国家自然科学基金(40574009)
中国科学院百人计划　　　　资助出版
国家自然科学基金(40374030)

动力大地测量学中的地球自转理论

THE THEORY ON EARTH ROTATION IN DYNAMICAL GEODESY

张捍卫　许厚泽　柳林涛　著

中国科学技术出版社

国家自然科学基金（40574009）
中国科学院百人计划　　　　资助出版
国家自然科学基金（40374030）

动力大地测量学中的地球自转理论

THE THEORY ON EARTH ROTATION IN DYNAMICAL GEODESY

张捍卫 许厚泽 柳林涛 著

中国科学技术出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

动力大地测量学中的地球自转理论 / 张捍卫，许厚泽，柳林涛著. —北京：中国科学技术出版社，2006.6

ISBN 7-5046-4368-8

Ⅰ.动… Ⅱ.①张… ②许… ③柳… Ⅲ.地球自转—天体运行理论 Ⅳ.P183.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 050033 号

中国科学技术出版社出版

北京市海淀区中关村南大街 16 号　邮政编码：100081

电话：010-62103210　传真：010-62183872

http://www.kjpbooks.com.cn

科学普及出版社发行部发行

北京市迪鑫印刷厂印刷

*

开本：850 毫米×1168 毫米　1/32　印张：11.25　字数：200 千字

2006 年 6 月第 1 版　2006 年 6 月第 1 次印刷

印数：1—500 册　定价：45.00 元

内 容 摘 要

地球自转的精确测定是高精度天球参考系和地球参考系建立的理论基础，也是地球表面精密测绘和宇宙飞船跟踪所必需的参数。对它的研究无论是在理论上还是实用上都具有重要的科学价值。本书系统地论述了整体地球自转动力学的理论和方法。全书共分九章，内容包括地球自转理论的数学基础，引潮力和固体潮Love数的基本理论，地球重力场的基本知识，地球自转理论的基本概念以及刚体地球、弹性地球、液核地球和内核地球模型下的整体地球自转动力学的理论和方法。

本书可作为天体测量与天体力学、大地测量学和固体地球物理学等专业高年级学生、研究生的教学参考书，亦可供以上专业的科技人员从事与地球自转动力学有关的科学研究以及实际的数据处理工作时参考。

责任编辑 贾凤坡
封面设计 赵一东
责任校对 凌红霞 杨京华
责任印制 安利平

前 言

大地测量学是地球科学的重要分支，是测绘科学的基础性学科。而动力大地测量学是由大地测量学、地球物理学和天体测量与天体力学等学科交叉派生出来的边缘学科。其研究内容和目的是：利用近代空间大地测量和地球物理观测新技术，精确测定地球表面点的几何位置、地球重力场元素、地球自转各种轴在空间的位置和方向以及上述参数随时间的变化，并从动力学的观点研究地球动态变化的物理机制，进而为环境变迁和海平面变化的研究、地震火山等自然灾害的孕育预测、空间飞行器精密定轨和制导以及地下资源的勘探等提供服务。

改革开放以来，我国在动力大地测量学的各个研究领域中取得了辉煌成就。尤其是在固体潮理论和非潮汐重力、地极移动和自转速率变化、大地水准面和海平面变化、板块运动和地壳形变、地球内部物质运动及其与地表变化的关系等领域的研究已在国际学术界占有了一席之地，并在生态环境、灾害预测预报等关系国计民生的研究中起到了一定作用。目前，随着国际大地测量协会“亚太空间动力学研究计划”、国家攀登计划项目“现代地壳运动和地球动力学研究”、国家大型科学工程重大项目“中国地壳运动观测网络”等项目的启动实施，动力大地测量学研究必将取得更加快速的进展。

为适应大地测量学学科和技术的发展，我国很多高等院校都为大地测量专业的研究生和本科生开设了《地球自转》或与动力大地测量学有关的其他课程。本书就是为满足这方面的教学和科研需要而撰写的。全书共分 9 章。第一章简要介绍了地球自转理论中的一些数学基础，以便没有这一方面知识的读者进一步阅读其后的内容；第二章主要介绍引潮力、引潮力位的基本概念以及固体潮 Love 数的基本理论和数值结果；第三章介绍在地球自转动力学中所用到的一些地球重力场问题，包括引力位和重力位的

表达式、大地水准面的基本概念以及地球自转、引潮力和各种负载力对地球重力场的影响等；第四章介绍了地球自转理论中的若干基本概念，整体地球自转的动力学方程和运动学方程，天球参考轴［地球自转轴、形状轴、角动量轴、Tisserand 轴、天球历书轴（CEP）和天球中间轴（CIP）］的定义和描述，任意一个天球参考轴与地球自转轴之间的理论关系以及岁差章动力矩等；第五章到第九章分别针对刚体地球、弹性地球、液核地球和内核地球模型，介绍了整体地球自转动力学的一般理论和方法，并建立了地球自转的广义动力学方程，或者称为极移与章动的联合动力学方程，顾及了高阶岁差章动力矩对地球自转的影响等。

本书是我们在多年从事动力大地测量学和天文地球动力学的教学和研究工作的基础上扩充、整理而成的。本书的出版得到了中国科学院测量与地球物理研究所、中国科学院国家天文台云南天文台、徐州师范大学、解放军信息工程大学测绘学院和河南理工大学等单位的大力支持和帮助；中国科学技术出版社的贾凤坡、王谅儒编审对本书的出版给予了自始至终的帮助，仔细地阅读了稿件并提出了很多修改意见；解放军信息工程大学测绘学院的张传定教授为本书的编写提供了资料，实际上第三章第一节和第二节完全就是他的工作。在此一并表示衷心的感谢。

本书的出版除了得到国家自然科学基金和中国科学院百人计划的资助外，还得到了中国科学院知识创新工程重要方向项目（KZCX3-SW-132）和云南省自然科学基金（2005A0010R）等项目的资助。

由于我们水平有限，错误和不足之处在所难免。如发现不妥、错误之处或有任何建议，请与第一作者联系（email: zhanwei800@163.com），我们将不胜感激。

张捍卫 许厚泽 柳林涛

2005 年 12 月 12 日

目　录

第一章　地球自转理论的数学基础

从 20 世纪 60 年代以来，随着电子工程、航天工程、控制工程、系统工程及其他学科领域的巨大进展，促使了测绘工程技术的飞跃发展。众所周知，这些科学技术研究的发展与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相关，相辅相成。尤其近年来发展起来的边缘学科，例如动力大地测量学、空间大地测量学和天文地球动力学，更是与数学紧密结合。

本章包括三部分内容：正交多项式（函数）、曲线坐标系和标量、矢量球函数，它们在数学物理方程、特殊函数和数值分析等一些经典的数学分支中有着重要的地位，同时在近代的测绘工程技术领域中起到了非常重要的作用。本章只是列出了相关问题的概念、性质和应用，具体的理论证明没有给出，如读者对此需要进一步了解，可以阅读有关的书籍。

1.1 正交（函数）多项式的基本性质

所谓正交就是垂直的意思，它是数学中的一个重要的基本概念。我们知道，两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 正交的充分与必要条件是它们的内积等于零，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \tag{1.1.1}$$

如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是三维空间中的两个矢量，它们在直角坐标系中的坐标分别是

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)\text{，}\quad \boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3) \tag{1.1.2}$$

则（1.1.1）式即为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0 \tag{1.1.3}$$

如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是 n 维空间中的两个矢量，则式（1.1.3）应改写为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=0 \tag{1.1.4}$$

式（1.1.4）是 n 维矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 正交的充分必要条件。

将式（1.1.4）推广到函数的情形，则很自然地，可将两个定义在区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的正交性定义为

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0 \tag{1.1.5}$$

这里区间 $[a,b]$ 称之为正交区间。有时，由于实际问题的需要，可将正交性定义式（1.1.5）拓展为加权正交，即

$$\int_a^b f(x)g(x)h(x)\mathrm{d}x=0 \tag{1.1.6}$$

其中函数 $h(x)$ 为给定的函数，称为权函数。

正交性的主要用处是利用一组正交的基矢量或基函数，可以表示任意的矢量或函数。例如，对于任意的 n 维矢量 $\boldsymbol{a}$，只要预先找到 n 维矢量空间中一组相互正交的基矢量 $\{\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\cdots,\boldsymbol{i}_n\}$，当然还可以假定它们都是单位矢量：$\boldsymbol{i}_k\cdot\boldsymbol{i}_k=1$（也称 $\boldsymbol{i}_k$ 是归一化的矢量）。那么 n 维矢量 $\boldsymbol{a}$ 可表示为

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}_1+a_2\boldsymbol{i}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{i}_n \tag{1.1.7}$$

其中 $a_k=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}_k$，这是利用诸 $\boldsymbol{i}_k$ 的正交性而得到的。

下面给出正交函数或多项式的一般定义。

正交函数（多项式）定义：函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足 $\int_a^b h(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$，则称函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上以权函数 $h(x)$ 正交。例如傅立叶级数

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right\} \tag{1.1.8}$$

在区间$[-\pi,\pi]$上满足式（1.1.5），因此它构成了一个正交的函数系，而且其中的每一个在区间$[-\pi,\pi]$上自乘的积分等于 1，所以式（1.1.8）还是归一化的正交系。任一定义在区间$[-\pi,\pi]$上的函数$f(x)$可以展开为傅立叶级数（当然，为保证级数的收敛性，还要求$f(x)$满足一定的条件），即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right] \tag{1.1.9}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x,\ (n=0,1,2,\cdots) \tag{1.1.10}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x,\ (n=1,2,\cdots) \tag{1.1.11}$$

此时，正交系式（1.1.8）可以看成是“函数空间”的基函数，它相当于n维矢量空间的基矢量$\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}$；而a_n（$n=0,1,2,\cdots$）和b_n（$n=1,2,3,\cdots$）则可理解为函数$f(x)$在正交系（1.1.8）下的“坐标”。这样，利用函数系（1.1.8）的正交性，就将一个函数表示成（1.1.9）的形式。不过，这里的基函数是无穷多个，而不是有限个，于是“函数空间”也可理解为一种“无穷维”空间。

如果函数序列$\{\phi_n(x)\ |(n=1,2,3,\cdots)\}$中任何有限个函数总是线性独立的，则称整个函数序列是线性独立的。任一线性独立的函数系都可以通过施密特正交化步骤，使之正交化。对于权函数，假定它在正交区间$[a,b]$上为非负、可积且积分值为正

$$0<\int_a^b h(x)\mathrm{d}x<\infty \tag{1.1.12}$$

如果区间(a,b)为无穷区间，则要求下列积分绝对收敛

$$h_n = \int_a^b x^n h(x)\mathrm{d}x \quad ,(n=0,1,2,\cdots) \tag{1.1.13}$$

其中h_n称为权函数$h(x)$的n次矩。

设给定区间$[a,b]$及满足式（1.1.12）或式（1.1.13）条件的权函数$h(x)$，如果多项式系列｛$\mathrm{P}_0(x)$，$\mathrm{P}_1(x)$，…，$\mathrm{P}_n(x)$｝满足

$$\int_a^b \mathrm{P}_n(x)\mathrm{P}_m(x)h(x)\mathrm{d}x = 0 \quad ,（m \neq n） \tag{1.1.14}$$

则称之为以$h(x)$为权函数加权正交。当$m=n$时，上式左端之积分值的平方根（取正值）称为多项式$\mathrm{P}_n(x)$的加权范数，记为$\|\mathrm{P}_n\|$

$$\|\mathrm{P}_n\| = \sqrt{\int_a^b \left(\mathrm{P}_n(x)\right)^2 h(x)\mathrm{d}x} \tag{1.1.15}$$

如果对于每一个$\mathrm{P}_n(x)$，均有

$$\|\mathrm{P}_n\| = 1 \tag{1.1.16}$$

则称多项式序列$\{\mathrm{P}_n(x)\}$为归一化序列。任一多项式序列$\{\mathrm{P}_n(x)\}$均可成为归一化序列，因为如果$\|\mathrm{P}_n\| \neq 1$，则

$$\hat{\mathrm{P}}_n(x) = \frac{\mathrm{P}_n(x)}{\|\mathrm{P}_n\|} \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{1.1.17}$$

便是归一化序列。如果$\{\mathrm{P}_n(x)\}$是正交序列，则其归一化序列$\{\hat{\mathrm{P}}_n(x)\}$仍然是正交序列。

上述这些名词及简单性质，不仅对多项式而言，对于一般的函数也是适用的。现在需要指出的是，在给定的区间、给定的权函数下，对应的正交多项式（函数）是存在且唯一的，即有以下

一些定理成立：

定理 1.1.1　对于在区间(a,b)上给定的任一权函数$h(x)$，存在唯一的多项式序列$\{\mathrm{P}_n(x)\}$，其最高次系数均为正，且满足加权归一化正交条件

$$\int_a^b h(x)\mathrm{P}_n(x)\mathrm{P}_m(x)\mathrm{d}x=\delta_{n,m}=\begin{cases}1, & n=m\\0, & n\neq m\end{cases}\tag{1.1.18}$$

对于正交多项式的递推公式，有以下定理描述：

定理 1.1.2　对于任意三个相邻的归一化正交多项式有以下递推公式

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}\mathrm{P}_{n+1}(x)=(x-c_n)\mathrm{P}_n(x)-\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\mathrm{P}_{n-1}(x)\tag{1.1.19}$$

其中μ_n为$\mathrm{P}_n(x)$的最高次系数，c_n为某一与n有关的系数。对于正交多项式的一般表达式，有以下定理描述：

定理 1.1.3　当$n\geqslant 1$时，正交多项式$\mathrm{P}_n(x)$可通过权函数$h(x)$的各阶矩表示

$$\mathrm{P}_n(x)=\begin{vmatrix}h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_n\\ h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_{n+1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ h_{n-1} & h_n & h_{n+1} & \cdots & h_{2n-1}\\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n\end{vmatrix}\tag{1.1.20}$$

设$f(x)$在区间$[a,b]$上有定义，且加权平方可积，那么函数$f(x)$可以按照以$h(x)$为权函数的归一化正交多项式序列$\{\mathrm{P}_n(x)\ |(n=0,1,2,3,\cdots)\}$展开成傅立叶级数

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n\mathrm{P}_n(x),\quad a_n=\int_a^b h(x)f(x)\mathrm{P}_n(x)\mathrm{d}x\tag{1.1.21}$$

关于式（1.1.21）的收敛性由以下定理描述：

定理 1.1.4 如果区间$[a,b]$为有限区间，且函数

$$\phi(x,t)=\frac{f(x)-f(t)}{x-t} \tag{1.1.22}$$

在x固定（$a\leqslant x\leqslant b$），$\phi(x)$以权函数$h(x)$加权平方可积，而归一化正交多项式序列$\{\mathrm{P}_n(x)\}$在x点有界时，则级数式（1.1.21）在x点收敛于$f(x)$，即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\mathrm{P}_n(x),\ \ a_n=\int_a^b h(x)f(x)\mathrm{P}_n(x)\mathrm{d}x \tag{1.1.23}$$

1.2 经典正交函数系（多项式）

本节我们给出了几种经典的正交多项式，包括切比雪夫多项式、勒让德多项式、厄密特多项式、拉盖尔多项式、雅可比多项式和缔合勒让德多项式。这些多项式有着较长的研究历史。最早是勒让德于 1785 年所给出的勒让德多项式，其他多项式相继在18、19 世纪为人们所研究。它们大都与求解某些数学物理方程的研究有关，而这些微分方程都来源于当时的工程实际问题。由于研究得比较深入，因而在理论上比较成熟。本节只是给出了几种经典的正交多项式（函数）的定义、性质和具体应用方法，有关的理论推导和证明将略去，读者如感兴趣，请参阅有关文献。

正交多项式通常有三种形式：

（1）标准形式，常常记之为$\mathrm{P}_n(x)$，$\mathrm{T}_n(x)$等。这是常用的方便的形式，它的最高次系数记为μ_n。

（2）最高次系数为 1 的形式，常记为$\tilde{\mathrm{P}}_n(x)$，$\tilde{\mathrm{T}}_n(x)$等。显

然有 $\tilde{\mathrm{P}}_n(x)=\dfrac{\mathrm{P}_n(x)}{\mu_n}$

（3）归一化形式，即加权范数等于 1，一般记为 $\hat{\mathrm{P}}_n(x)$，$\hat{\mathrm{T}}_n(x)$ 等。显然有 $\hat{\mathrm{P}}_n(x)=\dfrac{\mathrm{P}_n(x)}{\|\mathrm{P}_n(x)\|}$

1.2.1 切比雪夫多项式

定义 根据恒等式 $\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos\theta\cos n\theta$，令 $\theta=\arccos(x)$，则对于函数

$$\mathrm{T}_n(x)=\cos\left[n\cdot\arccos(x)\right],\quad x\in[-1,1],\quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{1.2.1}$$

有递推关系

$$\mathrm{T}_{n+1}(x)=2x\mathrm{T}_n(x)-\mathrm{T}_{n-1}(x) \tag{1.2.2}$$

则由式（1.2.1）和式（1.2.2）定义的多项式称之为切比雪夫多项式。因为 $\mathrm{T}_0(x)=1$，$\mathrm{T}_1(x)=x$，则由递推公式（1.2.2）可依次写出任意阶的切比雪夫多项式的表达式。

正交性 切比雪夫多项式在区间 $x\in[-1,1]$ 上以 $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 为权函数加权正交，即

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{T}_n(x)\mathrm{T}_m(x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}0, & n\neq m\\ \dfrac{\pi}{2}, & n=m\neq 0\\ \pi, & n=m=0\end{cases} \tag{1.2.3}$$

并且切比雪夫多项式满足以下微分方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+n^2y=0 \tag{1.2.4}$$