

依据国家教育部中小学最新教材编写

立体几何

主 编: 北京师范大学 向佐初

高 中

(修订版)

北京师范大学实验中学

北京师范大学附中

北京师范大学二附中

首都师范大学附中

北京四中



高中精讲
检测丛书

西苑出版社

·高中精讲检测丛书·

高中立体几何

(修订版)

主 编 向佐初

副 主 编 巴 丹 王青悦

本卷主编 陈家骏

西苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中立体几何/向佐初主编. —北京:西苑出版社,
1998. 9

(高中精讲检测丛书)

ISBN 7-80108-129-3

I. 高… II. 向… III. 立体几何课—高中—教学参考资料 IV. G633. 633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 14802 号

高中立体几何

主 编 向佐初

出版发行 西苑出版社

通讯地址 北京市海淀区永定路 7 号 100039

电 话 68173419 传 真 68173417

印 刷 北京市通州次渠印刷厂

经 销 全国新华书店

开 本 787×1092 毫米 1/32 印张 12.5

印 数 1—5000 册 字数 255 千字

1999 年 6 月第一版 1999 年 6 月第一次印刷

书 号 ISBN 7-80108-129-3/G·27

定 价:13.80 元

(凡西苑版图书有缺漏页,残破等质量问题本社负责调换)

《高中精讲检测丛书》编委会

主 编	向佐初					
副 主 编	巴 丹	王青悦				
编 委	巴 丹	储瑞年	戴凤春	阮国杰	苏明义	
	李建华	李意如	马玉森	羿 阳	张 月	
	杨瑾月	李月华	杨春明	向佐初	王青悦	
	吴建新	陈杰勋	陈家骏	陈鸿征	刘志光	
	张逸民	熊开昌	张绛珠	王邦平	霍永生	
	傅佑珊	尹宝一	胡国燕	张书琴	蒙 琳	
	王玉琴	石俊华	李国柱	洪晓梅	佟君亮	
撰 稿 者	戴凤春	巴 丹	张 月	向佐初	李月华	
	王青悦	羿 阳	杨之梅	鲁 月	方桂莲	
	桂 杜	张 明	段化杰	陈红艳	杨瑾月	
	陈鸿征	储瑞年	王江慈	王小丹	桑登珠	
	阮国杰	刘雪芬	李建华	谷 丹	王玲华	
	赵 菁	樊 景	陈家骏	李晓殷	马红嫣	
	丁 震	窦 青	梁 溪	王玉英	毕 铭	
	傅佑珊	尹宝一	唐煜光	丁素琴	葛润芝	
	牛振坤	李保珍	齐素鸾	何小伯	康建业	
	宋天仆	苏明义	王邦平	霍永生	张继达	
	杨惟文	张恩海	陶昌宏	庞炳北	马 克	
	赵宏程	砺瑾琳	王 岳	佟君亮	罗 敏	

张绛珠	张淑琴	张 莉	魏 伟	李秀娟
尹鲜芝	杜素英	严 洁	张景富	王景山
王 颖	李 勇	薛艳梅	赵 研	王艳军
李国柱	张 滨	胡国燕	许连璧	刘玉平
朱湘君	张立新	崔君方	李 艳	陈 丽
尹欲宏	蒙 琳	栾 谦	张秀芬	马志雄
林春芳	郑秀华	周朝晖	蒋学敏	狄 燕
李金英	时振兴	葛玉红	吴建新	张书琴
张培靖	吴 峥	安宏志	薛景娣	吴 磊
张梦云	路 华	石俊华	万 姐	黄秀英
刘玉清	熊珍秀	杨玉娇	郭晓军	玲 燕
阎黛雅	邢素芬			

前 言

为了加强高中基础知识与同步强化训练,帮助学生更好地学习和掌握教学大纲规定的内容,给学生复习、考试提供一套高质量有特色的导读丛书,以利于全面提高学生素质,打好基础,顺利应试,我们编撰了这套《高中精讲检测丛书》。本《丛书》由北京师范大学有关专家学者领衔主持,并组织北京师范大学实验中学、北京师范大学附中、北京师范大学二附中、首都师范大学附中、北京四中、北京大学附中、北京二中、北京九中、北京八十中、北京理工大学附中、北京师范大学、北方工业大学、北京教育学院西城分院、北京市石景山区教师进修学校,以及其他部分省市教育系统的教授、副教授、特级教师、高级教师、博士、讲师和基础教育专家共百余人,精心笔耕而成。

《丛书》以国家教育部审定的《全日制中学语文、数学、物理、化学、英语教学大纲(修订本)》为指导,以新教材为依据,按教科书的安排逐章编写,力求少而精,特别注意教材知识点的提炼,重点难点精讲,解题技巧与思路分析,巩固提高练习,期中期

末测试,还兼顾高考的需要,收录高考指导等方面的内容,涵盖了高中全部教材知识点。

这套《丛书》与教材同步配套,知识要点精炼,释文简明确切,例证新颖翔实,论证深入浅出,内容全面丰富,重点突出,独树一帜,具有较强的实用性、指导性、权威性,是高中生最佳的辅导读物,也是高中教师、家长们备课和辅导时较好的参考材料。

我们希望广大的高中生、教师、家长会喜欢她、珍爱她,这将使您受益匪浅。

本《丛书》在编辑出版中,曾得到中共中央办公厅西苑出版社的大力支持、杨宪金社长兼总编辑的指导及编辑工作人员的热情帮助,谨在此表示衷心的感谢。由于编写时间仓促,缺点和疏漏是难免的,恳请广大读者、专家批评指正。

北 京 师 范 大 学

向佐初
巴 丹

目 录

第一章 直线和平面	1
第一节 平面	5
一、教材精讲	5
二、思考和练习	15
三、综合测试	17
四、本节练习和综合测试答案	22
第二节 空间两条直线	28
一、教材精讲	28
二、思考和练习	42
三、综合测试	43
四、本节练习和综合测试答案	48
第三节 空间直线和平面	52
一、教材精讲	52
二、思考和练习	89
三、综合测试	89
四、本节练习和综合测试答案	97
第四节 空间两个平面	110
一、教材精讲	110
二、思考和练习	162
三、综合测试	163
四、本节练习和综合测试答案	169
第二章 多面体和旋转体	193

第一节 多面体	196
一、教材精讲	196
二、思考和练习	243
三、综合测试	344
四、本节练习和综合测试答案	347
第二节 旋转体	261
一、教材精讲	261
二、思考和练习	302
三、综合测试	302
四、本节练习和综合测试答案	306
第三节 多面体和旋转体的体积	324
一、教材精讲	324
二、思考和练习	370
三、综合测试	370
四、本节练习和综合测试答案	376

第一章 直线和平面

【导引】

立体几何是研究空间图形的性质、画法、计算以及它们的应用的学科。

图形上的点不全在同一个平面内的图形,叫做空间图形,或叫做立体图形,空间图形是由空间的点、线、面组成的。

本章教材分四个单元:平面、空间两条直线、空间直线和平面、空间两个平面,主要研究直线与直线、直线与平面、平面与平面之间的平行与垂直两种位置关系。

立体几何课本共有“直线和平面”、“多面体和旋转体”两章,其中第一章直线和平面的位置关系是第二章多面体和旋转体的概念、性质、直观图画法、表面积和体积公式等内容的理论根据,牢固掌握第一章是学好第二章的关键,也是学好立体几何的关键。

总结近几年的高考立体几何试题,可以看到以下倾向:

1. 每年都以第一章为重点,第一章又以“平行”与“垂直”为重点。

2. 立体几何的解答题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行与垂直关系及求几何体的面积和体积,考查空间想象能力、逻辑推理与表达能力、计算能力。

3. 在考查空间概念和空间想象力的基础上,注意把论证与计算结合起来,而在计算中着重于空间的距离、角与面

积体积。

空间观念和公理化体系处理数学问题的思想方法,是学生进入高等学校学习时必须具备的数学基础。

初学立体几何的学生,学习这门课程困难的原因是空间想象力差.对于空间的线线、线面、面面的位置关系认识不清晰,因而无法论证它们之间的性质和计算有关的量的大小.所以立体几何的教与学之初应首先建立空间观念。

建立空间想象力的方法,其一是把有关概念尽可能地与生活实际中的事物或直观教具联系起来,另一个方法是通过看图、想图及画直观示意图.尽量利用图形的直观性来积累学生的空间观念,以发展他们的空间想象力,在立体几何教学中特别重要。

由于画在二维平面上用来表示三维空间图形的直观示意图*与实际的空间形象在感官映象上有差别(例如,实际的直角在直观示意图里可能画成锐角或钝角;又如直观示意图中的相交直线在实际上不一定有交点),因此空间想象力差的学生,不能看懂“变了样”的图形中的线线、线面、面面关系,不会在这“变了样”的图形上证明与计算.因此从图入手,逐步培养学生的空间想象力,是初学立体几何者的当务之急。

另外,要训练学生从多方位、多视角来审视图形。

例如 图 1-1 的相交直线 AB 、 CD ,它可能是:

1. 相交直线.
2. 异面直线(图 1-2).

* 注:这里所说的直观图,不是严格按照斜二测画法规则画的图

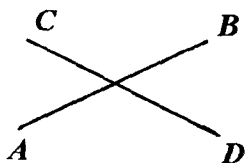


图 1-1

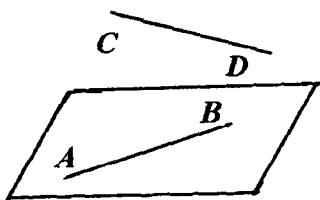


图 1-2

3. 相交平面(图 1-3).

4. 直线和平面相交(图 1-4).

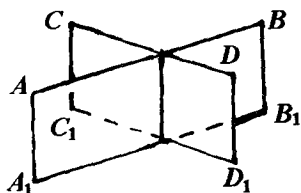


图 1-3

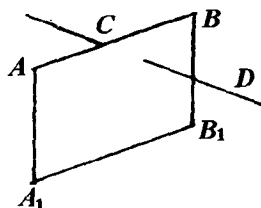


图 1-4

正因为立体几何的示意图是“变了样”的,所以在研究空间的线线、线面、面面关系时,不能凭直观和想当然,而应在已知条件及公理、定理、定义的基础上,逻辑推理.随着学习进程的推移,要逐渐加强推理意识,要求学生做到落笔有据,言之有理,条理清楚.

要训练学生掌握数学语言的相互转化与运用.数学语言的形态有三种:普通语言(口头语言)、符号语言和图象语言.

符号语言是数学对象的简缩表达方式,熟练掌握它和表达它本身就是数学能力的组成部分.

图象语言是形象思维与逻辑思维之间的桥梁,它的熟练运用与数学思维能力发展的关系十分密切.

在立体几何解题中,要注意立体几何与平面几何的联系和转化.培养学生能把立体几何中的问题归结为平面几何中的问题,从而使他们能够有效而合理地运用平面几何的知识来解决立体几何问题,即“化空为平”.

另一方面,也要使学生注意空间图形性质和平面图形性质的区别.要防止学生滥用平面几何定理的现象,例如过直线上一点作此直线的垂线,学生往往以为只有一条,再如在论证两条直线互相平行时,学生往往只考虑它们不相交,而不注意它们是否在同一平面内等等.

要提醒学生,并非所有的平面几何结论都可以推广到空间的,必须在证明所研究的图形是平面图形之后,才能引用平面几何的结论.

为了使读者自我检测空间想象力是否丰富,是否能够看了纸面上所画的图形随心所欲地产生立体感,这里附上一幅有趣的图形,如图 1-5,图中画了 24 个平行四边形.

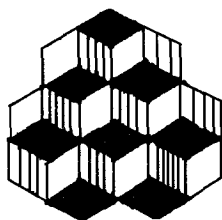


图 1-5



图 1-6

如果视线从上往下,把黑色各形看做正方体的上底面,

把有竖线阴影的各形看作正方体的左侧面(图 1-6),可看到图 1-5 中由上往下数第一层有一个正方体,第二层有两个正方体,第三层有三个正方体,共有六个正方体.

如果视线从下往上,把黑色各形看作正方体的下底面,把有竖线阴影的各形看作正方体的右侧面(图 1-7),可看到图 1-5 中,由下往上数,第一层有两个正方体,第二层有三个正方体,第三层有两个正方体,共有七个正方体.



图 1-7

图 1-5,对于不同视角,产生凹凸、立体感有一定帮助.

第一节 平面

一、教材精讲

(一)知识要点

1. 本节介绍了平面的基本性质的三个公理和公理 3 的三个推论.它们是在空间确定平面位置的主要依据,也是本节教材的中心内容.

2. 关于点、直线的概念在初中平面几何里是作为基本概念来处理的,仅通过具体事物对它们的性质描述,才得到明确的概念,并未给出定义.在此也参照平面几何系统将平面看成一个基本概念,并未用更一般的概念来定义.

3. 本节介绍了点、线、面之间关系用集合符号表示.这样,几何元素间的位置关系从普通语言到符号语言的转化,

进一步绘成草图,既熟悉了符号语言的运用,又增加了绘图能力的培养.

4. 平面的宽广是无限的,所画的平行四边形是表示这个平行四边形所在的整个平面,在需要时我们可以把它扩展出来,在需要时也可以用三角形、菱形等封闭曲线图形表示平面.

5. 立体几何中,被遮住的部分画成虚线或不画,以产生前后、左右、上下的空间想象.

(二)重点难点提示

1. 平面的三个公理(即基本性质)是本节的重点,也是难点之一,它是立体几何中逻辑论证的主要依据.

2. 空间图形的画法也是一个难点,在本节则表现为点线面关系的直观图,对于初学立体几何的学生来说,是较难于入门的,因此必须扎实训练,熟练掌握.

把平面画成平行四边形,锐角画成 45° ……的平面,仅是指画水平放置的平面,对其他位置的平面并不要求照此方法画.在教师的教学和学生的练习中,把空间图形在纸上或黑板上画得既富有立体感,又能表达出图形各主要部分的位置关系和度量关系的图形就可以了,关键在于正确画出虚线(挡住的轮廓线)和实线(可见的轮廓线).

3. 公理 2、公理 3 及公理 3 的三个推论中都有“有且只有一个”,学生对这个词比较生疏、难懂.为此,作一些解释如下:“有”说明图形是存在的,“只有一个”说明图形是唯一的,符合某一条件的图形既然存在,而且只有一个,这说明这个图形是完全确定的,因此“有且只有一个”和“确定”是同义词.

(三) 范例分析

例1 空间三条直线,如果其中一条直线和其他两条直线都相交,那么这三条直线能确定几个平面?

分析 如果由已知条件可能产生多种位置关系,应进行“分类讨论”,分类时应满足下列要求:

(1)所划分的各个子集既不重复又不遗漏.

(2)每次分类必须保持同一个分类标准.

近几年高考数学,对分类讨论的数学思想每年必考.

解 本题按此三直线交点个数来分类讨论.

设 a, b 是两条直线,直线 c 和 a, b 都相交.

(1)如果 a, b, c 相交于一点,可能确定三个平面(图 1-8)或一个平面(图 1-9).

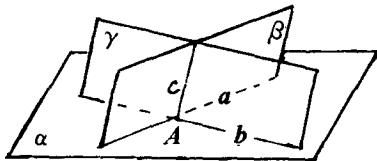


图 1-8

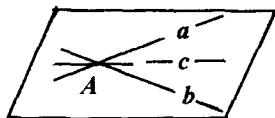


图 1-9

(2)如果 a, b, c 相交于两点,可能确定两个平面(图 1-10)或一个平面(图 1-11).

(3)如果 a, b, c 相交于三点,即“两两相交”,可确定一个平面(图 1-12).

例2 一直线和这直线外不在同一直线上的三点,可以确定几个平面?

分析:设直线 l , 不共线的三点 A, B, C .

分类讨论:

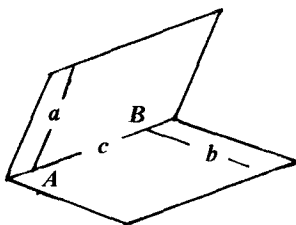


图 1-10

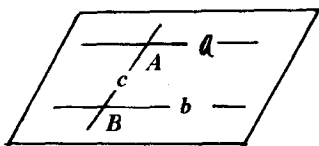


图 1-11

(1) 三点中任两点和直线 l 不共面. 则 A, B, C 三点确定一个平面; l 与 A 确定一个平面; l 与 B 确定一个平面; l 与 C 确定一个平面, 共可确定四个平面.

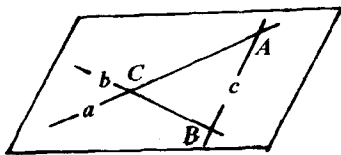


图 1-12

(2) 三点中有两点和直线 l 共面. 可确定三个平面.

(3) 三点都与直线 l 共面, 可确定一个平面.

例 3 两个平面把空间分成几个部分? 试画出图形.

分析: 这两个平面可能相交也可能不相交.

解答: (1) 如果这两个平面相交, 把空间分成四个部分 (图 1-13).

(2) 如果这两个平面不相交, 把空间分成三个部分.

例 4 三个平面把空间分成几个部分? 试画出图形.

分析: 设这三个平面分别为 α, β, γ ,

$$\begin{cases} \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 相交} & \begin{cases} \alpha, \beta \text{ 的交线在 } \gamma \text{ 上 (图 1-15)} \\ \alpha, \beta \text{ 的交线与 } \gamma \text{ 不相交 (图 1-16)} \\ \alpha, \beta \text{ 的交线与 } \gamma \text{ 相交 (图 1-17)} \end{cases} \\ \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 不相交} & \begin{cases} \gamma \text{ 与 } \alpha, \beta \text{ 不相交 (图 1-18)} \\ \gamma \text{ 与 } \alpha, \beta \text{ 相交, (图 1-19)} \end{cases} \end{cases}$$