高等工业学校試用教科书

普通物理学

（四年制适用）

下册

上海市高等工业学校物理学編写組編

上海科学技术出版社

下 册 目 录

第四編　振动与波动

第五編 近代物理学基础

第四編　振动与波动

第一章　振动学基础

§4-1-1．諧振动

物体在一定位置附近作来回往复的运动称为振动。例如，摆的运动，气缸中活塞的运动等，都是可以直接看到的振动。又如，一切发音体的运动，机器开动时各部分的微小运动，固体中分子的热运动等，则是不易或是不能直接看到的振动。

我們先用彈簧振子来說明諧振动。在左端固定的輕彈簧的右端系一物体，将物体略为移动后，物体就在彈簧力的作用下作左右来回的运动。这种振动系統称为彈簧振子。为了使討論較为簡单，我們把彈簧振子穿在光滑的水平玻璃棒上(图4-1-1)，以避免重力对运动的影响。設物体在位置O时，彈簧作用在物体上的力是零，这个位置是物体的平衡位置。現在把物体向右移到位置B，这时彈簧被拉长，相应地有指向左方卽指向平衡位置的力作用在物体上，使物体返回平衡位置。当物体回到平衡位置时，彈簧的作用力等于零，但

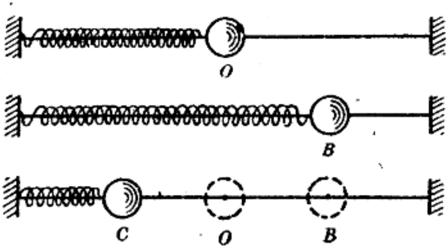

图4-1-1．彈簧振子的振动

因为物体在返回时获得速度，由于惯性作用，物体并不停止运动而繼續向左移动。当物体在平衡位置左边时，彈簧被压縮，所以物体所受的力指向右方卽指向平衡位置。这时力的作用是阻撓物体运动，直至物体靜止在位置 C。在这以后，物体在彈性力的作用下向右移动，情形和上述向左移动相似。这样，在彈簧的力的作用下，物体就在平衡位置左右方向作来回重复的振动。

取平衡位置 O 为 x 軸的原点，并設 x 軸的正向向右。按照虎克定律，物体所受彈簧的彈性力 f 和彈簧的伸長或物体以平衡位置为起点的位移 x 的关系是

$$f=-kx,$$

式中 k 是彈簧的倔强系数，負号表示力和位移的方向相反。設物体的質量为 m，根据牛頓第二运动定律，它的加速度是

$$a=\frac{f}{m}=-\frac{k}{m}x。$$

因为 k 和 m 都是正数，所以它們的比値可用另一恒量 ω 的平方来表示，卽令

$$\frac{k}{m}=\omega^2, \tag{4-1-1}$$

代入上式，得

$$a=-\omega^2x \tag{4-1-2}$$

或

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0。 \tag{4-1-2a}$$

上式指出，物体的加速度 a 恒与位移 x 反向。所以上述振动的特征是加速度和位移恒正比而反向，我們把这种振动称为諧振动。由上可知，物体在彈性力作用下发生的运动是諧振动。

根据微分方程理論，式(4-1-2 a)的解是

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)。 \tag{4-1-3}$$

式中 A 和 φ 是两个恒量，它們的意义和数値将在后面討論。又因为 $\cos(\omega t+\varphi)=\sin\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$，所以如令 $\varphi'=\varphi+\frac{\pi}{2}$，則式(4-1-3)可改写为

$$x=A\sin(\omega t+\varphi')。\tag{4-1-3a}$$

式(4-1-3)或(4-1-3a)都是諧振动的运动方程(位移和时間的关系式)。因此，物体作諧振动时，位移是时間的正弦或余弦函数。所以我們也可以說，位移用时間的正弦或余弦函数来表示的振动称为諧振动。为确定起見，在本章中我們用余弦函数来表示諧振动。

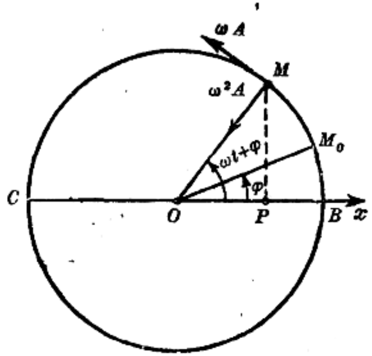

图 4-1-2. 质点諧振动的参考圓

下面我們再用几何的方法来研究諧振动中位移和时間的关系，并同时求出諧振动中速度、加速度和时間的关系。如图 4-1-2 所示，設有质点 M 以匀角速度 ω 在半徑为 A 的圓周上运动，那么它在直徑 BC 上的投影 P 点就在 BC 上作来回的运动。設在 $t=0$ 时，M 点在 M_0 处，半徑 OM_0 和 OB 間的角是 φ。經过时間 t 后，M 点到达 M 处，半徑 OM 和 OB 間的角变为 $\omega t+\varphi$，这时投影 P 点离开圓心的位移是

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)。$$

因为 M 点的角速度是 ω，半徑是 A，所以它的速度是 ωA，在切綫方向；而它的加速度是 ω^2A，指向圓心。P 点既是 M 点在 BC 上的投影，可知 P 点的速度 v 和加速度 a 分别是 M 点的速度和加速度在 BC 上的分量，即

$$v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi);\qquad(4\text{-}1\text{-}4)$$

$$a=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi)。\qquad(4\text{-}1\text{-}5)$$

把位移方程式代入加速度方程式，得

$$a=-\omega^2 x。$$

这就是諧振动的定义。由此可知，当质点作匀速圓周运动时，它在直徑上的投影的运动是諧振动。上述方法同时告訴我們，当质点作諧振动时，它的位移、速度和加速度都是时間 t 的余弦或正弦函数。

应該注意，諧振动是 M 点的投影 P 点在直徑 BC 上的运动，不是 M 点本身在圓周上的运动。M 点的运动在这里只有輔助的意义，所以我們称 M 点为輔助点，称它所走的圓为参考圓。

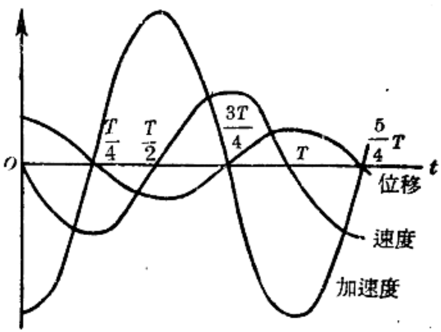

图 4-1-3．諧振动的位移、速度和加速度与时間的关系

如以 t 为横坐标，位移、速度和加速度为縱坐标，就可画出三条曲綫，如图 4-1-3 所示(图中假定 $\varphi=0$)。从三条曲綫，可以清楚地看出諧振动中的位移、速度和加速度的周期性，就是說，它們都在每隔一定的时間后，重复一次原来的数值。所以諧振动是一种周期运动。

§4-1-2　諧振动中的振幅、周期、频率和周相

現在来說明諧振动方程 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ 中各量的意义。式中 A 称为振动的振幅。因余弦的絕对值不能大于 1，故 x 的絕对值不能大于 A，可知振幅 A 是振动点离开平衡位置的最大位移。

式中 $(\omega t+\varphi)$ 称为振动的周相，这是个极其重要的物理量，由式(4-1-3)可知，当 A 为已知时，根据周相的大小，可以决定振动点在某一时刻 t 的位置。不仅如此，由于振动是质点所作的往复周期性运动，所以在一个完全振动的过程中（即来回一次），任何一个位置，质点都将两次經过它。但每次通过的方向不同。例如，在图 4-1-2 中，当 $(\omega t+\varphi)=\frac{\pi}{2}$ 时，P 点的位置是 O 点，运动方向向左；当 $\omega t+\varphi=\frac{3\pi}{2}$ 时，P 点的位置也是 O 点，而运动方向向右。由此可見，振动的周相不仅决定振动点在任一时刻 t 的位置，而且也决定这时質点运动的方向。恒量 φ 是 $t=0$ 时的周相，称为振动的初周相，簡称初相，从图 4-1-2 上可知，φ 的数值决定于我們开始計算时間的时刻。

对于輔助点 M 說，ω 是角速度，对于諧振动講，ω 称为圓频率。輔助点 M 旋轉一周所需的时間是

$$T=\frac{2\pi}{\omega}, \tag{4-1-6}$$

这就是振动点 P 完成一个完全振动（来回一次）所需的时間，称为振动的周期。周期的倒数称为頻率，它代表单位时間内振动点所作完全振动的次数。頻率的单位是每秒振动一次，称为［赫芝］。例如，頻率为 200［赫芝］就是在一秒鐘內振动 200 次。用 ν 代表頻率，则

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi} \tag{4-1-7}$$

或

$$\omega=2\pi\nu。 \tag{4-1-7a}$$

因此，圓頻率表示振动点在 2π 秒时間內所作的振动次数。諧振动方程也常用頻率或周期表述：

$$x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right),$$

或 $$x=A\cos(2\pi\nu t+\varphi)。$$

由上所述,可知諧振动的周期(或頻率)、初相和振幅三个量完全确定一个諧振动。現在說明在具体問題中何种因素决定这三个量。

彈簧振子的圓頻率是 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$,所以周期和頻率分别是

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},\quad \nu=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}。$$

因为質量 m 和倔强系数 k 代表彈簧振子本身的性質,所以上述两式說明,当振动系統作自由振动时,它的周期或頻率完全由系統本身性質所决定。我們常称之为固有周期或固有頻率。在其它自由振动例子中也可得到同样結論。但因振动系統的性質各不相同,所以周期与頻率的具体公式也有所不同。

对于一定的振动系統(ω 为已知),还可以有振幅不同和初相不同的振动。但是不論一个振动的振幅和初相的数值为何,它的位移和时間及速度和时間的关系总是

$$x=A\cos(\omega t+\varphi),\quad v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)。$$

所以,如果已知某一时刻的 x 值和 v 值,那么振幅 A 和初相 φ 就可从上述两方程式求出。設在 $t=0$ 时,初位移是 x_0,初速度是 v_0,則 $x_0=A\cos\varphi$, $\frac{-v_0}{\omega}=A\sin\varphi$。把这两式平方相加,再在等式两边开方,得

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}},$$

再把两式相除,得

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{v_0}{\omega x_0}。$$

初位移和初速度称为起始条件或位速条件。上述結果說明,对于一定的振动系統,諧振动的振幅和初相由起始条件或位速条件所

决定。

最后，还应該指出，在討論几个頻率相同的振动时，它們的初相所具有的物理意义。設有三个质点 A_0、A_1 及 A_2 在同一方向，以相同的頻率、不同的初相在振动着，其具体形式为：

$$A\cos\omega t,\quad A\cos(\omega t+\varphi_1)\ \text{及}\ A\cos(\omega t+\varphi_2)。$$

因它們的頻率相同，所以不管計时原点如何选擇，它們的周相差总等于初相之差，因而保持不变。图 4-1-4 是 A_0、A_1 及 A_2 的振动图解，如果不选擇 A_0 到达最大位移的 t_0 点作为計时原点，而取 A_1 到达最大位移的 t_1 点作为計时原点，則我們

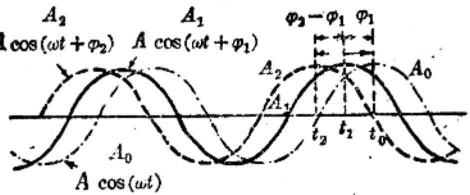

图 4-1-4．三个諧振动的周相差

就說，形式为 $A\cos\omega t$ 的振动，在周相上較它落后一角度 φ_1，而形式为 $A\cos(\omega t+\varphi_2)$ 的振动，在周相上較它超前一角度 $\varphi_2-\varphi_1$。在周相落后的 A_0，它的振动余弦曲綫将在横軸上向右移动一个距离 φ_1，而周相超前的 A_2，它的振动余弦曲綫将位于 A_1 左边一个距离 $\varphi_2-\varphi_1$。由此可見，两个同頻率振动的周相差，决定了在任何时刻 t 两个相同的振动状态在横軸上的距离。

§4-1-3．諧振动的能量

現在用图 4-1-1 的彈簧振子来說明諧振动的能量。設物体的质量为 m，在某一时刻的速度为 v，則物体的动能是 $\frac{mv^2}{2}$。再設在这时刻，物体的位移即彈簧的伸长为 x，彈簧的倔强系数是 k，則彈簧还具有位能。如果把彈簧在原长时（即伸长 x 为零时）的位能算作零，那么，在彈簧伸长为 x 时彈性位能的数值等于从伸长为 x 变到伸长为零时彈性力所作的功。因为彈性力是变力，正比于

伸长,所以伸长为零时,彈性力为零,伸长为 x 时,彈性力为 kx,因而伸长从 x 变到零时,彈性力的平均数值是 $\frac{1}{2}kx$,于是所作的功为 $\frac{1}{2}kx\cdot x=\frac{1}{2}kx^2$。这就是伸长为 x 时彈簧所具有的**彈性位能**。因此彈簧振子振动时的总能量是

$$W=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2。$$

在振动过程中,v 和 x 都随时間而变,所以动能和位能也都随时間而变。把 v 和 x 的方程代入上式,得

$$W=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)+\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)。\qquad(4\text{-}1\text{-}8)$$

因 $\omega^2=\frac{k}{m}$ 或 $k=m\omega^2$,所以代入上式,得

$$\begin{aligned}W&=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\{\sin^2(\omega t+\varphi)+\cos^2(\omega t+\varphi)\}\\&=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=\frac{1}{2}kA^2。\end{aligned}\qquad(4\text{-}1\text{-}9)$$

当一定的彈簧振子作一定的諧振动时,m、k 和 A 都是恒量,因此上式說明尽管动能和位能都随时間变化,**但諧振动的总能量在振动过程中是一个恒量**。这結論和机械能守恒定律符合。

上式又說明,**对于一定的振动系統,振动的总能量同振幅的平方成正比**。这一結論在其它形式的振动中也是正确的。

应該指出:不仅在机械运动中有諧振动,在其它形式的物质运动中,也有諧振动。例如在无綫电学、波动光学中,电流、电位差、电动势或电場强度等等的变化,也常常是时間的正弦或余弦函数,这些运动的規律和机械的諧振动相同,所以在力学中虽然只能討論了机械的諧振动,但是它的理論可以广泛地应用。

§4-1-4. 单摆和复摆

单摆和复摆的运动也是諧振动的例子。

单摆　在不会伸长的輕綫下端，悬挂不大的重物，略为移动后，物体就在鉛直面內来回摆动，这种装置称为单摆或数学摆（图 4-1-5）。綫的鉛直位置是摆的平衡位置。

現在来分析摆錘的圓弧运动在切綫方向的性質。在切綫方向，摆錘所受的作用力是重力在这方向的分力。当摆綫和鉛直方向作 θ 角时，重力的切向分力 f 为

$$f=P\sin\theta=mg\sin\theta。$$

当 θ 角很小时（5 度以下），圓弧可以近似地看成直綫，分力 f 也可近似地看作沿这直綫作用。現取这直綫为 x 軸，并設 l 为摆长，則因 $\sin\theta\simeq\frac{x}{l}$，所以

$$f=-\frac{mg}{l}x,$$

式中負号表示力和位移的方向相反。这种力和彈性力类似，所以称为准彈性力。按照牛頓第二运动定律，物体的加速度是

$$a=\frac{f}{m}=-\frac{g}{l}x。$$

因摆长 l 和重力加速度 g 都是恒量，所以上式說明，加速度和位移正比而反向。換句話說，当摆角很小时，单摆的振动是諧振动。

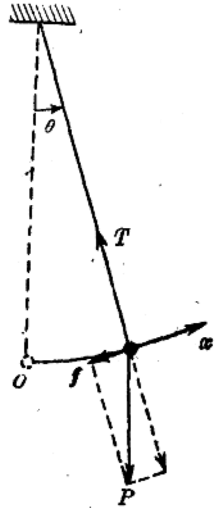

图 4-1-5．单摆

和諧振动的定义 $a=-\omega^2x$ 比較，可知单摆振动时的圓频率是

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}},$$

周期是

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}。$$

因此，当摆角很小时，单摆有一定的周期，这周期是由摆长 l 和单摆所在地点的重力加速度 g 所决定。因此单摆的周期也是由振动系統本身的性質所决定的。

单摆是測定重力加速度的最簡单而准确的仪器。在一定地点測定单摆的周期 T，利用上式就可算出 g 来。在地球上不同地点測出单摆的周期，就可以发現各地的重力加速度是不相同的。

复摆　彈簧振子和单摆的振动都是平动，但振动也可以是轉动。如果物

体轉动时，角加速度 β 和角位移 θ 成正比而轉向相反，即

$$\beta=-\omega^2\theta。$$

那么这种运动就称为轉动的諧振动或角諧运动。

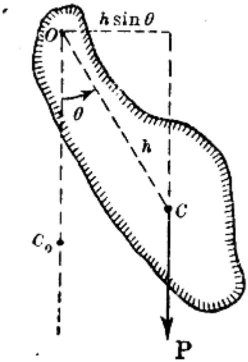

图 4-1-6. 复摆

我們現在用复摆来說明这种諧振动。任何一个能够在重力作用下繞水平轉軸摆动的剛体都称为复摆或物理摆（图 4-1-6）。設 O 点代表复摆的轉軸，C 点为复摆的重心，重心离轉軸的垂直距离为 h，摆的质量为 m。在平衡位置时，重心在通过轉軸的鉛垂綫上（C_0 点）。經扰动后，复摆将繞轉軸左右摆动。在某一时刻，当摆离开平衡位置的角位移是 θ 时，重力 P 的作用綫离开轉軸的垂直距离是 $h\sin\theta$，所以重力对轉軸 O 的力矩是

$$M=-Ph\sin\theta=-mgh\sin\theta,$$

式中負号表示力矩和角位移的轉向相反。設 J 为复摆对轉軸的轉动慣量，则根据轉动定律 $M=J\beta$，得复摆的角加速度为

$$\beta=-\frac{mgh}{J}\sin\theta。$$

当 θ 很小时，$\sin\theta$ 可代以近似值 θ，故

$$\beta=-\frac{mgh}{J}\theta。$$

因 $\frac{mgh}{J}$ 是恒量，所以上式說明，角加速度和角位移正比而轉向相反。即在摆角很小时，复摆的运动是轉动的諧振动。

和式 $\beta=-\omega^2\theta$ 比較，得复摆的圆頻率为

$$\omega=\sqrt{\frac{mgh}{J}},$$

周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgh}}。$$

由上可知，复摆的周期也是由振动系統本身的性质所决定的。和单摆一样，复摆也可用作测定 g 的仪器。

很容易証明，单摆作諧振动时，它的位移、速度和加速度都是时間的余弦或正弦函数。同样，复摆作諧振动时，它的角位移、角速度和角加速度也都是

时間的余弦或正弦函数。也很容易証明，单摆和复摆的振幅和初位相也是由起始条件所决定的。

[例题 1]　一輕彈簧受 3 [千克力] 的作用时，伸长为 9 [厘米]。今在此彈簧下端悬一重量 $P=2.5$ [千克力]的重物。求此重物振动时的周期。

[解]　彈簧受 3 [千克力] 时，伸长为 9 [厘米]，所以彈簧的倔强系数是

$$k=\frac{3\,[\text{千克力}]}{9\,[\text{厘米}]}=\frac{1\,[\text{千克力}]}{3\,[\text{厘米}]},$$

注意上式所用单位为混合制。由彈簧振子的周期公式，可求出周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{P}{gk}},$$

式中长度的单位要用[厘米]，力的单位要用[千克力]，代入已知数字，得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2.5\times 3}{981}}=0.55\,[\text{秒}]。$$

[例题 2]　續上題，若在开始时将重物从平衡位置拉下 6 [厘米]，然后放开任其自由振动，求振动方程及振动能量。

[解]　取向下的方向作为位移的正向，并取重物的平衡位置作为原点，則从題意，初位移为 $x_0=6$ [厘米]，而初速度为 $v_0=0$。所以振动的振幅和初周相为

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=x_0=6\,[\text{厘米}],$$

$$\varphi=\operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)=0。$$

所以振动的方程是

$$x=A\cos\left(2\pi\frac{t}{T}+\varphi\right)=6\cos\frac{2\pi}{0.55}t=6\cos(3.6\pi t)。$$

振动的能量是

$$W=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 6^2=6\,[\text{千克力}][\text{厘米}]$$

$$=0.06\,[\text{千克力}][\text{米}]。$$

§4-1-5. 同方向振动的合成　拍

有时我們会遇到一种运动，在这运动中，质点同时参与两个振动，例如，当有两个声波同时傳播到空間某一点时，該点空气质点