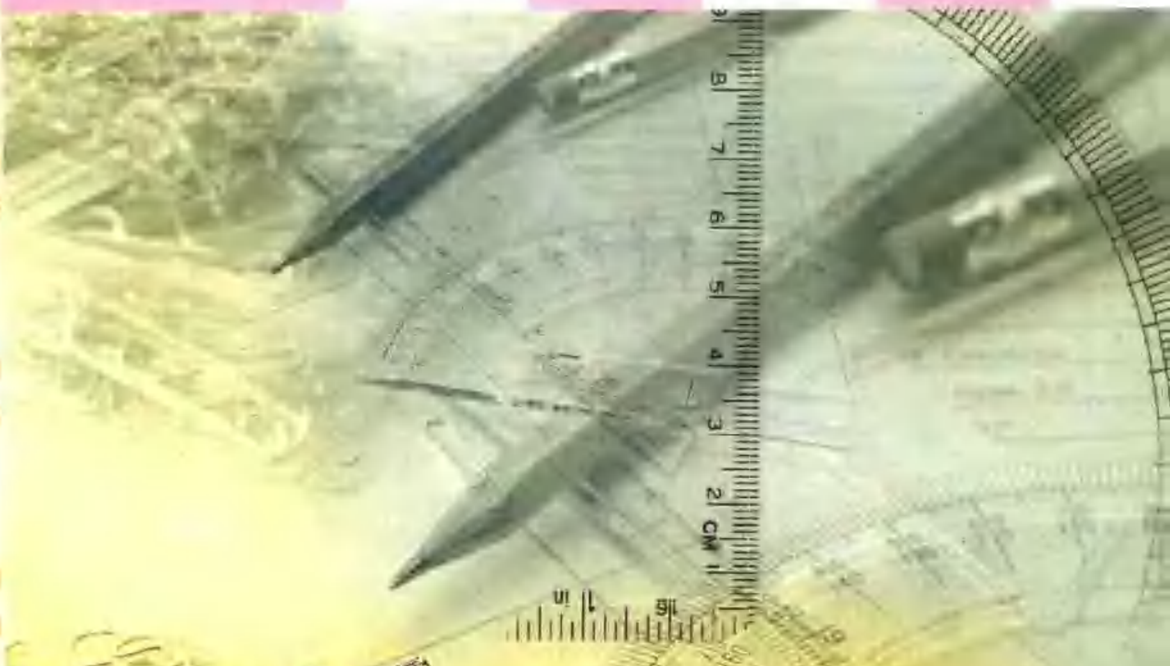
高中导学与探究丛书

数学

第一册（下）



四川出版集团

四川民族出版社

高中导学与探究丛书

数　　学

第一册（下）

（必　　修）

四川出版集团
四川民族出版社

高中导学与探究丛书
数　学　第一册（下）
（必　修）

责任编辑	张　俊
封面设计	康颂工作室
技术设计	唐学兵
出　　版	四川出版集团 四川民族出版社
地　　址	成都市三洞桥路12号
邮政编码	610031
联系电话	（028）87734151　87734157
发　　行	四川新华文轩连锁股份有限公司
印　　刷	德阳日报印刷厂
成品尺寸	184mm×260mm
印　　张	8.25
字　　数	185千
版　　次	2005年12月第1版
印　　次	2005年12月第1次印刷
印　　数	1～11609册
书　　号	ISBN 7-5409-3204-X/G·1695
定　　价	8.25元

前　言

《高中导学与探究丛书》是在参照新的课程标准和教学理念的基础上，按照现行各学科教学大纲和教材编写。丛书包括语文、数学、英语、物理、化学、生物、政治、历史、地理九个学科。

本丛书数学分册各章分为三个部分，第一部分为目标聚焦，包括各章的学习目标、重点及难点解析，旨在引导同学们对本章内容从整体上有一个宏观的把握映象。第二部分为分节学习，其内容包括导学提要和题海冲浪两大部分，其中导学提要分为内容导读、要点解析、案例剖析、思维拓展、方法提炼五部分，意在通过对教材的学习和探究，开启心智，理解和掌握教材知识的要领，再通过练习，学以致用，以利于同学们扎实地掌握基础知识和基本技能、强化同学们对数学思想和方法的理解及运用，解决实际问题，其中案例剖析无详细解答过程，但留有足够的空间，意在方便师生在教学中交流。第三部分为学习回顾，目的在于倡导一种个性化的学习方式。它要求同学们根据自己的认知能力和个性特长，用自己的眼光来观察，用自己的头脑来判断，用自己的心灵来感悟，用自己的语言来表述。其最终目的是使同学们掌握知识、学到本领。

建议同学们使用这套从书时不要只把眼光盯在那些练习题上面，而应统观全书，领略导学与探究的良苦用意。

本册书由吴晓东、何建明、杨远金、李仕伟、唐俊编写，黄勇任主编并统稿。

由于本书编写时间紧迫，书中存在的不足或错误，欢迎批评指正。

《高中导学与探究》编委会

2005 年 12 月

目　录

第四章

三角函数

〖目标聚焦〗

1. 理解任意角的概念、弧度的意义；能正确进行弧度与角度的换算.

2. 掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义. 并会利用与单位圆有关的三角函数线表示正弦、余弦和正切. 了解任意角的余切、正割、余割的定义. 掌握同角三角函数的基本关系式如：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$，$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$ 等，掌握正、余弦的诱导公式.

3. 掌握两角和与差的正弦、余弦、正切公式，掌握二倍角的正弦、余弦、正切公式，通过公式的推导，了解它们的内在联系，从而培养逻辑推理能力.

4. 能正确运用三角公式，进行简单三角函数式的化简，求值及恒等式证明.

5. 会用与单位圆有关的三角函数线画出正弦函数，余弦函数的图象，并在此基础上由诱导公式画出余弦函数的图象；了解周期函数与最小正周期的意义；了解奇偶性的意义；并通过它们的图象理解正弦函数、余弦函数的性质以及简化这些函数图象的绘制过程；会用“五点法”画正弦函数、余弦函数和函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的简图，准确理解 A、ω，φ 的物理意义.

6. 会由已知三角函数值求角，并会用符号 $\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$ 表示.

本章重点是：任意角的三角函数的概念，同角三角函数间的关系式，诱导公式及其运用，正弦的和角公式，正弦曲线的画法和正弦函数的性质.

难点是：弧度制的概念、综合运用本章公式进行简单三角函数式的化简及恒等式的证明，周期函数的概念，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与正弦曲线的关系.

本章充分体现了符号与变元、集合与对应、数形结合等基本数学思想在研究三角函数时所起的作用；在式子和图形的变化中，充分利用了分析、探索、化归、类比、平移、伸缩这些基本方法，为学生学习数学理论和应用数学知识提供了一个新的领域.

4.1　角的概念的推广

〖导学提要〗

一、内容导读

1. 角的概念推广以后，按旋转方向可以分为____________，按角的终边位置可以分为____________.

2. 所有与 α 角的终边相同的角，以及连同 α 角在内的角（而且只有这样的角）可以用式子____________表示；在直角坐标系中，终边在 x 轴上的角的集合为：____________；终边在 y 轴上的角的集合为：__________；终边在坐标轴上的角的集合为：__________.

二、要点解析

1. 如何正确理解正角、负角、零角的概念

由定义可知关键是抓住终边的旋转方向是逆时针、顺时针还是没有转动.

2. 怎样理解象限角，坐标轴上的角

当角的顶点与坐标原点重合，角的终边与 x 轴的非负半轴重合，角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限角；若角的终边落在坐标轴上，则称此角为坐标轴上的角.

3. 怎样理解终边相同的角

（1）α 为任意角；

（2）$k\cdot360°$与 α 之间是“+”号，而 $k\cdot360°-\alpha$ 可理解为 $k\cdot360°+(-\alpha)$；

（3）相等的角终边一定相同，终边相同的角不一定相等，终边相同的角有无数个，它们相差 360°的整数倍；

（4）$k\in\mathbf{Z}$ 这一条件不可少.

4. 如何准确区分锐角，0°～90°的角，小于 90°的角，第一象限的角.

锐角是 $0°<\alpha<90°$ 的角；0°～90°的角是 $0°\leqslant\alpha<90°$，小于 90°的角是 $\alpha<90°$ 的角；第一象限的角是 $\{\alpha\mid k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+90°,\ k\in\mathbf{Z}\}$ 所表示的角.

（1）要区分开易混淆的概念，如锐角一定是第一象限的角，而第一象限的角不全是锐角，如 −330°，730°都是第一象限的角，但它们都不是锐角.

（2）小于 90°的角是 $\{\alpha\mid\alpha<90°\}$ 显然它包括锐角、零角、负角.

三、案例剖析

例 1　已知角 $\alpha=-1910°$.

（1）把 α 写成 $\beta+k\cdot360°$（$k\in\mathbf{Z}$，$0°\leqslant\beta\leqslant360°$）的形式，并指出它是第几象限的角?

（2）求 θ，使 θ 与角 α 的终边相同，且 $-720°\leqslant\theta\leqslant0°$.

例2 如图4－1，角 α，β 分别是终边落在 OM 和 ON 位置上的两个角，且 $\alpha=30°$、$\beta=300°$，写出：

(1) 终边在阴影（含边界）部分时所有角的集合；

(2) 终边在阴影部分，且在区间 [0°，360°] 上所有角的集合；

(3) 始边在 OM 位置，终边在 ON 位置时的所有角的集合.

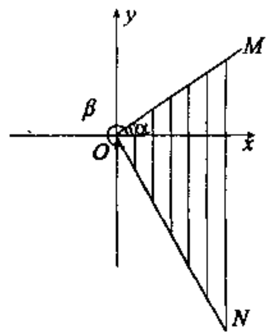


图4－1

例3 在平面直角坐标系中，若角 α 与角 β 的始边相同，终边互相垂直，求 α、β 之间的关系.

例4 不大于180°的正角，这个角的7倍角的终边与这个角的终边重合，求这个角.

四、思维拓展

例5 若角 α 的终边过点 $P(-1,\ -\sqrt{3})$，试写出角 α 的集合 β 并求出 β 中绝对值最小的角和最大的负角.

例6 已知 α 是第二象限角，

问：(1) $\frac{\alpha}{2}$是第几象限的角？　(2) 2α 是第几象限的角？

五、方法提炼

1. 用数形结合思想解决角的表达方式.
2. 利用方程思想求角.
3. 用分类讨论思想研究角的位置情况.
4. 加强对角的概念的理解，弄清它们的区别与联系.

题海冲浪

一、基础训练

1. 把 $-1485°$转化为 $\alpha+k\cdot360°$，$(0°\leq\alpha<360°,\ k\in\mathbf{Z})$ 的形式是(　　).

   A. $45°-4\times360°$　　B. $-45°-4\times360°$

   C. $-45°-5\times360°$　　D. $315°-5\times360°$

2. 若 α 是第四象限的角，则 $180°-\alpha$ 是(　　).

A. 第一象限角　　B. 第二象限角　　C. 第三象限角　　D. 第四象限角

3. 下列各命题正确的是(　　).

A. 终边相同的角一定相等　　B. 第一象限的角是锐角

C. 锐角都是第一象限角　　D. 小于90°的角都是锐角

4. 若α是锐角，则$\alpha+k\cdot180°$（$k\in\mathbf{Z}$）所在象限是(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第一、三象限　　D. 第一、四象限

5. 如果集合$M=\{x\mid x=45°+k\cdot90°,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=90°+k\cdot45°,\ k\in\mathbf{Z}\}$，则(　　).

A. $M=N$　　B. $M\supseteq N$　　C. $M\subseteq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

6. 在0°到360°之间且与1625°角终边相同的角为__________.

7. 设$A=\{\alpha\mid \alpha=45°+k\cdot360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$；

$B=\{\alpha\mid \alpha=225°+k\cdot360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$；

$C=\{\alpha\mid \alpha=45°+k\cdot180°,\ k\in\mathbf{Z}\}$；

$D=\{\alpha\mid \alpha=-135°+k\cdot360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$；

$E=\{\alpha\mid \alpha=45°+k\cdot360°$或$\alpha=225°+k\cdot360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

则相等的集合为____________ _ __________.

8. 若将时钟拨慢5分钟，则分针转了__________度，时针转了__________度.

9. 求与$-1692°$角终边相同的最大负角.

10. 如图4-2所示，将终边落在阴影部分的角（包括边界）的集合表示出来.

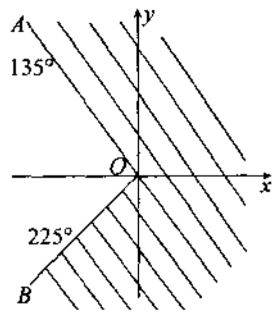


图4-2

二、能力提高

11. 若角 α 是第一象限角，试判断$\frac{\alpha}{3}$角所在象限.

12. 如图 4－3：圆周上点 A 依逆时针方向作匀速圆周运动，已知 A 点 1 分钟转过 θ（$0°<\theta<180°$），2 分钟到达第三象限，14 分钟回到原来位置，求 θ.

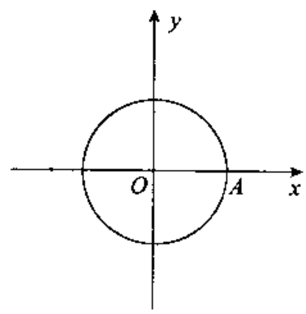


图 4－3

13. 集合 $A=\left\{\alpha \middle| \alpha=\frac{3}{4}k\times180°,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，$B=\left\{\beta \middle| \beta=\frac{5}{6}k\times180°,\ k\in\mathbf{Z},\ -10\leqslant k\leqslant10\right\}$. 求与 $A\cap B$ 中的角终边相同角的集合 C.

4.2 弧度制

〖导学提要〗

一、内容导读

1. 等于____________的圆弧所对的圆心角叫1弧度的角.
2. $1°=$____________弧度；____________$=1$弧度；
   1弧度$=$____________度$=$____________$=$____________.
3. 半径为r，中心角为α弧度的扇形的弧长为$l=$____________；
   面积为$S=$____________$=$____________.
4. 用____________作单位来度量角的单位制叫做角度制；
   用____________作单位来度量角的单位制叫做弧度制.

二、要点解析

1. 怎样理解弧度制

(1) 长度等于半径的弧长所对的圆心角叫做1弧度的角；

(2) 当α的大小一定时，不论这个角所对圆弧的半径是多长，弧长与半径的比值总是一个定值，它只与圆心角大小有关，所以我们可以用弧长与半径的比值来度量角的大小.

2. 如何理解弧度数

正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是零.

角α的弧度数的绝对值$|\alpha|=\frac{l}{r}$.

3. 弧度数与角度数的比较

(1) 用弧度为单位表示角的大小时，“弧度”两个字可省略不写，但是用度（°）为单位表示角度时，度（°）就不能省去；

(2) 在弧长公式与扇形面积公式的表达上，弧度制下的公式远比角度制下的公式简单，运用起来方便.

4. 在用弧度表示角时，不能与角度制混用

例如：$\alpha=2k\pi+30°$ $(k\in\mathbf{Z})$，$\beta=k\cdot360°+\frac{3\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$，都是不正确的.

三、案例剖析

例1 一扇形的周长为20 cm，当扇形的圆心角等于多少弧度时，这个扇形的面积最大.

例2 写出顶点在原点，始边重合于 x 轴正半轴，终边落在坐标轴上的角 α 的集合.

例3 设集合 $A=\left\{x \left| k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$， 集合 $B=\{x \mid 6+x-x^2\geqslant 0\}$. 求 $A\cap B$.

例4 如图4-4，扇形 AOB 的面积是4 cm²，周长是10 cm，求扇形 AOB 的中心角的弧度数和弦 AB 的长.

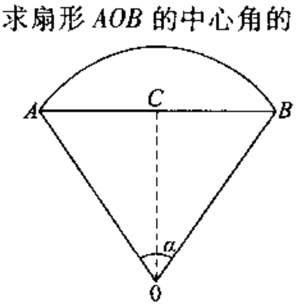


图4-4

四、思维拓展

例5 若角 θ 和角 α 的终边互为反向延长线，则有(　　).

A. $\theta=-\alpha$　　　　B. $\theta=\alpha-2k\pi \quad (k\in\mathbf{Z})$

C. $\theta=\pi+\alpha$　　　　D. $\theta=\alpha+(2k\pi+1)\pi \quad (k\in\mathbf{Z})$

例6 已知边长为 $10\sqrt{3}$ cm 的正三角形内有一内切圆，求该圆内 $15°$ 的圆心角所对的弧长，扇形的周长及扇形的面积.

五、方法提炼

1. 利用函数方程思想解决扇形中的有关计算问题.
2. 能根据需要对角的两种制式进行转化.
3. 借助数轴解决区域与区间的求解问题.
4. 注重数形结合、加深对弧度意义的理解和应用.

题海冲浪

一、基础训练

1. 将分针拨慢10分，则分针转过的弧度数是(　　).

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $-\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $-\frac{\pi}{6}$

2. 若集合 $P=\left\{x \middle| x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，集合 $M=\left\{x \middle| x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，则有(　　).

A. $P=M$　　B. $P\supseteq M$　　C. $P\subseteq M$　　D. $P\cap M=\varnothing$

3. 已知2弧度的圆心角所对的弦长为2，那么这个圆心角所对弧长为(　　).

A. 2　　B. sin2　　C. $\frac{2}{\sin 1}$　　D. 2sin1

4. 如果弓形的弧长所对圆心角为$\frac{\pi}{3}$，弧长为2 cm，则该弓形的面积是________.

5. 把$-1125°$化成$\alpha+2k\pi$（$0\leqslant\alpha<2\pi$，$k\in\mathbf{Z}$）的形式是____________.

6. 如果角α的终边经过点$P(a,\ a)$（其中a小于0），则用弧度制表示角α的集合是____________.

7. (1) $\frac{5\pi}{12}$的角度数为____________；

(2) $-330°$的弧度数为____________.

8. 在直径为10 cm的轮上有一长为6 cm的弦，P是弦的中点，轮子以每秒5弧度的速度旋转，则经过5秒后点P转过的弧长是____________.

9. 已知集合$A=\{\alpha\mid\alpha=4k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{\alpha\mid\alpha=2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{\alpha\mid\alpha=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$D=\left\{\alpha \middle| \alpha=\sqrt{\frac{k\pi}{2}},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$. 试判断$A$、$B$、$C$、$D$四个集合间的包含关系.

10. 已知角 α 的终边与角$\frac{\pi}{6}$的终边关于直线 $y=x$ 对称，且 $\alpha\in(-4\pi, 4\pi)$，求 α.

二、能力提高

11. 已知扇形的面积为 S，当扇形的中心角为多少弧度时，扇形的周长最小？并求出此最小值.

12. 自行车大轮有 48 齿，小轮有 20 齿，当大轮转一周时，小轮转过的角度是多少？等于多少弧度？

13. 一般的时钟自零时刻起到分针与时针第一次重合，分针所转过角的弧度数是多少？

4.3　任意角的三角函数

〖导学提要〗

一、内容导读

1. 设$P(x, y)$是角α终边上任一点，且$|PO|=r=\sqrt{x^2+y^2}>0$，
则有：$\sin\alpha=$________，$\cos\alpha=$________，$\tan\alpha=$________，
$\csc\alpha=$________，$\sec\alpha=$________，$\cot\alpha=$________.

2. 我们把________________叫做单位圆.

3. 三角函数值的符号

象限 函数	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
$\sin\alpha$，$\csc\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$，$\sec\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$，$\cot\alpha$	+	−	+	−

4. 诱导公式（一）
$\sin(\alpha+k\cdot 360°)=$______，$\cos(\alpha+k\cdot 360°)=$______，$\tan(\alpha+k\cdot 360°)=$______.

二、要点解析

1. 怎样理解任意三角函数的定义

（1）三角函数它们都是以角为自变量，以比值为函数值的函数.

（2）三角函数值是比值，是一个实数，这个实数的大小与点$P(x, y)$在终边上的位置无关，而是由α的终边位置所决定，对于确定的角α，其终边的位置也唯一确定.

2. 怎样理解正弦线、余弦线、正切线

（1）设任意角α的终边与单位圆相交于点$P(x, y)$，当$r=1$时，有$\sin\alpha=y=MP$，$\cos\alpha=x=OM$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{MP}{OM}=\frac{AT}{OA}=AT$，当有向线段$MP$、$OM$、$AT$与坐标轴正方向一致时为正，相反时为负.

（2）用这些特定的有向线段的数值可以用来表示三角函数值，称它们为三角函数线.

（3）三角函数线的主要作用是解三角不等式，求函数定义域及比较大小，同时它们也是学习三角函数图象与性质的基础和工具.

3. 三角函数的定义域

（1）定义域是在函数自变量为弧度制时所得到的.

（2）对于正切、正割函数的定义域可写成$\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

（3）对于余切、余割函数的定义域可写成$(k\pi, k\pi+\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$；

4. 三角函数值的符号是根据三角函数定义及各象限内坐标符号导出的，要求熟记.