中等专业学校試用教材

工业性质专业适用

高等数学

GAODENG SHUXUE

下 册

人民教育出版社

这一套中等专业学校（工业性质专业）試用教材，是根据当前教学改革的精神，結合目前阶段初中数学基础逐步过渡的具体情况而編写的。共分四种，代数、三角、立体几何及高等数学。

本书（高等数学）分上、下册出版，下册内容包括级数，二阶微分方程、二元函数及其微分法、重积分，曲綫积分等五章。为了照顾某些专业的不同需要，对书中（标有＊号）的章节，可根据具体情况，考虑精简或删除。

简装本說明

目前 850×1168 毫米規格紙張較少，本书暫以 787×1092 毫米規格紙張印刷，定价相应减少20%。希鉴諒。

中等专业学校試用教材

工业性质专业适用

高等数学

（下册）

中等专业学校数学編写组編

人民教育出版社出版 高等学校教材編輯部 北京宣武門内承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第2号）

中华书局上海印刷厂印刷

新华书店上海发行所发行

各地新华书店經售

統一书号 13010·892 开本 787×1092 1/32 印張 5 13/16

字数 144,000 印数 50,001—100,000 定价（3）平 0.40

1960年11月第1版 1961年3月上海第2次印刷

目 录

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$
$$=\sum_{n=0}^{n}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)\text{ ①},\tag{3}$$

而 $$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c_1)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\quad(a<c_1<x)。$$

(3)式叫在 a 点处的**台劳公式**，$\sum\limits_{n=0}^{n}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ 叫 $(x-a)$ 的 n 次**台劳多项式**，$R_n(x)$ 叫**余项**。

当 $a=0$ 时，即得在原点的台劳公式②为

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$
$$=\sum_{n=0}^{n}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)。\tag{4}$$

而 $$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\xi<x)$$

或 $$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(\xi=\theta x,\ 0<\theta<1)。$$

其中 $\sum\limits_{n=0}^{n}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 叫 x 的 n 次台劳多项式。若函数 $f(x)$ 在 a 点或原点处具有各阶导数，则可写出 $f(x)$ 的台劳公式［一般常用(4)式］。

例 1. $f(x)=e^x$。

因为 $$f(x)=e^x,\ f'(x)=e^x,\ \cdots,\ f^{(n)}(x)=e^x,$$
$$f(0)=1,\ f'(0)=1,\ \cdots,\ f^{(n)}(0)=1,$$

于是得

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x),\tag{5}$$

---

① 这里，我们引入了 $f^{(0)}(a)=f(a)$，一般地记 $f(x)=f^{(0)}(x)$ 即函数为本身的零阶导数。

② 常叫马克劳林公式。

而
$$R_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1)。$$

如果用台劳多项式来逼近 e^x，即

$$e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!},$$

它的误差

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leqslant\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}|x|^{n+1}。$$

例 2. $f(x)=\sin x$。

因为
$$f(x)=\sin x,\ f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,$$
$$f'''(x)=-\cos x,\ f^{(4)}(x)=\sin x,\ \cdots,$$

可得
$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\quad(n=0,1,2,\cdots)。$$

由

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,$$
$$f'''(0)=-1,\quad f^{(4)}(0)=0,\quad\cdots$$

得
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$
$$+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x)\quad(m=1,2,\cdots),\quad(6)$$

而
$$R_{2m}(x)=\frac{f^{(2m+1)}(\theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$
$$=(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\cos\theta x\quad(0<\theta<1)。$$

如果用台劳多项式来逼近 $\sin x$，得

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!},$$

则误差

$$|R_{2m}(x)|\leqslant\frac{1}{(2m+1)!}|x|^{2m+1}\quad(\because|\cos\theta x|<1)。$$

同样可得 $\cos x$，$\ln(1+x)$ 和 $(1+x)^m$ 的台劳公式。

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}+R_{2m-1}(x), \quad (7)$$

而 $$R_{2m-1}(x)=(-1)^m\cos\theta x\cdot\frac{x^{2m}}{(2m)!}\quad(0<\theta<1)。$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+R_n(x), \quad (8)$$

而 $$R_n(x)=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}。$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+R_n(x), \quad (9)$$

而 $$R_n(x)=\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{m-n-1}x^{n+1}。$$

上面是五个基本的台劳展开式。

利用上述公式可計算函数的近似値，同时，估計出它的誤差。例如由(5)式当 $x=1$ 时有

$$e\approx1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}, \quad (10)$$

誤差 $$R_n=\frac{e^\theta}{(n+1)!}\leqslant\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!},$$

取 $n=7$，$R_7<\frac{3}{8!}<\frac{1}{10^4}$，即取八項計算可得 $e\approx2.7182$ 准确至小数点后四位(各項在計算时可取至小数点后五位)。

上面計算 e 时可看出 n 越大 R_n 就越小，也就是在(10)式中右端項数越多就越接近 e 的眞值。当 n 无限增大时 $R_n=\frac{3}{(n+1)!}\to0$，(10)式右端就以 e 为极限，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e。$$

由此，使我們想到在一般情形下，若函数 $f(x)$ 的台劳公式 (3) 或 (4) 中的余項 $R_n(x)$ 在 x 某些值时满足条件

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0,$$

則因

$$R_n(x)=f(x)-\left[f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right],$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\left\{f(x)-\left[f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right]\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

或

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right]。\tag{11}$$

对于在 a 点处的台劳多項式就有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right]。\tag{12}$$

(11)式或(12)式說明了：

对于 x 的某些值如果有 $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$，則 $f(x)$ 的台劳多項式的項数越多时就越接近 $f(x)$，卽用台劳多項式逼近函数 $f(x)$ 时，可以达到任意的准确度。无疑的，这对于用多項式逼近一个函数是非常重要的条件。

注意到(11)或(12)式右端是指对于 x 的某些值，$f(x)$ 的台劳多項式当項数无限增多时的极限。在这极限存在的条件下，卽(11)或(12)式成立时，我們把它写成

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

或 $$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots。$$

它們右端意味着一个按 x 或 $(x-a)$ 升冪排列的"无穷多項式"。这种"无穷多項式"就是所謂"冪級数",一般地說,冪級数是形如

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{13}$$

或 $$b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\cdots+b_n(x-a)^n+\cdots \tag{14}$$

的式子; a_0, a_1, $\cdots$, b_0, b_1, $\cdots$ 为任意实数叫冪級数的系数,当它們是根据已給函数 $f(x)$ 的台劳公式計算得来时,冪級数就叫台劳級数。

为了明确 (11) 或 (12) 式的意义以及在 x 的哪些值时方能用 $f(x)$ 台劳多項式以任意准确度来逼近 $f(x)$,我們必須进一步研究有关冪級数的基本知識。

§ 6-2. 数項級数的审斂法

§ 6-1 对于 x 的某一給定值,冪級数(11)或(12)便变成各項为数 u_1, u_2, $\cdots$, u_n, $\cdots$所組成的式子:

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots。\tag{1}$$

一般地說,形式如(1)的式子叫无穷数項級数或就叫級数,其中 u_n 叫一般項。級数(1)可簡記为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$。

作級数(1)前 n 項的和叫它为部分和 S_n,即

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n。$$

当 $n=1, 2, 3, \cdots, n$ 时,可得一数列

$$S_1, S_2, S_3, \cdots, S_{n-1}, S_n。$$

当 n 无限增大时,数列 S_n 可能趋于一个确定的极限值,也可能沒有极限。如果

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(u_1+u_2+\cdots+u_n)=S$$

成立，我們說級数(1)是收斂的，并把 S 叫无穷級数(1)的和，即

$$S=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots。$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，則說級数(1)发散。

例如 § 6-1 中例 1 我們已知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e,$$

即級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收斂于和 e，写成

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots。$$

这与
$$e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

具有不同的意义，后者表示有限和的运算，前者表示无穷級数收斂于 e，包含着极限运算。

收斂級数最常見的一个例子是无穷等比級数当公比的絕对值小于 1 的情形。因为无穷等比級数

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots,$$

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{a}{1-r}\cdot r^n$$

当 $|r|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{a}{1-r}$，即級数收斂于 $S=\frac{a}{1-r}$。而当 $|r|\geqslant 1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，即級数发散。

例 1. 討論級数 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 的斂散性。

解
$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

故 $$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

所以級数收斂于 1。

例 2. 討論調和級数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 的斂散性。

当 $x>0$ 时，我們从图 6-1 可知 $x>\ln(1+x)$，因此

$$\begin{aligned} S_n &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \\ &> \ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) \\ &\quad +\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln(n+1)。 \end{aligned}$$

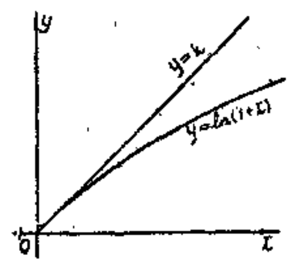

图 6-1

因为 $$\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty} S_n=\infty,$$

即調和級数是发散級数。

收斂級数有一个重要的基本性质就是：当 n 无限增大时，任何一个收斂級数的一般項 u_n 都滿足条件：

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0。$$

这是因为 $$u_n = S_{n+1}-S_n,$$

由于已知級数收斂，

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to\infty} S_n = S-S=0。$$

这是級数收斂的必要条件而非充分条件，即它的逆定理不成立。可以从例 2 的調和級数看出，虽然有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，而这个級数却是发散的。因此不能用它去审定級数是否收斂。但若知

一級数有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，則可斷定这一級数是发散的。例如級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$ 一般項的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，故它是发散的。

級数只有在它收斂时，才表示一个确定的数。因此我們要着重研究級数是否收斂的問題，但上述性質不能用来审定級数是否收斂，另一方面如用求 S_n 并考察 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 是否存在的方法，又常常是繁瑣而困难的。因此，必須建立一些簡易的审斂法。下面根据級数項的符号的不同分別来研究：

1. 正項級数审斂法

当級数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{2}$$

各項均为正数时叫正項級数。很容易看出：正項級数的前 n 項和 S_n 所組成的数列 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 是單調增加的，因此当 S_n 有界时，它必有极限即級数(2)收斂。

基于这一原理，若另取一已知正項級数

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots, \tag{3}$$

与級数(2)比較，如果級数(3)收斂于 σ 并且 $u_n \leqslant v_n (n=0, 1, \cdots)$，則

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n \leqslant v_1+v_2+\cdots+v_n < \sigma。$$

可見 S_n 是單調增加而有界的即級数(2)收斂。如果級数(3)发散，且 $u_n \geqslant v_n$，則

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n \geqslant v_1+v_2+\cdots+v_n=\sigma_n \to +\infty,$$

即級数(2)发散。因此，我們得正項級数的比較審斂法。

(1) **比較审斂法** 若級数(3)收斂且 $u_n \leqslant v_n (n=0, 1, \cdots)$，則級数(2)收斂。若級数(3)发散，且 $u_n \geqslant v_n (n=0, 1, \cdots)$，則級数(2)发散。

例 3. 研究 p-級数 $(p>0)$

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \tag{4}$$

的斂散性。

解 p-級数是正項級数，当 $p=1$ 时为調和級数，已知其发散。当 p 为其他值时尙須分別研究。

(i) 当 $p>1$ 时，依次把級數(4)的一項、两項、四項、八項、……括在一起(因为級数的項加上括号不会影响它的收斂性)，

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{7^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{16^p}\right)+\cdots。$$

它的各項(除首項外)小于

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\cdots$$

的对应項。 而后一級数当 $p>1$ 时为公比 $r=\frac{1}{2^{p-1}}<1$ 的无穷等比級数，它是收斂的。因此当 $p>1$ 时 p-級数收斂。

(ii) 当 $0<p<1$ 时，

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

的每一項都大于发散的調和級数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

的对应項。故当 $0<p\leqslant 1$ 时級数发散。

应用比級审斂法时，必須找出已知斂散性的級数 $\sum v$ (常利用等比級数，p-級数及調和級数来与所討論的級数比較)。但有时不易找到适合的級数，在实用上常用下面的比值审斂法。

(2) **比值审斂法**(达朗貝尔审斂法) 設正項級数 (2) 后項与前項比的比值的极限为 ρ，卽

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho。$$

則当 $\rho<1$ 时 級斂 (2) 收斂；

$\rho>1$ 时　　級数 (2) 发散;

$\rho=1$ 时　　級数 (2) 可能收斂也可能发散。

我們分别討論如下:

(i) $\rho<1$ 的情形: 我們总可选取一个小的正数 ε 使得 $\rho+\varepsilon=r<1$。因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, 根据极限的定义可知在 n 适当大时, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 就含在区間 $(\rho-\varepsilon,\ \rho+\varepsilon)$ 內, 即自某个 m 起以后对所有的 n 有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon=r_{\circ}$$

因此有　　$u_{m+1}<ru_m$; $u_{m+2}<ru_{m+1}<r^2u_m$, $\cdots$,

而級数　　$u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots$

的各項都小于公比为 $r<1$ 的等比級数

$$ru_m+r^2u_m+r^3u_m+\cdots$$

的对应項, 所以級数 $u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots$ 是收斂的。由于它比級数 (2) 只少了前面有限个項 $u_1+u_2+\cdots+u_m$, 这是一个有限值。因为 $u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots$ 有极限則級数 (2) 也有极限, 所以級数 (2) 也收斂。

(ii) $\rho>1$ 的情形: 可选定一个小的正数 ε 使得 $\rho-\varepsilon>1$, 同样可知自某項 l 后的所有的項都有

$$\frac{u_{l+1}}{u_l}>\rho-\varepsilon>1,$$

即　　$u_{l+1}>u_l$。

即級数的項的数值是增大着, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, 所以級数 (2) 发散。

(iii) $\rho=1$ 的情形: 如果当 n 无限增大而比值是由大于 1 或等于 1 而趋近于 1 时, 显然一般項不趋于零, 因而級数 (2) 是发散的。在相反的情形, 对級数的情况不能作出結論。这就是所謂"可疑情形", 而須用其他的审斂法来判定。

例 4. 研究 $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$ 的斂散性。

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n!}}{\dfrac{1}{(n-1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0。$$

这时 $\rho=0<1$，故級数收斂。从 § 6-1 例 1 已知它收斂于和 e。

例 5. 研究級数 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots$ 的斂散性。

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}}{\dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{2n^2+3n+1}=1。$$

这时 $\rho=1$，比值审斂法失效。但此級数的每一項小于收斂的 p-級数 $(p>1)$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

的对应項，故知它是收斂的。

2. 交錯級数审斂法

級数

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots, \tag{5}$$

其中 $u_1, u_2, \cdots$ 均为正数叫**交錯級数**，关于交錯級数的审斂法有下列莱布尼茲定理。

定理 若交錯級数 (5) 滿足下列条件

(i) $$u_1>u_2>u_3>\cdots,$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty}u_n=0,$$

則級数 (5) 收斂，其和 $S<u_1$。

从图 6-2 可看出数列 S_n 的变化情况：根据条件 (i) 可知：偶数項的和 $S_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})$ 是单調增加

的，即 $S_2<S_4<S_6<S_8<\cdots$，图中点 $S_2, S_4, S_6, \cdots, S_{2n}, \cdots$ 向右移。奇数項的和 $S_1=u_1$，$S_3=u_1-u_2+u_3=u_1-(u_2-u_3)=S_1-(u_2-u_3)<S_1$，$S_5=S_3-(u_4-u_5)<S_3<S_1, \cdots$，故奇数項的和是单調減小的，即点 $S_1, S_3, S_5, \cdots, S_{2n+1}, \cdots$ 向左移。

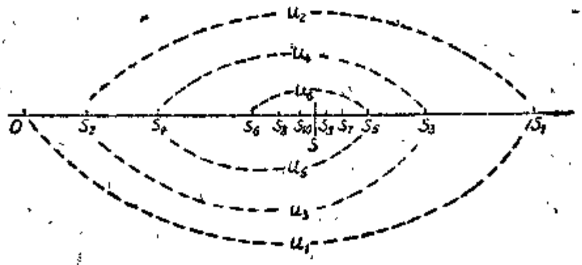

图 6-2

相邻两部分的和 S_{2n} 与 S_{2n+1} 逐步靠近，因为 $|S_{2n+1}-S_{2n}|=|u_{2n}|\to 0$，所以它們之間距离趋向零。从而在 n 相当大后，点 S_n 必积聚在某点 S 附近，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$，故級数收斂。

从图上容易看出 $0<S<u_1$。

用收斂交錯級数前 n 項和 S_n 作为級数的和 S 的近似值时，产生的誤差为所弃去的級数

$$R_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots)$$

的和 R_n 的絕对值（R_n 叫做級数的余和），由收斂交錯級数的和小于首項的性質，故得

$$|R_n|<u_{n+1}。$$

这一性質在应用級数作近似計算时常常用到。

例 6. 研究級数 $1-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}-\dfrac{1}{7!}+\cdots$ 的斂散性。

解　它符合上述定理的两个条件即各項的絕对值遞減且一般項趋向零，故知其收斂。

3. 任意項級数的审斂法

級数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{6}$$

有正項也有負項时叫**任意項級数**。任意項級数的审敛法有下列定理。

定理 若任意項級数 (6) 的各項絕对值所成的級数

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots \tag{7}$$

收斂，則級数(6)收斂，并称它为絕对收斂。

令 S'_n 及 S''_n 分别表示級数(6)前 n 項和中各正項与各負項和的絕对值。因此有

$$S_n=S'_n-S''_n,$$

級数(7)中前 n 項和 σ_n 也可写成 $\sigma_n=S'_n+S''_n$。

因为級数 (7) 收斂即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$ 存在，可知 S'_n 及 S''_n 都是单調增加而有界的 ($S'_n<\sigma$, $S''_n<\sigma$)，因此它們都有极限。因而 S_n 也有极限卽級数(6)收斂。

从萊布尼茲定理可知級数 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ 是收斂的，但它的各項絕对值的級数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ 为調和級数而是发散的，卽每个收斂級数并不一定是絕对收斂的。故定理中級数 (7) 收斂的条件只是充分条件而非必要条件，它的逆定理不成立。

任意項級数(6)收斂时，如果各項絕对值所成的級数是发散級数，則級数(6)叫做**非絕对收斂級数**或**条件收斂級数**，以区别于**絕对收斂級数**。

虽然上述定理的条件只是充分的，但它使很大一类的任意項級数的收斂性的审定可用正項級数审斂法解决。

§ 6-3. 冪級数的收斂区間

在 § 6-1 里我們已知形式如

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{1}$$

或