

課文提要

§2.1　質點上的力，兩力的合力

質點並非只限於微小的物體，當一物體的最大尺寸，遠比其動程爲小時，該物體即被視爲質點。力可被它的作用點大小，方向加以確定。

欲測定一力的大小，必須先定出一個客觀的單位，在工程上通常找用的單位是磅（英制）和牛頓（公制）如一力的大小，共有 1000 個英制單位，則該力的大小應爲 1000 lb 餘類推。力的本身由線段表示，採適當的尺度使得此線段可用以表示力的大小，一端著於力的作用點，另一端加以箭頭標示作爲力的方向。

實驗的結果顯示兩個作用於粒子 A 的力 $\vec{P}$ 與 $\vec{Q}$（圖 2.2 a 所示）可由具有產生相同結果的單力 $\vec{R}$ 取代（圖 2.2 c），這個力稱爲 $\vec{P}$ 與 $\vec{Q}$ 的合力，此合力可用平行四邊形定律求得。

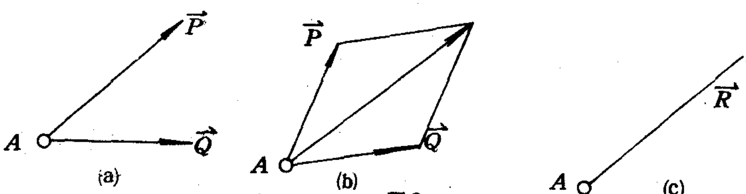


圖2.2

§2.2　向　量

向量：既有大小，又有方向的量。均應遵照平行四邊形定理作加法的處理。

一般書寫符號爲字母上方加一短箭號（如 $\vec{P}$）此課本係以斜字表示向量的大小，以粗體字表示向量。具相同的大小與方向的兩向量謂之相等。不論其是否具相同之作用點，如圖（2.4）所示，向量 P'

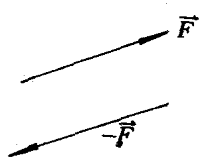


圖2.4

的負向量記為 $-\vec{P}$，兩者互為相反向量。

§2.3 向量加法

從平行四邊形原理中，可以導出一個三角形定律，也就是由一個三角形來代替平行四邊形，同樣的可以求得兩個相交的合力如圖 2.7 所示。

向量的減法可視為加一負向量如圖 2.8 所示。

幾個向量相加時，先後的程序可以任意選擇，其結果不變。純量與向量的乘積，將純量 k 與向量 p 的乘積；kp 定義為其與 p 相同方向（ k 為正）或 p 相反方向（ k 為負），且大小等於 p 與 k 的絕對值，相乘積的向量（如圖 2.13）。

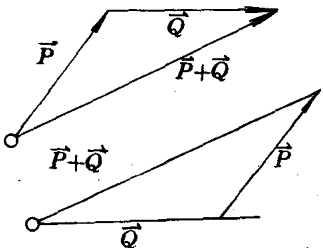


圖2.7

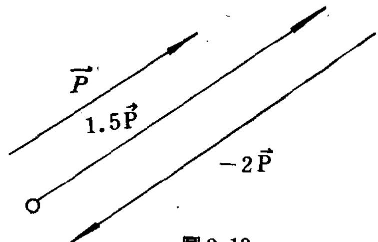


圖 2.13

§2.4 共點力的合力

如圖（2.14 a）所示，所考慮的作用力都通過點 A，故稱為共點力。其合力可採用由平行四邊形定理一再運用而成的多邊形加法，如圖 2.14b 所示。

§2.5 力的分解

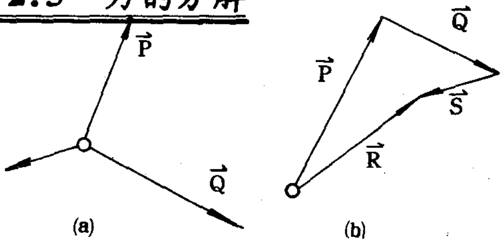


圖 2.14

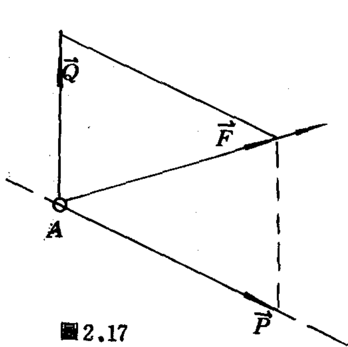


圖 2.17

利用平行四邊形原理，可將一已知力分解成兩個同平面的分力，其分法有無數組的可能，有兩種特別重要的情形：

(i) 兩個分量中一個分量已知：例如

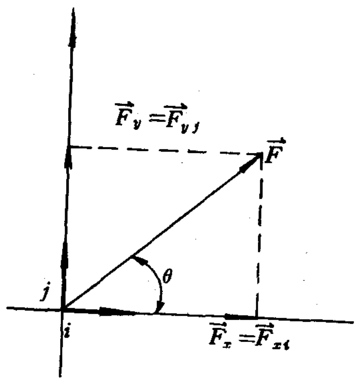
$$\vec{P}+\vec{Q}=\vec{F} \qquad \text{若}P\text{已知則} \qquad \vec{Q}=\vec{F}-\vec{P}$$

由$\vec{P}$的矢端連到$\vec{F}$的矢端即爲$\vec{Q}$。

(ii) 各分量的作用線已知：利用平行四邊形定律，在通過$\vec{F}$端點作出兩分力的作用線方向，可求得分量的大小。可由圖解法或正弦定律求得，如圖 2.17。

§2.6　力的直角分量，單位向量

在許多問題中，將力分解成兩個相互垂直的分量，要比分成二個斜分量更容易處理的多，且計算上不易發生錯誤。



在垂角座標系中，其X軸的單位向量與Y軸的單位向量分別定爲$\vec{i}$及$\vec{j}$，則在 Fig 2.21 圖中F可寫成爲

$$\vec{F}_X=|\vec{F}_x|\vec{i} \qquad \vec{F}_Y=|\vec{F}_y|\vec{j} \tag{2.6}$$

$$\vec{F}=|\vec{F}_x|\vec{i}+|\vec{F}_y|\vec{j} \tag{2.7}$$

F_xF_y 之正負視 F_x 及 F_y 之方向而定。$\vec{F}_x$ $\vec{F}_y$ 稱之爲$\vec{F}$的X軸及Y軸的分量。此分量亦可由X軸沿反時針方向量與$\vec{F}$的夾角θ表示。

$$|\vec{F}_x|=|\vec{F}|\cos\theta \qquad |\vec{F}_y|=|\vec{F}|\sin\theta \tag{2.8}$$

若$\vec{F}$是由它的直角分量$\vec{F}_x$與$\vec{F}_y$所定義，則決定其方向的角度θ可由下式得到

$$\theta=\tan^{-1}\frac{|\vec{F}_y|}{|\vec{F}_x|} \tag{2.9}$$

力的大小亦可寫爲

$$|\vec{F}|=\sqrt{\vec{F}_x^2+\vec{F}_y^2} \tag{2.10}$$

§2.7　由 x 與 y 的分量求力的相同

當三個或三個以上力的相加時，三角法的解，將會繁雜難求，利用各個向量，在 X 與 Y 軸的分向量 F_xF_y 的合，可求出總合力，方法直接而簡便

$$\vec{R}_x=\Sigma\vec{F}_x \qquad \vec{R}_y=\Sigma\vec{F}_y$$

$$\vec{R}=|\vec{R}_x|+|\vec{R}_y|=\Sigma\vec{F}=\Sigma|\vec{F}_x|+\Sigma|\vec{F}_y| \tag{2.13}$$

§2.8 質點的平衡

一力系作用於質點上的合力爲零時，此質點爲平衡狀態。此力系稱爲平衡力系，一力系如可繪成封閉的多邊形，如圖 2.28 所示，此力系必爲平衡力系。

$$\vec{R}=\Sigma\vec{F}=0 \tag{2.14}$$

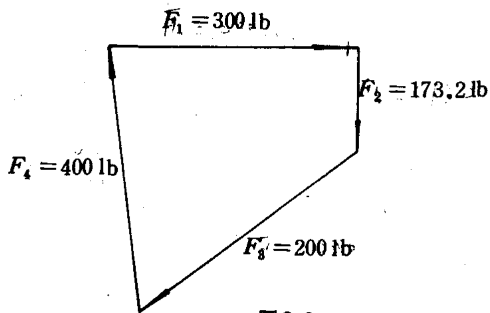


圖 2.8

§2.9 牛頓第一運動定律

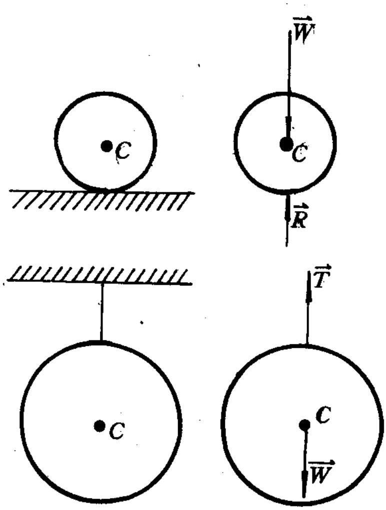
若作用於質點的合力爲零時，粒子將保持靜止（原先爲靜止）或以等速直線運動（原先爲運動者）。

§2.10 質點平衡的問題，分離物體圖

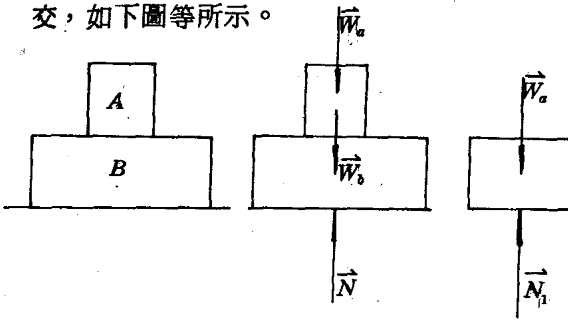
在實際的問題中，往往牽涉到很多的物體，爲了便於分析起見，常在這些物體中，劃出一個或一群物，使與其餘的物體分離，並把被劃出的物體所受的各個外力，一一表出。由此而得各有關的圖，稱之爲分離物體圖。應注意下列各點：

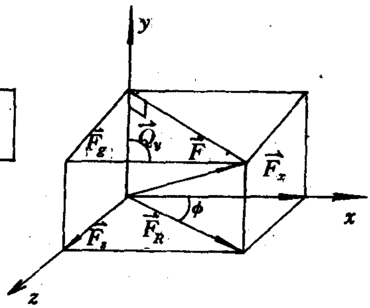
(1)物體的重力，恒過物體的重心，且垂直向下。

(2)連接各物體的繩，加於各物體的拉力，其作用線經常和繩的中心線相切。



(3)在光滑接觸面上，所生的作用力與反作用力，其作用線經常和接觸面正交，如下圖等所示。





§2.11　空間中力的直角分量

如右圖所示作用於直角座標 x，y，z 的原點 0 的力 $\vec{F}$，其在 x，y，z 軸的分量可表爲：

$$|\vec{F}_y|=|\vec{F}|\cos\theta_y \qquad |\vec{F}_h|=|\vec{F}|\sin\theta_y \tag{2.16}$$

$$|\vec{F}_x|=|\vec{F}_h|\cos\phi=|\vec{F}|\sin\theta_y\cos\phi$$
$$|\vec{F}_z|=|\vec{F}_h|\sin\phi=|\vec{F}|\sin\theta_y\sin\phi \tag{2.17}$$

$$|\vec{F}|=\sqrt{\vec{F}_x^2+\vec{F}_y^2+\vec{F}_z^2} \tag{2.18}$$

若取 $\theta_x\theta_z$ 分別代表 $\vec{F}$ 與 x，z 軸間的夾角，則

$$|\vec{F}_x|=|\vec{F}|\cos\theta_x$$
$$|\vec{F}_y|=|\vec{F}|\cos\theta_y \tag{2.19}$$
$$|\vec{F}_z|=|\vec{F}|\cos\theta_z$$

而 θ_x，θ_y，θ_z 的餘弦值稱爲 $\vec{F}$ 的方向餘弦。沿 x，y，z 軸的單位向量 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 將更有助於表示 F。

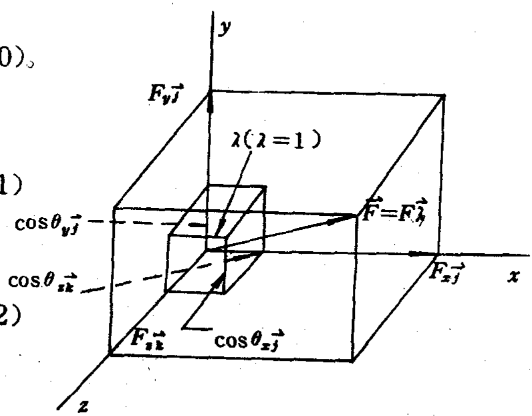
$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k} \tag{2.20}$$

如圖 2.33 所示亦可寫成

$$\vec{F}=F(\cos\theta_x\vec{i}+\cos\theta_y\vec{j}+\cos\theta_z\vec{k}) \tag{2.21}$$

力可表爲純量 F 與下式向量乘積

$$\vec{\lambda}=\cos\theta_x\vec{i}+\cos\theta_y\vec{j}+\cos\theta_z\vec{k} \tag{2.22}$$



λ 稱爲沿 F 作用線的單位向量，λ 的分量分別等於 F 作用線的方向餘弦

$$\lambda_x=\cos\ \theta_x \qquad \lambda_y=\cos\ \theta_y \qquad \lambda_z=\cos\ \theta_z \tag{2.23}$$

彼此間的關係爲

$$\lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2=1$$

或 $$\cos^2\theta_x+\cos^2\theta_y+\cos^2\theta_z=1 \tag{2.24}$$

若 F 的分量 F_x，F_y，F_z 已知時，力的大小可由（2.18）求得而（2.19）可解得方向餘弦。

$$\cos\ \theta_x=\frac{F_x}{|F|} \qquad \cos\ \theta_y=\frac{F_y}{|F|} \qquad \cos\ \theta_z=\frac{F_z}{|F|} \tag{2.25}$$

§2.12 由力的大小及作用線上兩個點所定義的力

若 F 被 $M(x_1y_1z_1)$ 及 $N(x_2y_2z_2)$ 所決定的直線作爲力的作用線，如圖 2.34。

$$\overrightarrow{MN}=d_x\vec{i}+d_y\vec{j}+d_z\vec{k} \tag{2.26}$$

則沿 F 作用線上的單位向量 λ 可表爲

$$\vec{\lambda}=\frac{\overrightarrow{MN}}{MN}=\frac{1}{d}(d_x\vec{i}+d_y\vec{j}+d_z\vec{k}) \tag{2.27}$$

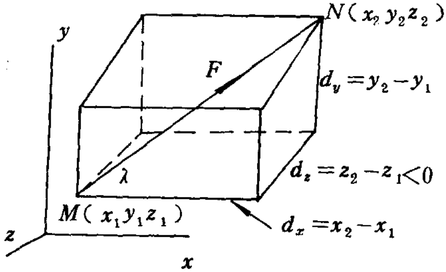


圖 2.34

$$\vec{F}=F\vec{\lambda}=\frac{F}{d}(d_x\vec{i}+d_y\vec{j}+d_z\vec{k}) \tag{2.28}$$

F 的各個分量可表爲

$$F_x=\frac{Fd_x}{d}\quad F_y=\frac{Fd_y}{d}\quad F_z=\frac{Fd_z}{d} \tag{2.29}$$

代入（2.19）可得 F 的方向餘弦

$$\cos\theta_x=\frac{d_x}{d} \qquad \cos\theta_y=\frac{d_y}{d} \qquad \cos\theta_z=\frac{d_z}{d} \tag{2.30}$$

§2.13 空間共點力的相加

空間共點力系的相加與 2.7 節所述的平面力系相加方法相似。

$$\vec{R}=\Sigma\vec{F}$$

$$R_x=\Sigma F_x \qquad R_y=\Sigma F_y \qquad R_z=\Sigma F_z \tag{2.31}$$

$$|\vec{R}|=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2} \tag{2.32}$$

$$\cos\theta_x=\frac{R_x}{|R|} \qquad \cos\theta_y=\frac{R_y}{|R|} \qquad \cos\theta_z=\frac{R_z}{|R|} \tag{2.33}$$

§2.14　空間中質點的平衡

質點於平衡的狀態，其合力必爲零，由（2.31）式的關係可得

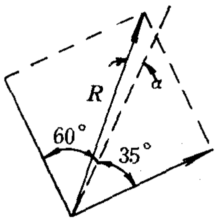
$$\Sigma F_x=0 \qquad \Sigma F_y=0 \qquad \Sigma F_z=0$$

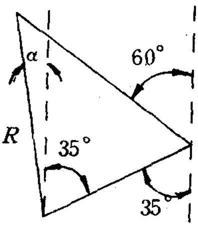
此三個方程式最多只能解三個未知數，例如未知數的代表可爲單一力的三個分量，或已知其方向的三個力的大小。

習題解答

1. 及 **2.** 依圖解法並分別應用(a)平行四邊形定律(b)三角形法則，求出該兩力的合力之大小與方向。

1.





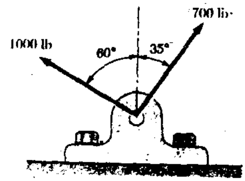


圖 2.1

解：(a) by measure

$|\vec{R}| = 1170$ lb $\qquad \alpha = 23.5°$

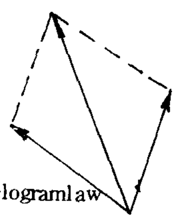
(b) $$\frac{1000}{\sin(35°+\alpha)} = \frac{|\vec{R}|}{\sin 85°} = \frac{700}{\sin(60°-\alpha)}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{1000\sin 60° - 700\sin 35°}{1000\cos 60° + 700\cos 35°} = 23.4°$$

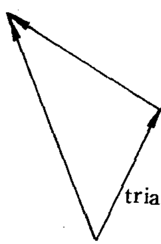
$|\vec{R}| = 1169.6$ lb

2.

解：



Paral lelogramlaw



triang lrule

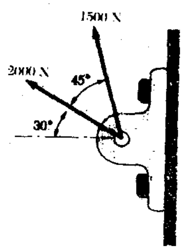


圖 2.2

用圖形法解，則用尺量 3240N ∠ 49.1°

3. 兩個構件 B 與 C 鉚釘於托架 A，已知構件 B 的張力為 2,500 lb，構件 C 的張力為 2,000 lb，用圖解法求作用於托架之合力大小與方向。

解：

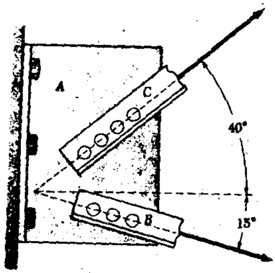
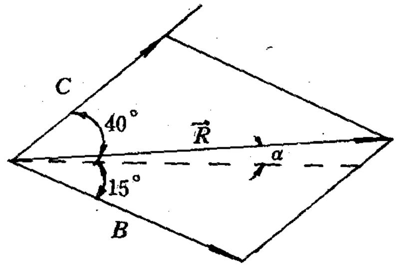


圖2.3和2.4



$$\alpha=\tan^{-1}\frac{-B\sin 15^\circ+C\sin 40^\circ}{B\cos 15^\circ+C\cos 40^\circ}=9.19^\circ \angle$$

$$|\vec{R}|=\sqrt{B^2+C^2-2BC\cos 125^\circ}=3998.2\ \text{lb}$$

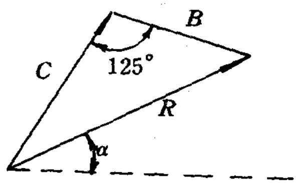
4. 兩個構件 B 與 C 鉚釘於托架 A，已知構件 B 的張力為 6 kN，構件 C 的張力為 10kN。用圖解法求作用於托架之合力大小與方向。

解：$\alpha=\tan^{-1}\dfrac{C\sin 40^\circ-B\sin 15^\circ}{C\cos 40^\circ+B\cos 15^\circ}$

$$=19.9^\circ \angle$$

$$|\vec{R}|=\sqrt{B^2+C^2-2BC\cos 125^\circ}$$

$$=14.3\ \text{kN}$$



5. 沿在線 a-a 與 b-b 上之 100 lb 的力 $\vec{F}$，經分解為兩個分量。力 $\vec{F}$ 沿線 a-a 之分量已知為 70 lb，由三角法求角度 α。

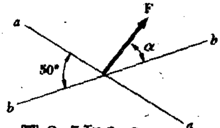
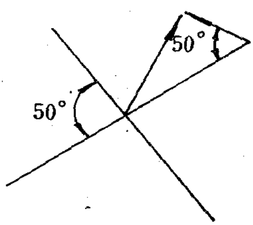
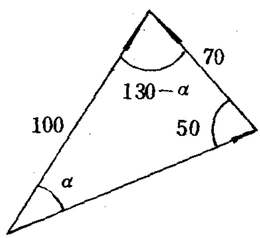


圖2.5和2.6





解：$\dfrac{70}{\sin\alpha}=\dfrac{100}{\sin 50}$　　$\sin\alpha=0.536$　　$\alpha=32.4$

6. 沿在線 a-a 與 b-b 上之 800N 的力 F，經分解為兩個分量。已知力 F 沿線 b-b 之分量為 120N，求三角法求角度 α。

解：由正弦定律：