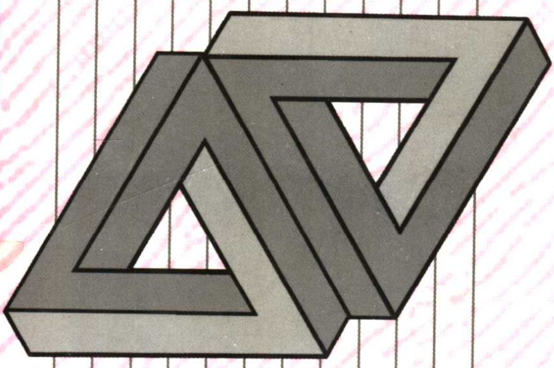
高等数学全程导学（下册）

GAODENG SHUXUE QUANCHENG DAOXUE

同济·高等数学（第五版）题解

刘后邦 侯宾 娄明 刘可 编著



● 大学数学精要辅导丛书（理工科）

湖南科学技术出版社

GAODENG SHUXUE

高等数学全程导学（下册）

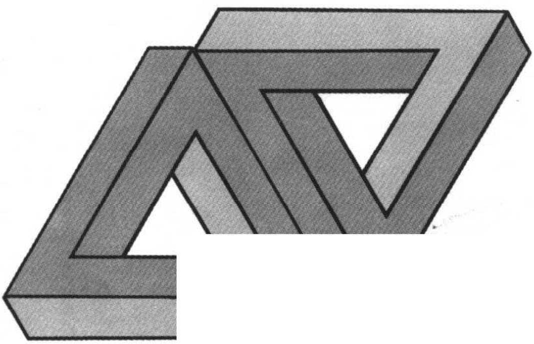
GAODENG SHUXUE QUANCHENG DAOXUE

同济·高等数学（第五版）题解

刘后邗 侯宾 娄明 刘可 编著

大学数学精要辅导丛书（理工科）

GAODENG SHUXUE



湖南科学技术出版社

高等数学全程导学(下册)

同济·高等数学(第五版)

编　　著：刘后邗　侯　宾　娄　明　刘　可
责任编辑：徐　为
文字编辑：陈一心
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市湘雅路 280 号
http://www.hnstp.com
邮购联系：本社直销科　0731－4375808
印　　刷：长沙环境保护学校印刷厂
(印装质量问题请直接与本厂联系)
厂　　址：长沙市井湾路 4 号
邮　　编：410004
经　　销：新华书店
出版日期：2004 年 1 月第 1 版第 1 次
开　　本：850mm×1168mm　1/32
印　　张：16.375
字　　数：525000
书　　号：ISBN 7－5357－3860－5/O·218
定　　价：26.80 元

序

本书是高等数学学习与教学的一本指导性参考书，特点如下：

（一）本书的内容严格控制在理工类（非数学专业）专、本科教学大纲及全国硕士研究生统考大纲范围内，对个别超过大纲而考试中又可能涉及的部分则用“*”号标出.

（二）本书是按教材章节顺序编写的，每章由五部分构成：

1.“要点概述”．包括设置该章的缘由、要解决的问题、重要的概念、定义、定理及各种典型问题的求解程序等，实际上，“要点概述”相当于课堂笔记，它是解题必备的理论基础.

2.“疑难解析”．包括了该章重要是非问题的判断，对重要概念、定义、定理的理解，解题中易犯错误的分析等，它们是提高数学素质的重要环节.

众所周知，在数学学习中，解题是掌握理论、促进应用的一个重要手段．实践出真知，多看题解则可见多识广，多做习题则可熟能生巧，作者根据多年从事高等数学教学的经验，把解题训练按难度系数分为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，逐级训练，即为下面的几个部分.

3.“习题选解”．难度系数Ⅰ，选自同济大学应用数学系主编的《高等数学》第五版（书中简称同济五版）．此书是全国使用面最广，也是目前已出版的种类繁多的高等数学教材中最优秀的一本．书中配置的习题

具有经典性，对基本功训练是十分必要的，我们去掉了其中少数最简单的、重复性出现的习题，将其余全部习题汇成了“习题选解”，对于专科、本科初学高等数学的同学，这是必须掌握的基础训练，为了便于读者查阅，用了如下编码，例如3.2.4 (2) 表示该题选自该书第3章第2节第4大题第 (2) 小题.

4. “练习题选”. 难度系数Ⅱ，选自高校期末考卷及试题库中各种典型考题. 这部分习题，建议读者先动手练练，如有困难，再看附在后面的答案，总结解题的经验教训，这部分练习题的训练将拓宽解题思路，提高解题技巧，无疑对准备参加期末考试的同学是十分有利的.

5. “典型范例”. 难度系数Ⅲ，包括 1987～2002 年全国研究生入学考试几乎全部的统考试题〔题后标注“(考研××××)”〕及具有类似难度的典型题. 对准备考研的读者，在阅读完“要点概述”及“疑难解析”后，可直接阅读“典型范例”，以便掌握考研动态，锻炼解题灵活性，极大地提高解题能力.

在浩如烟海的数学题中，怎样取材选题，有针对性地指导读者用最少的时间，循序渐进、高效益地在期末考试或考研中取得好成绩是一个很值得探讨的问题，作者不揣冒昧，在这方面进行了一些探索，不足之处，敬请行家及读者批评指正.

此外，本书还附录了两份期末考卷及两份 2003 年最新考研试题及解答，供读者复习时参考.

张宜老师参与了本书的校稿，在此表示诚挚的谢意。

刘后邘

于中南大学荷花村

2003 年 7 月 26 日

目　　录

第八章

多元函数微分法及其应用

DUOYUAN HANSHU WEIFEN FA JIQI YINGYONG

一、要点概述

Ⅰ　问题的提出

在数学的发展中，“推广”占有重要一席，本章就是一元微分学的推广，我们将把一元函数推广到二元函数、三元函数；把极限推广到二重极限；把求一元函数的极值推广到求多元函数的极值等．显然这些推广都是实际问题的需要．

仔细分析，“推广”又可分为两类，一类是实质性的推广．例如一元函数与二元函数会有一些质的不同：一元函数有单调概念，二元函数就没有简单的相仿概念．又如极限与二重极限会有一些质的不同：一元函数有左极限、右极限；二重极限就没有这些因而也称为全面极限．另一类推广是非实质性推广．例如由三元函数推广到四元乃至 n 元函数，这时函数在本质上已没有什么不同，所遇困难是由自变量个数增多而引起的，已不属于分析性质而是属于代数与几何性质．因此，只要有了处理二元、三元函数的分析概念与方法，再配合一些其他的代数与几何知识，就不难掌握多元函数理论的各种应用．

本章重点就是介绍分析上的实质推广．即重点放在一元到二元的推广．

Ⅱ　平面上点集的概念

（一）邻域（图 8-1）　$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$；$P_0=(x_0,y_0)$．

$U(P_0,\delta)$ 有时也记为 $U(P_0)$（不强调邻域半径 δ）．

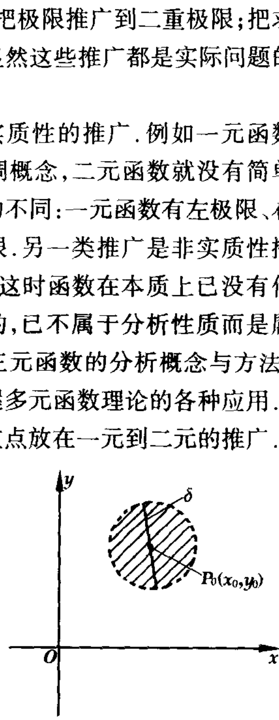


图 8-1

（二）内点　设 E 为平面上一个点集，P 为平面上一点．若存在一个 $U(P)\subset E$，称 P 为 E 的内点．

（三）开集　若点集 E 的点全部是内点，称 E 为开集．

（四）边界点　若点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点也有不属于 E 的点（点 P 本身可以属于 E 也可以不属于 E），称 P 为 E 的边界点．

（五）连通开集　设 D 是一个开集且 D 中任何两点都可用属于 D 内的折线连接，称 D 为连通开集．

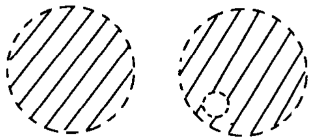
（六）区域　连通开集称为区域（开区域）.

$$\text{区域}\begin{cases}\text{单连通区域（无洞区域），见图 8-2a.}\\ \text{复连通区域（有洞区域），见图 8-2b.}\end{cases}$$

（七）闭区域　区域 + 全部边界点.

（八）半开半闭区域　开区域（区域）+ 部分边界点.

（九）有界（无界）区域　若区域能被一个圆心在原点的圆域包含，称为有界区域；否则称为无界区域.



a　　　　b

图 8-2

（十）聚点　设 E 为一个点集，P 是平面上一个点，若 P 的任何一个邻域内总有无限多个属于 E 的点，称 P 为 E 的聚点.

Ⅲ　二元函数和二重极限

（一）二元函数，形如 $z = f(x,y)$　$[z = z(x,y)]$.

几何意义，表示空间曲面，定义域为平面 xOy 上的点集.

（二）二重极限，形如 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$ 或

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = A,\quad M = (x,y),\quad M_0 = (x_0,y_0).$$

(1) 怎样证明二重极限不存在：在定义域内分别取两种不同方式 $M \to M_0$，得到两个不同极限值，由极限惟一性推知极限不存在.

例 1　证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y}$ 不存在.

证　因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y} \xlongequal{\text{令 } y = x} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2x} = 0$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x+y} \xlongequal{\text{令 } y = -x+x^2} \lim_{x\to 0} \frac{x(-x+x^2)}{x^2} = -1.$$

故此二重极限不存在.

例 2　证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{x+y}$ 不存在.

证　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{x+y} \xlongequal{\text{令 } y = kx(k\neq -1)} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x+kx} = \dfrac{1}{1+k}$.

由于极限中含有 k，因 k 不同有不同值，故极限不存在.

(2) 怎样计算二重极限

方法一　用视察法估计出极限 A，再用定义来证明极限为 A.

例 求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 当 $y=x$ 时,$\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}\,|x|}\to 0(x\to 0)$

由此估计极限为0.

由于$\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\quad (x^2+y^2\neq 0)$.

$\forall\varepsilon>0$,要使$\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$,只要$\sqrt{x^2+y^2}<$ $2\varepsilon=\delta$.即$\forall\varepsilon>0$,存在$\delta=2\varepsilon$,只要$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$,

就有$\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

方法二 代入法.原理:若$f(x,y)$在(x_0,y_0)处连续,则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

例 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{2-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{2-0}{0+1}=2$.

方法三 利用夹逼准则求极限.

例 求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

因 $0\leqslant\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\dfrac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2}$.

当 $x\to 0,y\to 0$ 时,上面不等式两边极限为0,

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

方法四 在无条件下,变换二重极限问题为一元极限问题,再求极限.

例 求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

解 原式$\xlongequal[\text{令 } z=\sqrt{x^2+y^2}]{}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z-\sin z}{z^3}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1-\cos z}{3z^2}=$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{6z}=\frac{1}{6}.$$

注意:①若令 $y=x$,这就是在条件 $y=x$ 下变二重极限问题为一元极限问题,在求二重极限情形下是绝对不行的.②只有一元函数求极限才可用洛·必达法则.

方法五　把问题转化为极坐标下求极限.

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,条件 $(x,y)\to(0,0)$,等价于 $r\to 0$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

例　求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

解　原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{r^2}=0.$

注意:求解中,用到公式:$\sin x\sim x(x\to 0)$.

方法六　利用运算法则求极限.

例　求 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

解　原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2\cdot e^{-x})\cdot\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}e^{-y}+\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(y^2\cdot e^{-y})\cdot\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}e^{-x}=$

$0\cdot 0+0\cdot 0=0.$

(三) 二元连续函数　若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$,称二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

* 由多元多项式及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合并可用一个式子表示的函数称为多元初等函数.

* 一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.

* 在有界闭区域上多元连续函数有:最值定理、介值定理.

Ⅳ　偏导数

设 $z=f(x,y)$.

(一) 全增量　$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$.

偏增量　$(\Delta z)_x=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$;

$(\Delta z)_y=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$.

(二) 偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}\xlongequal{\Delta}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta z)_x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\xlongequal{\Delta}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(\Delta z)_y}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

(三) 求偏导数方法

方法一　按定义求偏导数(常用于求分段函数在分段点上的偏导数).

方法二　利用一元求导法则与公式求偏导数.记住,对某变量求偏导时,其余变量一律视为常数.

方法三　利用多元复合求导法求偏导数(重点).

方法四　利用求出全微分求偏导数.

方法五　对隐函数,利用公式求偏导数.

对　$F(x,y)=0 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x}{F_y}$;

对　$F(x,y,z)=0 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$;

对　$\begin{cases}F[x,y,u(x,y),v(x,y)]=0,\\ G[x,y,u(x,y),v(x,y)]=0.\end{cases}$

令　$J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}(\neq 0)\Rightarrow$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.\end{cases}$$

V　全微分

(一) 定义　若 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+o(\rho)$,其中 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$,称 $\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$ 为全微分.

$$\mathrm{d}z\xlongequal{\Delta}A\Delta x+B\Delta y=\begin{cases}(\text{计算微分})\ \dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y,\\ (\text{近似计算})\ \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y.\end{cases}$$

(二) 运算性质　$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$;

$\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$;

$\mathrm{d}ku=k\mathrm{d}u$($k$ 为常数);

$\mathrm{d}\dfrac{u}{v}=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$;

设 $z=z(u,v),u=u(x,y),v=v(x,y)$,

则 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\dfrac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$　(一阶微分形式不变性).

(三) 应用

(1) 估计增量　$\Delta z\Big|_{(x_0,y_0)}\sim\mathrm{d}z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$

要求 $|\Delta x|,|\Delta y|$ 很小.

(2) 近似计算函数值　$f(x,y)\sim f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$.要求$(x,y)$靠近$(x_0,y_0)$,即 $|\Delta x|,|\Delta y|$ 很小,且 $f(x_0,y_0)$ 好算.

(3) 误差估计　设要测量的量为 A,测量值为 a,已知 $|\Delta A| = |A - a| \leqslant \delta$,称 δ 为 A 的绝对误差;$\dfrac{\delta}{|a|}$ 为 A 的相对误差.

例　设 $z = f(x,y)$,已知 x,y 的绝对误差为 $|\Delta x| \leqslant \delta_x$, $|\Delta y| < \delta_y$.求 z 的绝对误差与相对误差.

$$|\Delta z| \sim |dz| = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right| \leqslant \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|\delta_x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\delta_y,$$

即 z 的绝对误差 $\delta_z = \left|\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|\delta_x + \left|\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|\delta_y$;

z 的相对误差 $\dfrac{\delta_z}{|z|} = \dfrac{\left|\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|\delta_x}{|z|} + \dfrac{\left|\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|\delta_y}{|z|}$.

Ⅵ　微分法几何应用

(一) 求空间曲线的切线与法平面

(1) 设曲线 $l: x = x(t), y = y(t), z = z(t)$,

在 t_0 处,对应的点为 (x_0, y_0, z_0).

则切向量为 $\boldsymbol{\tau} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$,

切线方程为 $\dfrac{x - x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{y'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{z'(t_0)}$,

法平面方程为 $x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$.

(2) 设曲线 $l: \begin{cases} F(x,y,z) = 0, & ① \\ G(x,y,z) = 0. & ② \end{cases}$

在 x_0 处由隐函数方程组 $\begin{cases} ① \\ ② \end{cases}$ 解出 $z'_x(x_0), y'_x(x_0)$.

切向量为 $\boldsymbol{\tau} = (1, y'_x(x_0), z'_x(x_0))$.

切线方程为 $\dfrac{x - x_0}{1} = \dfrac{y - y_0}{y'_x(x_0)} = \dfrac{z - z_0}{z'_x(x_0)}$.

切平面方程为 $1 \cdot (x - x_0) + y'_x(x_0)(y - y_0) + z'_x(x_0)(z - z_0) = 0$.

(二) 求曲面的切平面与法线

(1) 设曲面 $\Sigma: F(x,y,z) = 0$.

则在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处　法向量 $\boldsymbol{n} = (F_x, F_y, F_z)\big|_{M_0}$,

法线方程为 $\dfrac{x - x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)} = \dfrac{y - y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)} = \dfrac{z - z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$,

切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y - y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z - z_0) = 0.$$

(2) 设曲面 $\Sigma: z = f(x,y)$.

则在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处,法向量 $\boldsymbol{n} = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1)$,

法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)} = \dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)} = \dfrac{z-z_0}{-1}$,

切平面方程为 $f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$.

Ⅶ 方向导数与梯度

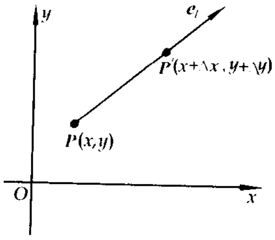


图 8-3

(一) 方向导数定义　如图 8-3,设 $z = f(x,y)$ 在 $U(P)$ 内有定义.自点 $P(x,y)$ 引射线 l($\boldsymbol{e}_l$ 为单位向量),$P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 是射线上动点,则函数 $z = f(x,y)$ 在点 P 处沿 $\boldsymbol{e}_l$ 方向的方向导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P,\boldsymbol{e}_l} \xlongequal{\Delta} \lim_{P'\to P}\frac{f(P')-f(P)}{\overline{P'P}} = \lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho},$$

其中 $\rho = \overline{P'P} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

方向导数刻画了函数在 P 点沿 $\boldsymbol{e}_l$ 方向的变化率.

方向导数计算法:

(1) 设 $z = f(x,y)$, $\mathbf{grad}f = (f_x, f_y)$, $\boldsymbol{e}_l = (\cos\alpha, \cos\beta)$.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x,y),\boldsymbol{e}_l} = f_x\cdot\cos\alpha + f_y\cdot\cos\beta = \mathbf{grad}f\cdot\boldsymbol{e}_l.$$

(2) 设 $u = f(x,y,z)$, $\mathbf{grad}f = (f_x, f_y, f_z)$,　$\boldsymbol{e}_l = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x,y,z),\boldsymbol{e}_l} = f_x\cdot\cos\alpha + f_y\cdot\cos\beta + f_z\cdot\cos\gamma = \mathbf{grad}f\cdot\boldsymbol{e}_l.$$

由(1)看出 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x,y),\boldsymbol{i}} = f_x$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x,y),-\boldsymbol{i}} = -f_x$,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x,y),\boldsymbol{j}} = f_y,\quad \left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x,y),-\boldsymbol{j}} = -f_y.$$

这就是方向导数与偏导数之间的关系.

(二) 梯度

设 $z = f(x,y)$,则梯度 $\mathbf{grad}f \xlongequal{\Delta} (f_x, f_y)$.

设 $u=f(x,y,z)$，则梯度 $\mathbf{grad}f \xlongequal{\Delta} (f_x,f_y,f_z)$.

意义：由于 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\mathbf{grad}f\cdot \boldsymbol{e}_l=|\mathbf{grad}f|\cdot\cos(\mathbf{grad}\,f,\hat{\ } \boldsymbol{e}_l)\Rightarrow$ 梯度是一个向量，在该点处沿此向量的方向，方向导数达最大. 此向量的模就是方向导数的最大值.

即 $\quad \max\dfrac{\partial f}{\partial l}=|\mathbf{grad}f|$.

Ⅷ 多元函数极值问题

（一）怎样求二元函数 $z=f(x,y)$ 的无条件极值

(1) 求驻点：$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}\Rightarrow (x_0,y_0)\cdots$

(2) 判断：例如对驻点 (x_0,y_0)，

设 $A=f''_x(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$.

当 $\begin{cases} B^2-AC<0 \\ A<0 \end{cases}\Rightarrow (x_0,y_0)$ 为极大点.

当 $\begin{cases} B^2-AC<0 \\ A>0 \end{cases}\Rightarrow (x_0,y_0)$ 为极小点.

当 $B^2-AC>0\Rightarrow (x_0,y_0)$ 不是极值点.

当 $B^2-AC=0$ 要进一步讨论(略).

（二）怎样求多元函数条件极值

方法一　降元法.

例 1　$\begin{cases} z=f(x,y), ① \\ \varphi(x,y)=0. ② \end{cases}$　① 为求极值函数，② 为条件方程.

由 ② 解出 $y=y(x)$ 代入 ①，变二元条件极值问题为一元无条件极值问题.

例 2　$\begin{cases} u=f(x,y,z), ① \\ \varphi(x,y,z)=0. ② \end{cases}$　① 为求极值函数，② 为条件方程.

由 ② 解出 $z=z(x,y)$ 代入 ①，变三元条件极值问题为二元无条件极值问题.

降元法的缺点是解题过程中要从隐函数中求出显函数，下面的方法二克服了这个困难.

方法二　升元法(拉格朗日乘数法)

例 1　$\begin{cases} z=f(x,y), ① \\ \varphi(x,y)=0. ② \end{cases}$　① 为求极值函数，② 为条件方程.