厦门一中课程资源书系 008

数学趣在其中

任勇 主编

鹭江出版社
LUJIANG PUBLISHING HOUSE

厦门一中课程资源书系 008

数学趣在其中

任勇 主编

鹭江出版社
LUJIANG PUBLISHING HOUSE

数学——趣在其中
任　勇　主编
*
鹭江出版社出版、发行
(厦门市湖明路 22 号　邮编：361004)
福建新华印刷厂印刷
(福州市福新中路 42 号　邮编：350011　电话：83661214)
开本 787×1092　1/16　18.5 印张　410 千字
2006 年 9 月第 1 版
2006 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 7—80671—575—4
G·376　定价：31.00 元

“厦门一中课程资源书系”编委会

本册编者：李　为（专题一、十八）　陈志杰（专题二）

吴享平（专题三）　吴卫军（专题四）

林祥华（专题五）　郑辉龙（专题六）

高思远（专题七）　王芳珍（专题七）

刘　桦（专题八）　范建玮（专题九）

黄文忠（专题十）　邱小瑾（专题十一）

任　勇（专题十二、二十、二十一、二十二）

邓衍生（专题十三）　庄月蓉（专题十四）

姚丽萍（专题十五）　戴维纲（专题十六）

郭仲飞（专题十七）　余会昌（专题十九）

序

开发新时代的学校课程（代序）

任　勇

中国教育进入新的时期，其中最为引人注目的是面向21世纪的课程改革.

打开教育类杂志，常会看到一些新名词：校本管理、校本培训、校本教研、校本科研、校本课程、校本评估等等.

学校被历史地推到了教育改革的最前沿. 课程的重心下移了，要“以校为本”.

上海晋元高级中学提出了“学会选择、主动学习、卓越发展”的办学理念，以课程改革为突破口，掀起了一场教与学的革命，实行“套餐式课程”、“走班制运作”和“学分制管理”的互为配套的运行机制.

上海华东师大二附中提出了“构建以提升中学生国际竞争能力为目标的学校课程”和“给每个学生以特权的学校课程”，开设了“大文化类系列课程”47门，“STS系列课程”42门，“学生社团活动课程”26门，“荣誉课程”10门，四大系列共125门课程.

厦门一中也要“让课程适应每一个学生的发展”，开发系列的学校课程，实现课程的多样化，满足学生个性全面发展的需要.

课程改革浪潮滚滚而来，课程改革正在轰轰烈烈地进行，学校课程的开发是本次课程改革的亮点之一.

新课程“新”在哪里？

从课程管理角度看，“新”在从原来的两级管理走向三级管理，即国家课程管理、省级课程管理和学校课程管理，使得学校这个真正发生教育的地方有了一定的课程权力，并承担相应责任. 基于这种变化，学校应该十分珍惜这份课程权力，为学校的课程创新创设一个发展的平台.

学校课程开发的实质与要义，表现为课程权利的再分配，课程决策的民主化，课程开发主体的多元化，重视课程开发的过程，有利于学生个性的养成与教师的专业发展，有利于学校特色的形成.

学校课程开发，既是挑战，也是机遇.

这种挑战来自心理认知与参与意愿的挑战，来自知识与能力的挑战，来自时间与经费的挑战，来自制度与模式的挑战，来自家长与社区的挑战，等等.

现实的机遇是课程关注学校生活，有利于推进素质教育，有利于教师的专业化成长，为学生发展、教师发展、学校发展提供创新平台，有利于师生参与决策，等等.

就目前情况而言，不得不承认，对大多数教师来说，可能是“挑战”的成分多于“机遇”的成分.

厦门一中是一所历史名校，时代赋予名校新的庄严使命. 构建学校课程，传承名校文

化，培养时代新人，发展先进文化，这是名校的历史使命．历史名校唯有在深厚的积淀中把握未来、跨越发展，唯有在当今蔚为壮观的改革大潮中继续领航、乘势而上，才能不断地做强做大，才能不断地创造更多的“第一”的事业．

于是，学校十分重视课程资源的科学开发和合理利用．我们深知，没有课程资源的广泛支持，再好的课程改革设想也很难变成学校的实际教育效果．因此，我们从课程思想资源、课程知识资源、课程经验资源、课程财务资源、课程人力资源、网络课程资源等方面进行开发，其中编写系列的学校课程书籍供师生使用，是十分重要的课程资源．

在全校教职员工的努力下，在鹭江出版社的支持下，“厦门一中课程资源书系”将隆重推出，首批开发82本．

学校课程资源的开发是课程改革的新亮点．对教师的教育和学生的学习都提出了全新的挑战．

对教师而言，开发学校课程，是对教师观念、素质的检验，教师可以在开发学校课程中得到进一步发展．

对学生而言，学校提供各类课程，就是为了学生的个性发展提供一片自由的天地，学生在选择课程中不断成长．

《数学——趣在其中》一书，是厦门一中数学组和部分特邀作者的集体杰作，是厦门一中数学组平时教学活动的一个缩影．厦门一中数学组是一个强大的学术群体，有三位在职的特级教师，有一位在职的在读博士生，有九位硕士研究生，有全国模范教师、国务院特殊津贴获得者、福建省优秀教师、厦门市拔尖人才、苏步青数学教育奖获得者，有多位数学奥赛金牌教练，有六位教师参加骨干教师国家级培训，有三位福建省数学学科带头人，更多的是有崇高师德、有丰富高考中考经验、有多届奥赛经验、有丰富的课程改革实验经验的教师，相信他们能为广大中学生献上一本妙趣横生的数学读物．

值得一提的是，“学校课程开发”不是单纯地设计教育活动的计划和编写教案，而是通过该计划实施教学过程，评价实施结果，再把评价结果作为反馈信息用于改进最初计划的一系列创新活动．

尽管我们开发了“厦门一中课程资源书系”，但我们清醒地看到：课程资源的开发和利用，对中小学来说尚处在起步阶段，对我们来说是一个新的课题，我们试图做好这个课题；课程资源的开发和利用，不是一件一蹴而就的事，而是一个不断内化积淀的过程；课程资源的开发和利用，需要一个基本的框架体系，更需要有一批批教改生力军去冲锋陷阵；教材不是唯一的课程资源，教师是最重要的课程资源；课程资源是可以共享的，开放的厦门一中愿与更多的学校和有关部门共享课程资源．

我们有信心为开放新时代的学校课程做出新的贡献，我们要为新课改的崛起鸣锣开道，重塑厦门一中教师新形象，重筑厦门一中课程新文化，迎接世纪挑战，培育时代新人．

愿厦门一中的每位教师在开发学校课程的过程中不断发展，愿厦门一中的每位学生在选择学校课程的学习中迅速成长．

前 言

趣味数学与智力发展

任 勇

所谓智力，就是一个人的各种认知能力的总和，即智慧力量的总和．智力的结构一般说来包括观察能力、记忆能力、想象能力和逻辑思维能力．

数学的逻辑性、系统性、条理性都很强，抽象程度高．数学教学的主要目的是发展学生的智力．教科书的知识有一定系统性，知识是发展智力的重要条件，智力又是顺利掌握知识的必要条件，所以课堂教学是促进学生知识、技能和智力三者统一发展的重要途径．但除了课内应给学生安排充裕的认识活动外，课外还应该为他们安排一些补充的认识活动．课内教学由于受到教材内容的限制，对学生某些能力的培养也受到一定的限制，因此可以通过课外的认识活动（如数学游戏、智力测验等）来弥补课内之不足．同时，对于学习较好的学生，可以尽早给他们播下热爱科学的种子；对于学习成绩较差的学生，也可以通过合适的途径激发他们学习数学的兴趣．

趣味数学，贵在“趣味”．帕斯卡说过：“数学研究的对象是这样的严肃，最好不要失去能使它变的稍微有趣些的机会”．趣味数学正是把数学问题“变”得十分有趣，引为好奇，激发学生学习数学的兴趣．打开科学家传记，可以发现其中不少人的创造、成就往往和他们具有某方面的兴趣分不开．爱因斯坦小时候曾被认为是呆头呆脑的，进入初中后成绩也不好．正在这时，他的一位当工程师的叔叔却用风趣的魔术师式的语言，引起爱因斯坦对知识的好奇．他对孩子说：“代数嘛，就向打猪一样有趣，那头藏在树林里的野兽，把它叫做 x，然后一步一步逼近它，直到把它逮住!”他还从几何学入手，打开爱因斯坦思维的门扉．他在纸上画了个直角三角形，标上 A、B、C，并写上 $AB^2+BC^2=AC^2$，然后说：“这就是大名鼎鼎的毕达哥拉斯定理．两千年前的人就会证明了．孩子，你也来证证看!”12 岁的爱因斯坦被这个定理迷住了，他一连三个星期苦苦思索，最后终于证明了这个定理．想想爱因斯坦在初中的学习生活，看看这位 20 世纪的物理大师，我们将从中得到什么启示呢？这说明天才的秘密就在于强烈的兴趣和爱好．而趣味数学正是培养学生对数学的兴趣和爱好的重要方法之一．

兴趣和爱好好像催化剂，它能不断地促进学生去实践，去探索，逐步引导他们酷爱数学，从而发展他们的智力，为将来钻研科学技术打下牢固的智慧基础．

在趣味数学题中，有相当一部分可用来培养观察力的．简单举一个例子．如下图，有几个小钉，排成正方形：

你能用彩色橡皮筋把它围成多少个正方形．学生往往回答能围成 5 个正方形，而漏掉各边中点还可组成一个正方形．

观察能力不强的学生，学习概念时不能掌握实质，死记硬背，做题时看不清题意，因

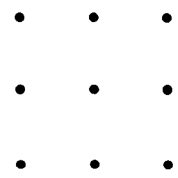

图　前言-1

而学习成绩差，也缺乏求知欲．可见，善于观察是极为重要的一种能力．千百万人都看见苹果落地，唯有牛顿悟出了万有引力定律；许多人都分离过空气，唯有瑞利发现了惰性气体．难怪巴甫洛夫的座右铭是：“观察，观察，再观察．”

歌德说得好：“哪里没有兴趣，哪里就没有记忆．”人们有一个共同的心理特征——有趣的材料容易记，记得牢．对于好奇心强的中学生来说更是这样．《有趣的数学》一书中有这样两个题目：

1．巧妙的算法：

$1^3+2^3=9$，$(1+2)^2=9$；

$1^3+2^3+3^3=36$，$(1+2+3)^2=36$；

…

请你仔细研究上述几组等式，看能否从中找出规律，并迅速算出下式的答案：

$1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3$．

2．下面是一个有趣的式子：

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}$，不必通分，你能正确迅速地算出它的结果吗？

这两道题分别引出两个有用的公式：

$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$，$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，使学生学起来印象深刻，记忆效果好．

想象在人的社会实践中起着重要的作用，在艺术创作和科学发明中占有特别重要的地位．没有想象力，就没有李白的“飞流直下三千尺，疑是银河落九天”；没有想象力，就不可能发明微积分．可以说，没有想象力就没有艺术，没有科学．要提高学生的想象力，利用趣味数学题是一个方法．

例如，用6根火柴棒拼成4个等边三角形．不少学生在平面上苦思冥想，毫无办法，有的学生从平面到空间，通过想象，完成了这道题（如图前言-2）．

又如，有一个正方体，它的表面涂满了红色，在它每个面上切两刀，可得27个小正方体如图　前言-3，而且凡是切面都是白色的，问小正方体中三面红的有几块？两面红的呢？一面红的呢？各面都是白色的呢？如果每面切三刀，情况又怎样呢？每面切 n 刀呢？现在要得到各面都是白色的小正方

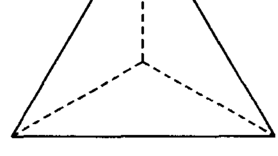

图　前言-2

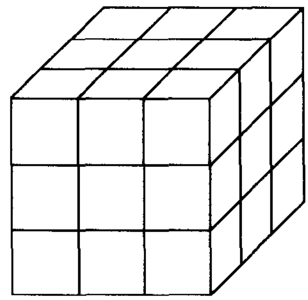

图 前言-3

体100块，至少每面要切几刀？此类趣味教学题，既能帮助学生学习三角形和正方体概念，又能激发他们学习几何的兴趣，有助于空间想象力的发展.

思维是人的心理活动的核心. 人类认识客观事物，学习基本知识，掌握基本规律，进行创造发明，都离不开思维能力. 在数学教学中，逻辑思维能力是作为核心能力来培养的. 一般说来，逻辑思维包括概念、判断、推理等基本思维形式以及比较、分类、类比、归纳与演绎、分析与综合等常用的思维方法. 解趣味数学题的过程就是一个增强逻辑思维的过程. 不少趣味数学题，都可用来培养学生思维的广阔性、深刻性、独立性和敏捷性. 如有A、B、C三个等式，A和C是错误的，只要在A式中加上两点变成B式，就可以使等式成立. 请你在C式中加上两点使等式成立.

A：$72\times3-5=166$；

B：$7.2\times3-5=16.6$；

C：$(51-3)\times2=34$.

如果学生用类似（加小数点）的方法，就没有独创性和敏捷性，是不可能将C式中的“—”号加两点变成“÷”而使C式成立的.

我们知道，不少趣味数学题有着较深刻的理论和实践背景，如“韩信点兵”问题，不仅涉及剩余定理，而且在计算机的结构中起了大用场；“称球问题”：12个球在天平上称3次，找出其中唯一的坏球来（实际上可以处理13个），这看起来是个数学游戏，实质上是信息论中的一个重要例子；“周游世界”、“地图染色的四色问题”和“哥尼斯堡七桥问题”等都是饶有趣味的图论问题. 有目的地引导学生去思考这些趣题，是可以大大提高他们的数学素养的.

趣味数学还是数学科普中相当重要的一环，但过去并不被人们所重视，认为这是小玩艺，不登大雅之堂. 现在这种局面有所扭转，国内有许多刊物都登载了趣味数学和数学游戏题，近年来还编写和翻译了不少这方面的读物. 对中小学生来说，这些都是促进智力发展的很好的课外读物. 也正是在这种情况下，我们应当注意：第一，趣味数学题或智力测验题，并不是心理学上所指的智力测验. 这些趣味数学题能培养学生的观察能力，记忆能力，想象能力和思维能力，但决不能单依靠它来测定一个人的聪明程度. 第二，课堂教学的任务是面向全体学生，所以在课堂教学中不能随意扩大教材以外的内容. 如果能结合授课内容，适当将数学问题变得有趣，使学生感到生活中处处存在数学，学起来也就兴趣盎然了. 应当指出，趣味数学题内容广泛，形式多样，涉及题外因素多，它容易偏离中小学双基训练，对智力发展不易起到系统的作用. 所以，应以课堂教学中培养智力为主，课外活动为辅. 只有这样，我们才能充分利用这一有利条件，因势利导，不断在课内课外全面发展学生的智力.

目 录

专题一　连分数

一、活动目的

通过对“连分数”的分析、探索和研究，激发学生的学习兴趣，培养学生的观察能力、探索能力，进而掌握一些较为深刻的数学思想方法.

二、活动说明

连分数是一个很容易入手的趣味数学问题，通过“做数学”让学生逐步了解连分数的基本概念和性质，让学生了解一些历史上的各种展式.

三、探索点的处理意见

1. 从简单题型入手，给出定义及符号；
2. 在操作中了解有理分数的展式；
3. 在操作和一定的计算中了解无理数的展式；
4. 给出一些“无限问题”的证明技巧；
5. 让学生欣赏一些有趣的展式.

四、活动过程

（一）引例、定义及符号

一个数$\frac{9}{7}$，可以写成：

$$\frac{9}{7}=1+\frac{2}{7}=1+\frac{1}{\frac{7}{2}}=1+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}},$$

这种形式的分数称为“连分数”.

一般地，形如

$$a_1+\cfrac{b_1}{a_2+\cfrac{b_2}{a_3+\cfrac{b_3}{a_4+\ddots}}} \qquad ①$$

的表达式叫做连分数. 在一般情况下，数 a_1，a_2，…，b_1，b_2，…可以是实数或复数，项数可以有限，也可以无限.

我们在这里只讨论简单连分数，它们的形式为

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\ddots}}} \qquad ②$$

其中，a_1 是整数（正数、负数或零），a_2，a_3，a_4，…是正整数.

如果连分数项数有限，即形如

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\genfrac{}{}{0pt}{}{}{\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}}} \qquad ③$$

式中仅含有有限个项 a_1，a_2，…，a_n，这样的分数叫做有限连分数.

用符号 $a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\cdots+\frac{1}{a_n}$ ④

表示③式是比较方便的，注意③式中第一个“+”号之后的“+”号都写低了，这是为了使我们记起构成一个连分数的过程中的“降了一层”.

用符号 $[a_1;\ a_2,\ \cdots,\ a_n]$ 表示连分数④式更为方便，故有

$$[a_1;\ a_2,\ \cdots,\ a_n]=a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n} \qquad ⑤$$

项 a_1，a_2，…，a_n 叫做连分数的部分商.

（二）一个有理分数的展式

例 1 研究$\frac{67}{29}$的连分数.

解：用 29 除 67，得出商数为 2 和余数为 9，故有

$$\frac{67}{29}=2+\frac{9}{29}=2+\cfrac{1}{\cfrac{29}{9}}. \qquad ⑥$$

用 9 除 29，得出

$$\frac{29}{9}=3+\frac{2}{9}=3+\cfrac{1}{\cfrac{9}{2}}. \qquad ⑦$$

用 2 除 9，得出

$$\frac{9}{2}=4+\frac{1}{2}.$$

所以，$\frac{67}{29}=2+\cfrac{1}{\cfrac{29}{9}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{9}{2}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}$

$$=[2;\ 3,\ 4,\ 2]=[a_1;\ a_2,\ a_3,\ a_4] \qquad ⑧$$

我们可以用“竖式”来完成这一过程：

$29\,\overline{)67}\ (2=a_1$	（用 29 除 67，$2\times29=58$，67 减去 58）
$\underline{58}$	
$9\,\overline{)29}\ (3=a_2$	（用 9 除 29，$3\times9=27$，29 减去 27）
$\underline{27}$	
$2\,\overline{)9}\ (4=a_3$	（用 2 除 9，$4\times2=8$，9 减去 8）
$\underline{8}$	
$1\,\overline{)2}\ (2=a_4$	（用 1 除 2，$2\times1=2$，2 减去 2）
$\underline{2}$	
0	（过程完成）

所以，$\dfrac{67}{29}=[a_1;\ a_2,\ a_3,\ a_4]=[2;\ 3,\ 4,\ 2]$.

练习 1　将下列各数化为简单连分数：

$\dfrac{49}{11}$；$\dfrac{95}{23}$；$\dfrac{111}{8}$.

答案：$\dfrac{49}{11}=[4;\ 2,\ 5]$；　$\dfrac{95}{23}=[4;\ 7,\ 1,\ 2]$；　$\dfrac{111}{8}=[13;\ 1,\ 7]$.

例 2　研究$\dfrac{29}{67}$的连分数.

解：
$67\,\overline{)29}\ (0=a_1$
$\underline{0}$
$29\,\overline{)67}\ (2=a_2$
$\underline{58}$
$9\,\overline{)29}\ (3=a_3$
$\underline{27}$
$2\,\overline{)9}\ (4=a_4$
$\underline{8}$
$1\,\overline{)2}\ (2=a_5$
$\underline{2}$
0

所以，$\dfrac{29}{67}=[a_1;\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5]=[0;\ 2,\ 3,\ 4,\ 2]$.

猜想：若 $p>q$，且$\dfrac{p}{q}=[a_1;\ a_2,\ \cdots,\ a_n]$，则$\dfrac{q}{p}=[0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]$.

证明是不难的，你可以试试看.

例 3　研究$-\dfrac{37}{44}$的连分数.

解：
$44\,\overline{)-37}\ (-1=a_1$
$\underline{-44}$
$7\,\overline{)44}\ (6=a_2$
$\underline{42}$
$2\,\overline{)7}\ (3=a_3$
$\underline{6}$
$1\,\overline{)2}\ (2=a_4$
$\underline{2}$
0

所以，$-\frac{37}{44}=[a_1;\ a_2,\ a_3,\ a_4]=[-1;\ 6,\ 3,\ 2]$.

注意，a_1 可以是负的，但 a_2、a_3、a_4 等必须是正的.

（三）无理数的连分数展式

例 4 把$\sqrt{2}$展为无限的简单连分数.

解：$\sqrt{2}=1.414\cdots$，其最大整数是 $a_1=1$，

所以，$\sqrt{2}=a_1+\frac{1}{x_2}=1+\frac{1}{x_2}$.

解关于 x_2 的方程，得 $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$.

$\therefore\ \sqrt{2}=a_1+\frac{1}{x_2}=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

$\because$ 小于 $x_2=\sqrt{2}+1=2.414\cdots$的最大整数是 $a_2=2$，

$\therefore\ x_2=a_2+\frac{1}{x_3}=2+\frac{1}{x_3}$，即$\sqrt{2}+1=2+\frac{1}{x_3}$，

解得 $x_3=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1>1$.

$$\therefore\ \sqrt{2}=a_1+\frac{1}{x_2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x_3}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}},$$

$\because\ x_3=\sqrt{2}+1=x_2$，

$\therefore$ 对 x_4，x_5，…的计算也会得到同样的结果，从而$\sqrt{2}$的无限连分数展开式是

$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=[1;\ 2,\ 2,\ 2,\ \cdots]=[1;\ \overline{2}]$,

上式右边 2 上面的一横表示数 2 无限次重复.

练习 2 写出下列无理数的展式：

$\sqrt{3}$；$\sqrt{15}$；$\sqrt{31}$.

答案：$\sqrt{3}=[1;\ \overline{1,\ 2}]$；

$\sqrt{15}=[3;\ \overline{1,\ 6}]$；

$\sqrt{31}=[5;\ \overline{1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 3,\ 1,\ 1,\ 10}]$.

$\sqrt{31}$有一个较长的循环节，这个例子可以作为拉格朗日（Lagrange）在 1770 年证明的一个定理的说明，这个定理是：任何一个二次无理数的连分数展式都在某一点后是循环的.

例 5 无限连分数 $[1;\ \overline{2}]$ 一定表示$\sqrt{2}$吗？

解：设 $x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}$,

则 $x-1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}$，

即 $x-1=\cfrac{1}{\left[1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}\right]+1}$.

∴　$x-1=\dfrac{1}{x+1}$，即 $x^2-1=1$，

∴　$x^2=2$.

∵　$x>0$，∴　$x=\sqrt{2}$.

例 6　求 $x=\dfrac{25+\sqrt{53}}{22}$的无限连分数展式.

解：我们用和例 4 一样的方法去做.

∵　$\sqrt{53}$在 7 和 8 之间，

∴　小于 x 的最大整数是 $a_1=1$.

∴　$x=\dfrac{25+\sqrt{53}}{22}=a_1+\dfrac{1}{x_2}=1+\dfrac{1}{x_2}$.

∴　$x_2=\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{22}{3+\sqrt{53}}=\dfrac{\sqrt{53}-3}{2}>1$.

∵　小于 x_2 的最大整数是 $a_2=2$，

∴　$x_2=a_2+\dfrac{1}{x_3}=2+\dfrac{1}{x_3}$，

∴　$x_3=\dfrac{1}{x_2-2}=\dfrac{2}{\sqrt{53}-7}=\dfrac{\sqrt{53}+7}{2}$.

∵　小于 x_3 的最大整数是 $a_3=7$，

∴　$x_3=a_3+\dfrac{1}{x_4}=7+\dfrac{1}{x_4}$，

∴　$x_4=\dfrac{1}{x_3-7}=\dfrac{2}{\sqrt{53}-7}=\dfrac{\sqrt{53}+7}{2}$.

∵　$x_4=x_3$，

∴　后面的计算将一再重复.

∴　$x=1+\dfrac{1}{x_2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x_3}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{x_4}}}=\cdots$，

即 $x=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7}+\cdots=[1;\ 2,\ 7,\ 7,\ \cdots]=[1;\ 2,\ \overline{7}]$.

例 7 无限连分数 $[1;2,\overline{7}]$ 一定表示 $\frac{25+\sqrt{53}}{22}$ 吗？

解：设 $x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{7+\ddots}}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{y}}$,

其中 $y=7+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{7+\ddots}}=7+\frac{1}{y}$，即 $y^2-7y-1=0$.

注意到 $y>0$，易解得 $y=\frac{\sqrt{53}+7}{2}$，从而

$$x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{y}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{\sqrt{53}+7}}=\frac{25+\sqrt{53}}{22}.$$

（四）历史上一些著名的连分数展式

1. 邦贝利（Bombelli）于 1572 年，用现代的符号来表示 $\sqrt{13}$，实质上他已经知道

$$\sqrt{13}=3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\ddots}}.$$

2. 卡塔尔迪（Cataldi）于 1613 年，把 $\sqrt{18}$ 的连分数表示成如下形式：

$$\sqrt{18}=4\cdot\ \&\ \frac{2}{8}\cdot$$
$$\&\ \frac{2}{8}\cdot$$
$$\&\ \frac{2}{8}\cdot$$
$$\ddots$$

或写成 $\sqrt{18}=4\cdot\ \&\ \frac{2}{8\cdot}\ \&\ \frac{2}{8\cdot}\ \&\ \frac{2}{8\cdot}\cdots$.

3. 布龙克尔（Brouncker）大约在 1658 年得到

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\ddots}}}}}.$$

在历史上，这个表达式与由瓦里斯（Wallis）在 1655 年给出的无穷乘积

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots}$$

密切相联系；这两个发现在 $\pi=3.14159\cdots$ 的历史上都占据重要的位置.

4. 欧拉（Euler）于 1737 年发现了含自然对数的底（$e=2.7182818284590\cdots=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$)的如下展式：

$$e-1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}}$$

$$=[1;\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 6,\ 1,\ 1,\ 8,\ \cdots].$$

$$\frac{e-1}{e+1}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\ddots}}}}.$$

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\ddots}}}}.$$

5. 兰伯特（Lambert）于1766年得到

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\cfrac{1}{\frac{2}{x}+\cfrac{1}{\frac{6}{x}+\cfrac{1}{\frac{10}{x}+\cfrac{1}{\frac{14}{x}+\ddots}}}}.$$

$$\tan x=\cfrac{1}{\frac{1}{x}-\cfrac{1}{\frac{3}{x}-\cfrac{1}{\frac{5}{x}-\cfrac{1}{\frac{7}{x}-\ddots}}}}.$$

6. 兰伯特于1770年得到

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\ddots}}}}$$

$$=[3;7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,1,84,2,\cdots].$$

与e的展式不同，$\pi=3.1415926536\cdots$的简单连分数展式似乎没有任何规则.

7. $\sqrt{a^2+b}=a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\ddots}}}$　$(a^2+b>0)$.