总主编 古之雄

# 阳光课堂

学生用书

同步全新“2+1”辅教助学模式

2本学生用书　阳光课堂+阳光练习册

1本教师用书

## 高二数学 上

试验修订版

内蒙古少年儿童出版社

超能学习法丛书

CNXXFCS

总主编 古之雄

# 高效课堂

## 高二数学（上）


总 主 编：古之雄

本册主编：王少军

编写人员：王少军　尹俊磊　吕学英


学生用书


内蒙古少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

阳光课堂.高二数学/古之雄主编.—通辽:内蒙古少年儿童出版社,2006.4
(超能学习法丛书)
ISBN 7-5312-2001-6

Ⅰ.阳... Ⅱ.古... Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 026642 号

责任编辑/庆格乐图
装帧设计/李运平
出版发行/内蒙古少年儿童出版社
地址邮编/内蒙古通辽市霍林河大街西 312 号(028000)
经　　销/新华书店
印　　刷/北京市业和印务有限公司
字　　数/3510 千字
规　　格/880×1230 毫米　1/16
印　　张/127.75
版　　次/2006 年 4 月第 1 版
印　　次/2006 年 4 月第 1 次印刷
定　　价/243.00 元(全 9 册,含阳光练习册)

# 阳光像花一样绽放

它从天宇间挥洒，
穿过时光的灼彩，
亮丽了所有的颜色，
温暖了所有的角落，
叫醒了沉睡的花朵。
它让教室的玻璃窗也晶莹，
它让昏暗的45分钟变快乐！
它，是阳光！
哪怕远自天际，
却不惹一丝尘埃，
纯净、热情、执著依旧，
创造人世间最美的神话！

**《阳光课堂》，让阳光洒进课堂，洒向黑板、课桌、书本，洒向同学们播种知识的心田。**

### 透明式讲解

点点俱到，条条分明，按教学大纲的课时进程，有层次、有梯度、有节奏地将各知识点及其原理精剖细解，讲解语言平和、平实、平稳，如涓涓细流直入心底。不跳跃不拖沓，既针对了大纲知识点，又打开视野，溯本求源，讲知识点原理，讲新旧教材变化，讲运用，讲考查，让知识透明，让思维闪光！

### 直射式训练

高效科学的训练题，直接针对讲解知识点，实现第一时间知识互动，试题选材新颖，突出创新和拓展潜力的挖掘，注重趣味性和创新性的结合，针对性强，举一可反三，不做任何无用功，甚至不做任何低效功。直射式训练，用高效率占领学习强势。

### 过滤式检测

雨水洗礼后的阳光才有彩虹的美丽，经得起考验的知识才是真正掌握的知识。综合、灵活、多变的题型，考查了你知识掌握的程度，同时更证明了你运用知识的能力。没有一道题是单独考查知识点的，没有一道题是只锻炼实践能力的。综合题、拓展题、应用题细密如雨，冲洗飘浮不定的疑惑与不解，弥补课堂吸收的不足，完善知识吸引全过程，做到百分百溶解，不留知识遗漏。

世界上，只有知识最让人顶礼膜拜，它厚重如巍巍高山，广博如浩翰大海。然而攀登高山，让我们觉得自己过于渺小，遨游大海又让我们觉得轻如浮萍！让我们将知识化为阳光，瑰丽而神秘，蕴含无限的能量，放射让距离失去意义的强光！让知识的阳光，跳到你的课桌上，背包里，跳到你的心田上，幻化成你自己的能量！

一个新的春天，《阳光课堂》在你的校园里，像花一样绽放！！！

《阳光课堂》编委会

2006年4月

目录

## 第六章 不等式



## 第七章 直线和圆的方程

## 第八章 圆锥曲线方程

# 目 录

# 第六章 不等式

学习札记

## 一、本章重难点预告

全章重点知识包括三部分：不等式的性质、不等式的证明和简单不等式的解法．其中难点是应用两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理求最值，还有不等式的证明．

## 二、高考指路

**考纲要求**：(1)理解不等式的性质及证明．(2)掌握两个（不扩展到三个）正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理，并会简单应用．(3)掌握分析法、综合法、比较法证明简单的不等式的方法．(4)掌握简单不等式的解法．(5)理解不等式$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$．

**考题趋势**：在高考中，不等式一直是考查的重点内容．不仅测试有关不等式的基础知识、基本技能、基本方法，而且还测试运算能力、逻辑能力以及运用不等式的有关知识去分析问题和解决问题的综合能力．在高考试题中，有关不等式的解法是每年必考的内容，多以选择题、填空题和解答题形式出现，为容易题或中等题．不等式的实际应用问题为稍难题，占比例较重，是考生得分率低的题，因此，在学习时应引起足够的重视．从题型上看，选择、填空题主要考查不等式的性质、比较大小和解简单不等式；解答题主要考查含参数的不等式的解法，范围和最值型综合题；关于不等式的实际应用是历年高考必考内容．综合导数、数列、三角、解析几何是高考中常考内容．

本章近五年高考统计情况如下表：

| 年份 | 比重 | 分值 | 题型 |
|---|---|---|---|
| 2001 | 13% | 20 | 选择题、解答题 |
| 2002 | 12% | 18 | 填空题、解答题 |
| 2003 | 16% | 24 | 填空题、解答题 |
| 2004 | 13% | 20 | 填空题、解答题 |
| 2005 | 15% | 22 | 选择题、解答题 |

## 第一节 不等式的性质

### 第1课时 比较大小

#### 一、基本知识点细讲

**知识点1：作差比较大小．**

**详析**：要比较两个式子的大小，常用作差法比较大小．一般步骤为：作差→变形→判断（差与零的大小）→结论．其中，变形最关键．变形的一般规律是：利用因式分解或配方法等手段尽量将差式化成个因式的乘积或完全平方和的形式．如果差式含两个变量．可以以其中一个为主元，将其视为该元的函数，然后利用判别式变形，如要比较$a^2$与$2a-1$的大小关系，可以$a^2-(2a-1)=a^2-2a+1=(a-1)^2\geqslant0$，因此$a^2\geqslant2a-1$．显然，变形的目的是为了便于判断差的符号．作差法比较大小的理论依据是$a>b\Leftrightarrow a-b>0$，$a<b\Leftrightarrow a-b<0$，$a=b\Leftrightarrow a-b=0$．要比较两式大小，只要看它们差与零的大小关系就可以了．从而降低了难度，体现了由难向易的转化与化归思想．

**应注意问题**：①因式分解尽量彻底，越彻底越便于判断差的符号．②要注意取"＝"和不取"＝"的情况．③如果符号不确定时，要注意分情况讨论，注意分类讨论思想在解题过程中的应用．④如果题目中有限制条件，一定不要忽略，它的存在对结论有一定的制约作用．

**【例1】** $x、y\in\mathbf{R}$，试比较$3x^2+2xy+y^2$与$2x^2+xy$的大小．

**解**：$3x^2+2xy+y^2-(2x^2+xy)=x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2$．

因为$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2\geqslant0$，$\frac{3}{4}y^2\geqslant0$，所以$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geqslant0$．所以$3x^2+2xy+y^2\geqslant2x^2+xy$．

**评析**：本题属于无限制条件的两个多项式比较大小，想到用作差法．差式化为$x^2+xy+y^2$之后，因为$x、y$为实数，不能判断$x^2+xy+y^2$比零大，还是比零小．联想到二次函数，我们把上式看作关于$x$的一元

学习札记

二次函数，$y$ 当作系数，进而配方，化为两个完全平方式和的形式，很容易地判定了符号. 因此，配方法是常用的手段. 需要注意的是作差之后一定要“言之有理”，不要主观臆断.

**知识点 2：作商比较大小.**

**详析**：当要比较的两式均为正值时，选用作商比较大小显得更简捷. 比如要比较 $a^b b^a$ 与 $b^a a^b$ 的大小，作差之后再继续化简有些困难. 若采用作商法就能将问题解决. 其理论依据为 $\frac{A}{B}>1$，且 $B>0 \Rightarrow A>B$，基本步骤为：作商→变形→判断（商与 1 的大小关系）→结论.

**【例 2】** $a>0,b>0$，试比较 $a^b b^a$ 与 $a^a b^b$ 大小.

**解**：$\frac{a^a b^b}{a^b b^a}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}$，当 $a=b$ 时，$a^a b^b=a^b b^a$，当 $0<a<b$ 时，$a-b<0$，$0<\frac{a}{b}<1$，所以 $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，即 $\frac{a^a b^b}{a^b b^a}>1$. 又 $a^b b^a>0$，所以 $a^a b^b>a^b b^a$. 当 $0<b<a$ 时，$a-b>0$，$\frac{a}{b}>1$，所以 $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，所以 $\frac{a^a b^b}{a^b b^a}>1$，所以 $a^a b^b>a^b b^a$. 综上可知，当 $a=b$ 时，$a^a b^b=a^b b^a$；当 $a\neq b$ 时，$a^a b^b>a^b b^a$.

**评析**：因为所给两式均为幂形式，所以作商法容易入手.

本题须注意三点：①同底数幂相除，底数不变，指数相减，如 $\frac{a^a}{a^b}=a^{a-b}$，$\frac{b^b}{b^a}=b^{b-a}=\left(\frac{1}{b}\right)^{a-b}$. 同底数幂相乘底数不变，指数相加. ②指数函数的性质，$y=a^x$，当 $a>1$ 时，若 $x>0$，则 $y>1$；当 $0<a<1$ 时，若 $x<0$，则 $y>1$. ③分类讨论，最后把结论进行总结.

## 二、基本练力点细讲

**能力点：能利用比较法比较两式大小.**

**详析**：比较法（作差法、作商法）是比较两个式子大小的有效方法，贯穿于整章内容，甚至于高中数学的各个章节，因此，我们应熟练掌握和运用.

**【例】** 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，试比较 $a^4-b^4$ 与 $4a^3(a-b)$ 的大小.

**解**：$a^4-b^4-4a^3(a-b)$

$=(a+b)(a-b)(a^2+b^2)-4a^3(a-b)$

$=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3-4a^3)$

$=(a-b)[(a^2b-a^3)+(ab^2-a^3)+(b^3-a^3)]$

$=-(a-b)^2\cdot(3a^2+2ab+b^2)$

$=-(a-b)^2\cdot\left[\left(\sqrt{3}a+\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{2b^2}{3}\right]\leqslant 0$（当且仅当 $a=b$ 时取等号）. 所以 $a^4-b^4\leqslant 4a^3(a-b)$.

**评析**：本题要比较的两式有公共的因式，又积的符号由各因式的符号确定，故对差式的变形可考虑因式分解. 将差的符号的判定问题变为各因式的符号的判定问题，从而把高次降为低次，降低了难度.

## 三、综合能力点细讲

**详析**：不等式灵活多变，常常和我们学过的函数如二次函数、指数函数、对数函数综合在一起进行考查. 因此要熟悉这些函数的性质和运算.

**【例】** 已知 $x>0$，且 $x\neq 1$，$f(x)=1+\log_x 3$，$g(x)=2\log_x 2$，试比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 大小.

**解**：$f(x)=\log_x 3x$，$g(x)=\log_x 4$，$f(x)-g(x)=\log_x 3x-\log_x 4=\log_x\frac{3x}{4}$，当 $\frac{3x}{4}=1$，即 $x=\frac{4}{3}$ 时，$\log_x\frac{3x}{4}=0$，所以 $f(x)=g(x)$.

当 $\begin{cases}\frac{3x}{4}>1,\\ x>1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<\frac{3}{4}x<1,\\ 0<x<1,\end{cases}$ 即 $0<x<1$ 或 $x>\frac{4}{3}$ 时，$\log_x\frac{3x}{4}>0$，所以 $f(x)>g(x)$. 当 $\begin{cases}\frac{3}{4}x>1,\\ 0<x<1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<\frac{3}{4}x<1,\\ x>1,\end{cases}$ 即 $1<x<\frac{4}{3}$ 时，$\log_x\frac{3x}{4}<0$. 所以 $f(x)<g(x)$.

综上，当 $x=\frac{4}{3}$ 时，$f(x)=g(x)$；当 $0<x<1$ 或 $x>\frac{4}{3}$ 时，$f(x)>g(x)$；当 $1<x<\frac{4}{3}$ 时，$f(x)<g(x)$.

**评析**：①先化简，再作差. ②对数函数 $y=\log_a x$（$a>0,a\neq 1$）的性质：当 $\begin{cases}a>1,\\ x>1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<a<1,\\ 0<x<1\end{cases}$ 时，函数值 $y>0$，当 $\begin{cases}0<a<1,\\ x>1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a>1,\\ 0<x<1\end{cases}$ 时，函数值 $y<0$. ③分类时要条理清楚，不重不漏.

## 四、新型题细讲

（一）说理题

**详析**：数学的形成和发展来源于人们的生产实践. 善于观察，你会发现生活中处处都有数学的影子，认真思考，用所学知识加以解释，你会有很多意外的收获. 这是数学的重要应用. 如用本节所学的比较法中的作差法来解释日常生活中的一些日常现象.

**【例 1】** 日常生活中有句俗语：“糖水加糖甜更甜”你能用所学内容加以解释吗？

**解**：设 $a$ 克糖水中含有 $b$ 克糖（$a>b>0$）. 若再加入 $m$ 克糖，加糖前后浓度发生了变化，开始的浓度为 $\frac{b}{a}$，后

来的浓度为$\frac{b+m}{a+m}$,则$\frac{b+m}{a+m}-\frac{b}{a}=\frac{(b+m)\cdot a-b(a+m)}{a\cdot(a+m)}$

$=\frac{ab+am-ab-bm}{(a+m)\cdot a}=\frac{(a-b)m}{(a+m)\cdot a}$.

因为 $a>b>0,m>0$,所以$\frac{(a-b)m}{(a+m)\cdot a}>0$.

即$\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}$. 即加糖后浓度更大了,所以更甜了.

**评析**:本题把化学中的浓度问题与数学中不等式的比较大小有机地结合在一起. 是一个跨学科的综合题,是数学在其他学科中的应用. 体现了数学的工具性,活学活用,解决生活中的实际问题是高考中的热点问题.

**(二)探究性题**

**详析**:本节中的探究性问题主要通过比较时间长短而确定先到后到问题.

**【例 2】** 甲、乙两人同时从食堂到教室. 甲一半路程步行,一半路程跑步,乙一半时间步行,一半时间跑步. 若两人的步行速度和跑步速度均相同,问谁先到达教室,为什么?

**解**:设从食堂到教室的总路程为 $s$,跑步速度为 $u$,步行速度为 $v$,且 $u>v$. 甲、乙所用时间分别为 $t_甲$、$t_乙$ 则由题意可得

$\frac{s}{2u}+\frac{s}{2v}=t_甲$. $\frac{t_乙}{2}\cdot u+\frac{t_乙}{2}\cdot v=s$. 即 $t_甲=\frac{s(u+v)}{2uv}$,$t_乙=\frac{2s}{u+v}$.

所以 $t_甲-t_乙=\frac{s(u+v)}{2u+v}-\frac{2s}{u+v}=\frac{s[(u+v)^2-4uv]}{2uv\cdot(u+v)}=\frac{s(u-v)^2}{2uv\cdot(u+v)}$.

因为 $s$、$u$、$v$ 均为正数,所以 $t_甲>t_乙$,即乙先到达教室.

**评析**:本题利用时间、速度、路程三者关系,将所探讨的问题转化为比较甲、乙两人时间大小的问题,通过作差轻而易举地得到确定的结论. 通过本例,提醒我们一定要认真分析题意,联系所学,培养解决问题的能力.

## 五、巧题妙解

**【例】** 若 $(\log_2 3)^x-(\log_5 3)^x\geqslant(\log_2 3)^{-y}-(\log_5 3)^{-y}$,则(  )

A. $x-y\geqslant0$　　B. $x+y\geqslant0$

C. $x-y\leqslant0$　　D. $x+y\leqslant0$

**解**:因为 $\log_2 3>1$,所以 $y=(\log_2 3)^x$ 为增函数. 又 $0<\log_5 3<1$,所以 $y=(\log_5 3)^x$ 为减函数. 所以 $f(x)=(\log_2 3)^x-(\log_5 3)^x$ 为增函数. 所以原不等式即 $f(x)\geqslant f(-y)$. 所以 $x\geqslant-y$,即 $x+y\geqslant0$,所以选 B.

**评析**:好多同学看到此题,不知从何入手. 本题利用$(\log_2 3)^x$ 和 $(\log_5 3)^x$ 构造出一个函数 $f(x)=(\log_2 3)^x-(\log_5 3)^x$,利用 $f(x)$ 函数的单调性(单调递增)轻松地得到了 $x$ 与 $y$ 的关系式. 本题的巧妙之处就在于恰当地构造出函数 $f(x)$,起到了事半功倍的效果,确有可借鉴之处.

## 六、高考题细讲

**【例】** (2004,全国,5 分)已知:$a^2+b^2=1$,$b^2+c^2=2$,$a^2+c^2=2$,则 $ab+bc+ac$ 的最小值为(  )

A. $\sqrt{3}-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}-\sqrt{3}$

C. $-\frac{1}{2}-\sqrt{3}$　　D. $\frac{1}{2}+\sqrt{3}$

**解**:由$\begin{cases}a^2+b^2=1,\\b^2+c^2=2,\\a^2+c^2=2,\end{cases}$得$\begin{cases}a^2=\frac{1}{2},\\b^2=\frac{1}{2},\\c^2=\frac{3}{2},\end{cases}$所以$\begin{cases}a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\\b=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\\c=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}.\end{cases}$

因此,要使$ab+bc+ac$ 取得最小值,须 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$b=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$c=-\frac{\sqrt{6}}{2}$,则 $ab+bc+ac=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$,所以答案应选 B.

**评析**:本题很容易解出 $a$、$b$、$c$ 并通过观察、比较,给予 $a$、$b$、$c$ 恰当的取值,从而保证 $ab+bc+ac$ 取值最小. 因此避免了一场大规模的运算,进而降低了解题的难度.

# 第 2 课时　不等式的性质

## 一、基本知识点细讲

**知识点 1:定理 1、定理 2.**

**详析**:定理 1:$a>b\Rightarrow b<a$;$b<a\Rightarrow a>b$,即不等式具有对称性. 定理 2:$a>b,b>c\Rightarrow a>c$,即不等式具有传递性,是联系两个及两个以上不等式的桥梁. 在比较三个或三个以上式子大小时,经常用到这个性质,还可写成:$a<b,b<c\Rightarrow a<c$. 应用时要保证同向能传递.

**【例 1】** 若 $m$、$n$、$p$、$q$ 四个数满足①$q>p$;②$m+$

学习札记

学习札记

$n=p+q$；③$m+q<n+p$，则有（　）

A. $n>p>q>m$　　B. $m>q>p>n$

C. $q>n>m>q$　　D. $n>q>p>m$

**解**：由②$m+n=p+q$，得 $n=p+q-m$. 代入③得 $m+q<p+q-m+p$，即 $m<p$. 又由①$q>p$，得 $q>p>m$. 由②$m+n=p+q$，又 $m<p$ 得 $n>q$. 故由传递性得 $n>q>p>m$，即选 D.

**评析**：要比较四个数大小顺序，一定要结合已知条件，找到正确合理的步骤，理出头绪，应用不等式性质，比较出大小. 本题由②得到 $n$ 的表达式，代入③得 $m<p$. 目的为减少字母个数. 还应注意由 $m+n=p+q$，$m<p$，得 $n>q$ 易忽视.

本题还可以用下面解法：

$$\begin{cases}③\Rightarrow q-n<p-m,\\ ②\Rightarrow p-m=n-q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q-n<n-q,\\ p-m>m-p\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q<n,\\ p>m.\end{cases}$$

由①得 $n>q>p>m$. 这种表达显得干净利落，但需要严密的逻辑思维.

**知识点 2：定理 3 及推论.**

**详析**：定理 3：$a>b\Rightarrow a+c>b+c$，即不等式两边同时加上同一个数，不等式不改变方向，还可得出：若 $a+b>c$，即 $a+b-b>c-b$，即 $a>c-b$，就是说，不等式中任何一项改变符号后，可以把它从一边移到另一边，但不等号方向不改变，应强调注意移项变号. 推论：$\left.\begin{matrix}a>b\\ c>d\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+c>b+d$. 它指出同向不等式两边分别相加，所得不等式与原不等式同向. 即同向不等式可以相加.

【例 2】　已知$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$，$m>n$. 求证：

$\frac{a+b}{b}+m>\frac{c+d}{d}+n$.

**证明**：因为$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$，所以$\frac{a}{b}+1>\frac{c}{d}+1$，即$\frac{a+b}{b}>\frac{c+d}{d}$. 又 $m>n$，所以$\frac{a+b}{b}+m>\frac{c+d}{d}+n$.

**评析**：题目虽小，但反映了定理 3 的重要应用. 此题给我们的提示：学习要从一点一滴做起，积少成多，才能夯实基础，进一步提高能力.

**知识点 3：定理 4、定理 5 及两个推论.**

**详析**：定理 4：$a>b，c>0\Rightarrow ac>bc$，$a>b，c<0\Rightarrow ac<bc$.

定理 5：如果 $a>b>0$，那么$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（$n\in\mathbf{N}$，且 $n>1$）.

定理 4 指出：不等式两边可以同时乘以同一个数，但乘以同一正数不等式不变号，乘以同一负数不等式要变号.

推论 1：$a>b>0，c>d>0\Rightarrow ac>bd$.

推论 2：$a>b>0，\Rightarrow a^n>b^n$（$n\in\mathbf{N}$ 且 $n>1$）.

推论 1 指出：同向不等式可以相乘，但一定要注意前提条件，即两边均大于零，千万注意不要超范围，不顾条件限制随便相乘. 推论 2 是推论 1 的推广，即任意有限个两边都为正数的同向不等式可以相乘.

【例 3】　已知：$a、b、c、d\in\mathbf{R}$，且 $ab>0$，$-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$，则下列各式恒成立的是（　）

A. $bc<ad$　　B. $bc>ad$

C. $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$　　D. $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$

**解**：因为$-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$，所以$\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$. 又 $ab>0$，所以$\frac{c}{a}\cdot ab>\frac{d}{b}\cdot ab$. 即 $bc>ad$. 所以选 B.

**评析**：不等式$-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$两边同乘以$-1$，不等式要变号，这常被忽视，一定要高度警惕. 如$-2<-1$，则$(-2)\cdot(-1)>(-1)\cdot(-1)$. 而$-2<-1$，则$(-2)\cdot 1<(-1)\cdot 1$. 不妨记住负变，正不变.

## 二、基本能力点细讲

**能力点：能对五个定理进行综合应用.**

**详析**：五个定理表达的是不等式的重要性质，在以后学习中常常使用. 是证明和解不等式的理论基础，一定要熟练掌握. 应注意两点：定理 3 说明同向不等式可以相加；不等式两边同时加上任何一个相同的数，原不等式不变号. 定理 4 说明同向不等式可以相乘，但必须两不等式均大于零；不等式两边可以同时乘以任何一个相同的数，但是乘正数不变号，乘负数要变号. 因此，在应用时要注意运用条件.

【例】　已知$-3<x<y<1$，$-4<z<0$，求$(x-y)\cdot z$的取值范围.

**解**：$\left.\begin{matrix}-3<y<1\Rightarrow -1<-y<3\\ -3<x<1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}-4<x-y<4\\ x<y\Rightarrow x-y<0\end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow -4<x-y<0\Rightarrow\left.\begin{matrix}0<y-x<4\\ -4<z<0\Rightarrow 0<-z<4\end{matrix}\right\}\Rightarrow 0<(y-x)\cdot(-z)<16$，$\Rightarrow 0<(x-y)\cdot z<16$.

**评析**：本题步步按照不等式性质，进行严格推导，并变负为正. 如$-4<x-y<0$ 化为 $0<y-x<4$. 又$-4<z<0$化为 $0<-z<4$. 目的是使用定理 4，体现了不等式性质的严格性. 我们平时也应注意这一点.

## 三、综合能力点细讲

**详析**：利用不等式的变换求取值范围是一类常见

的基础题，但由于不严格依据不等式的基本性质和运算法则，而导致范围扩大. 得到错误的结论.

**【例】** 设 $f(x)=ax^2+bx(a\neq 0)$ 且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2,3\leqslant f(1)\leqslant 4$. 求 $f(-2)$ 的取值范围.

**解法一：** 因为 $f(x)=ax^2+bx(a\neq 0)$，

所以 $\begin{cases}f(1)=a+b,\\ f(-1)=a-b.\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}[f(1)+f(-1)],\\ b=\dfrac{1}{2}[f(1)-f(-1)].\end{cases}$

所以 $f(-2)=4a-2b=3f(-1)+f(1)$. 而 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2,3\leqslant f(1)\leqslant 4$，所以 $3\leqslant 3f(-1)\leqslant 6$. 所以 $6\leqslant 3f(-1)+f(1)\leqslant 10$，即 $6\leqslant f(-2)\leqslant 10$.

**解法二：** 因为 $f(x)=ax^2+bx(a\neq 0)$，所以 $f(1)=a+b,f(-1)=a-b,f(-2)=4a-2b$. 设 $f(-2)=mf(-1)+nf(1)$，所以 $4a-2b=m(a-b)+n(a+b)$. 即 $4a-2b=(m+n)a-(m-n)b$. 所以 $\begin{cases}m+n=4,\\ m-n=2.\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}m=3,\\ n=1.\end{cases}$ 所以 $f(-2)=3f(-1)+f(1)$. 因为 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，所以 $3\leqslant 3f(-1)\leqslant 6$. 所以 $6\leqslant 3f(-1)+f(1)\leqslant 10$. 即 $6\leqslant f(-2)\leqslant 10$.

**评析：** 解法一运用了方程的思想，用 $f(1)$、$f(-1)$ 来表示 $a$、$b$，再把 $f(-2)$ 用 $a$、$b$ 来表示，最终用 $f(1)$、$f(-1)$ 来表示，从而求出 $f(-2)$ 的范围. 解法二为待定系数法，通过 $f(-2)$ 的表达式列等式，求出待定字母 $m$、$n$，从而求出 $f(-2)$ 范围. 当学习了第七章《直线和圆》之后，你还可以用线性规划来解决这个问题.

## 四、新型题细讲

### (一)探究性题

**详析：** 本节所涉及到的探究题主要是利用不等式的性质进行推理、探讨. 主要考查同学们的猜想、证明能力.

**【例 1】** 已知下列三个不等式：

①$ab>0$；②$-\dfrac{c}{a}<-\dfrac{d}{b}$；③$bc>ad$. 请你以其中任意两个作为条件，另一个作为结论，共能组成多少个正确命题？并加以证明.

**解：** $\left.\begin{matrix}①\\②\end{matrix}\right\}\Rightarrow③$；$\left.\begin{matrix}①\\③\end{matrix}\right\}\Rightarrow②$，$\left.\begin{matrix}②\\③\end{matrix}\right\}\Rightarrow①$.

共能组成三个正确命题. 下面进行证明：

$\left.\begin{matrix}①\\②\end{matrix}\right\}\Rightarrow③$：$\left.\begin{matrix}-\dfrac{c}{a}<-\dfrac{d}{b}\Rightarrow\dfrac{c}{a}>\dfrac{d}{b}\\ ab>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\dfrac{c}{a}\cdot ab>\dfrac{d}{b}\cdot ab\Rightarrow bc>ad$；

$\left.\begin{matrix}①\\③\end{matrix}\right\}\Rightarrow②$：$\left.\begin{matrix}ab>0\Rightarrow\dfrac{1}{ab}>0\\ bc>ad\end{matrix}\right\}\Rightarrow bc\cdot\dfrac{1}{ab}>ad\cdot\dfrac{1}{ab}\Rightarrow\dfrac{c}{a}>\dfrac{d}{b}\Rightarrow-\dfrac{c}{a}<-\dfrac{d}{b}$；

$\left.\begin{matrix}②\\③\end{matrix}\right\}\Rightarrow①$：$\left.\begin{matrix}-\dfrac{c}{a}<-\dfrac{d}{b}\Rightarrow\dfrac{c}{a}-\dfrac{d}{b}>0\Rightarrow\dfrac{bc-ad}{ab}>0\\ bc>ad\end{matrix}\right\}\Rightarrow ab>0$.

**评析：** 因为题目未直接给出要证明的不等式. 所以要对可能的情况进行全面考查. 本题严格遵循不等式的性质，进行逻辑证明. 体现了数学的严谨性.

### (二)实际应用题

**详析：** 本节的实际应用题主要是针对实际生活的实际问题，从中抽象出数学模型. 列出有关不等式，转化为不等式问题进行求解.

**【例 2】** 鲜花店用玫瑰和康乃馨两种鲜花做成花束出售. 已知 2 枝康乃馨和 1 枝玫瑰做成的花束售价不低于 6 元；3 枝康乃馨和 2 枝玫瑰做成的花束售价不高于 10 元，问 4 枝康乃馨和 5 枝玫瑰做成的花束售价最高为多少元？

**解：** 设 1 枝康乃馨售价为 $x$ 元，1 枝玫瑰售价为 $y$ 元.

由题意可得 $\begin{cases}2x+y\geqslant 6,\\ 3x+2y\leqslant 10.\end{cases}$ 令 $M=2x+y$，$N=3x+2y$.

则 $x=2M-N,y=2N-3M$，所以 $M\geqslant 6$，且 $N\leqslant 10$.

又 $4x+5y=4(2M-N)+5(2N-3M)=6N-7M$，所以 $4x+5y\leqslant 60-42=18$. 所以 4 枝康乃馨和 5 枝玫瑰做成的花束最高售价为18 元.

**评析：** 本题读题容易，解题稍难. 在由两个变量相互制约的不等式前提下，要求某不等式的取值范围时，易出错. 本题采用的是整体处理的方法，避免多次求解不等式而引起范围扩大.

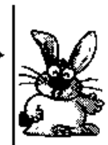
## 五、巧题妙解

**【例】** 若 $m$、$n$ 为正整数，则 $m+n>mn$ 的充要条件为(　　)

A. $m,n$ 都等于 1　B. $m,n$ 都不等于 2

C. $m,n$ 都大于 1　D. $m,n$ 至少有一个等于 1

**解：** 因为 $m+n>mn$，即 $mn<m+n$，所以 $mn-m-n<0$. 所以 $mn-m+1-n<1$. 所以 $m(n-1)-(n-1)<1$. 所以 $(n-1)\cdot(m-1)<1$. 因为 $m$、$n$ 为正整数，所以 $(m-1)(n-1)=0$. 所以 $m=1$ 或 $n=1$. 故选 D.



学习札记

学习札记

**评析**：因已知条件为 $m,n$ 为正整数，本题巧妙地对已知不等式 $m+n>mn$ 进行因式分解，化为关键的式子 $(m-1)(n-1)<1$，结合已知条件，只有 $m-1=0$ 或 $n-1=0$，否则 $m$、$n$ 为正整数，$(m-1)\cdot(n-1)$ 不可能小于 1. 此题妙就妙在恰当地利用 $m$、$n$ 为正整数这一特殊条件.

### 六、高考题细讲

**【例】** (2004，北京，5 分)已知 $a,b,c$ 满足 $c<b<a$. 且 $ac<0$，则下列选项中不一定正确的是(　　)

A. $ab>ac$　　　　B. $c(b-a)>0$

C. $cb^2<ab^2$　　　D. $ac(a-c)<0$

解：由 $c<b<a$，$ac<0$，即 $a$、$c$ 异号，可知 $c<0$，$a>0$，$b$ 可正、可负，也可为 0. 因为 $b>c$，$a>0$，所以 $ab>ac$，所以 A 正确.

因为 $b<a$，所以 $b-a<0$. 又 $c<0$，所以 $(b-a)\cdot c>0$，所以 B 正确.

当 $b=0$ 时，$cb^2=ab^2$，所以 C 不一定正确.

因为 $a>c$，所以 $a-c>0$. 又 $ac<0$，所以 $ac(a-c)<0$. 所以 D 正确.

所以正确答案选 C

**评析**：本题考查不等式性质，难度不大，注意到 $c<a$，$ac<0$，必得 $a>0$，$c<0$ 为关键. 再者得出 $b$ 介于 $a$，$c$ 之间，得 $b$ 可为任意实数. 利用不等式的性质. 可判断正误.

# 第二节　算术平均数与几何平均数

## 第 3 课时　算术平均数与几何平均数定理

### 一、基本知识点细讲

**知识点 1：重要不等式.**

**详析**：如果 $a,b\in\mathbf{R}$，那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号).

对于 $a$、$b$ 为任意实数，不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 都成立，使用这个不等式时应注意当且仅当 $a=b$ 时取"="号这句话的含义：

当 $a=b$ 时，取"="号，即 $a=b\Rightarrow a^2+b^2=2ab$；

仅当 $a=b$ 时，取"="号，即 $a^2+b^2=2ab\Rightarrow a=b$.

综合起来，就是说 $a=b$ 是 $a^2+b^2=2ab$ 的充要条件.

**【例 1】** 已知 $x,y,z\in\mathbf{R}$，求证：$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+xz$.

**证明**：因为 $x^2+y^2\geqslant 2xy$，$x^2+z^2\geqslant 2xz$，$y^2+z^2\geqslant 2yz$，所以三式相加，可得 $2(x^2+y^2+z^2)\geqslant 2(xy+yz+xz)$. 即 $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+xz$(当且仅当 $x=y=z$ 时取"="号).

**评析**：由重要不等式可得三个同向不等式，然后将三个同向不等式相加，即可推出要证的不等式.

**知识点 2：算术平均数与几何平均数定理.**

**详析**：如果 $a,b$ 为正数，那么 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号). 此定理是本章的重点内容，应用时应注意以下几点：

(1)当且仅当 $a=b$ 时取等号的含义：

当 $a=b$ 时，取"="号，即 $a=b\Rightarrow\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$；

仅当 $a=b$ 时取"="号，即 $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}\Rightarrow a=b$；

综合起来，就是说 $a=b$ 是 $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$ 的充要条件.

(2) $\frac{a+b}{2}$ 称为 $a$、$b$ 的算术平均数，$\sqrt{ab}$ 称为 $a$、$b$ 的几何平均数. 若把 $\frac{a+b}{2}$ 看作正数 $a$、$b$ 的等差中项，$\sqrt{ab}$ 看作正数 $a$、$b$ 的正的等比中项，那么该定理还可以叙述为：两个正数的等差中项不小于它们的正的等比中项.

(3) $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 与 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 的适用条件不同，前者只要求 $a$、$b$ 为实数，后者要求 $a$、$b$ 均为正数，如：$(-1)^2+(-4)^2\geqslant 2\times(-1)\times(-4)$ 成立，但 $\frac{(-1)+(-4)}{2}\geqslant\sqrt{(-1)\times(-4)}$ 不成立.

**【例 2】** 已知 $a$、$b$、$c$、$d$ 都为正数，求证：$\frac{ad+bc}{bd}+\frac{bc+ad}{ac}\geqslant 4$.

**证明**：$\frac{ad+bc}{bd}+\frac{bc+ad}{ac}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}+\frac{bc}{ac}+\frac{ad}{ac}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right)\geqslant 2+2=4$.

**评析**：利用分式性质将不等式左边变形，达到能利用算术平均数与几何平均数定理的目的.

## 二、基本能力点细讲

**能力点：利用$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$的变式求函数的最值.**

**详析**：$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$可变形为：$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. 由此可得 $x$、$y$ 为正数.

(1)若 $xy$ 是定值 $p$，当且仅当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 取最小值 $2\sqrt{p}$.

(2)若 $x+y$ 是定值 $S$，当且仅当 $x=y$ 时，积 $xy$ 取最大值$\frac{S^2}{4}$.

上述结论是我们求最值的依据，可概括为：和为定值积最大，积为定值和最小.

要注意三点：①$x$、$y$ 都是正数，②当积为定值时，和有最小值；当和为定值时，积有最大值. ③当且仅当 $x=y$时，和(积)才能取得最小(大)值.

即一正、二定、三相等. 应用时一定要注意这三点.

**【例】** 已知：$x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq0$，求函数 $y=x+\frac{1}{x}$的值域.

**解**：当 $x>0$ 时，$y=x+\frac{1}{x}\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$(当且仅当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x=1$ 时取等号)，所以当 $x>0$ 时，$y\in[2,+\infty)$. 当 $x<0$ 时，$-x>0$，$-\frac{1}{x}>0$，$y=x+\frac{1}{x}=-\left(-x-\frac{1}{x}\right)$. 因为$-x-\frac{1}{x}\geqslant2\sqrt{(-x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}=2$(当且仅当$-x=\frac{1}{-x}$，即 $x=-1$ 时取等号)，所以$-\left(-x-\frac{1}{x}\right)\leqslant-2$，即$y\leqslant-2$. 所以当 $x<0$ 时，$y\in(-\infty,-2]$. 综上，函数 $y=x+\frac{1}{x}$的值域为$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

**评析**：利用不等式求最值，一定要做到一正、二定、三相等，才能取到最值.

## 三、综合能力点细讲

**详析**：两个正数的算术平均数与几何平均数定理常与函数综合在一起使用，用来求函数的最值.

**【例】** 若 $\lg x+\lg y=1$，求$\frac{2}{x}+\frac{5}{y}$的最小值.

**解**：因为 $\lg x+\lg y=1$，所以 $x>0$，$y>0$. 又 $\lg x+\lg y=\lg(xy)=1=\lg10$，所以 $xy=10$. 所以$\frac{2}{x}+\frac{5}{y}\geqslant2\sqrt{\frac{10}{xy}}=2$. 当且仅当$\frac{2}{x}=\frac{5}{y}$，且$xy=10$，即 $x=2$，$y=5$ 时取等号. 所以$\frac{2}{x}+\frac{5}{y}$的最小值为 2.

**评析**：利用对数函数的性质，推出 $xy=10$ 为定值. 由$\frac{2}{x}+\frac{5}{y}\geqslant2\sqrt{\frac{10}{xy}}=2$得到$\frac{2}{x}+\frac{5}{y}$的最小值，同时由条件解出 $x=2$，$y=5$，保证等号取到. 即最小值能达到.

## 四、新型题细讲

(一)归纳猜想题

**详析**：本课时的归纳猜想题主要是从不等式的基本性质和定理出发，深刻挖掘规律，进行归纳，得到更广泛的结论.

**【例 1】** 已知 $a\in\mathbf{R}^+$，通过下列不等式：$x+\frac{1}{x}\geqslant2$，$x+\frac{4}{x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{4}{x^2}\geqslant3$. 试写出：$x+\frac{27}{x^3}$的表达式，并对各式进行归纳，猜想得到 $x+\frac{a}{x^n}\geqslant n+1$，试问 $a$ 的值为______.

**解**：$x+\frac{27}{x^3}=\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{27}{x^3}\geqslant4$，通过上面几个不等式可观察得$x+\frac{1}{x}\geqslant2$ 中 $1=1^1$，$x+\frac{4}{x^2}\geqslant3$ 中 $4=2^2$，$x+\frac{27}{x^3}\geqslant4$ 中 $27=3^3$. 所以 $x+\frac{a}{x^n}\geqslant n+1$ 中 $a$ 应为 $n^n$. 所以 $a=n^n$.

**评析**：通过两个已知不等式，可把 $x+\frac{27}{x^3}$变形，从而规律性就显露出来.

(二)探究性题

**详析**：本节的探索性问题主要是不等式恒成立问题. 考查同学们的观察、分析能力.

**【例 2】** 已知 $a>b>c$，问是否存在实数 $k$，使不等式$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{k}{a-c}$恒成立? 若存在，求出所有的 $k$ 值；若不存在，请说明理由.

**解**：因为 $a>b>c$，$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{k}{a-c}$，所以 $k\leqslant\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)\cdot(a-c)$. 欲使此式对于 $a>b>c$ 恒成立，只需 $k$ 不大于$\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)\cdot(a-c)$的最小值即可. 由$\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)\cdot(a-c)=\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)\cdot[(a-b)+(b-c)]=2+\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\geqslant4$，所以使不等式

学习札记

学习札记

$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{k}{a-c}$恒成立的$k$存在，且$k\leqslant4$.

**评析**：本题为探索恒成立问题.经分析只需求出$\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)\cdot(a-c)$的最小值.过程中把$a-c$拆成$(a-b)+(b-c)$目的是方便求出最值.

### 五、巧题妙解

**【例】** 若$x,y\in\mathbf{R}^+$，且$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，试求$x+y$的最小值.

**解**：$x+y=(x+y)\cdot1=(x+y)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)=10+\frac{y}{x}+\frac{9x}{y}\geqslant10+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{9x}{y}}=16$，当且仅当$\frac{y}{x}=\frac{9x}{y}$即$x=4,y=12$时，$x+y=16$.故$x+y$的最小值为16.

**评析**：本题通过"1"的代换，把所求表达式变形为容易求最值的式子.从而巧妙地求出最小值.

本题还可有下面解法：

因为$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，所以$x=\frac{y}{y-9}(x>0,y>9)$.所以$x+y=\frac{y}{y-9}+y=\frac{y-9+9}{y-9}+y=\frac{y-9}{y-9}+\frac{9}{y-9}+y=1+\frac{9}{y-9}+(y-9)+9=10+\frac{9}{y-9}+y-9\geqslant16$.当且仅当$y-9=\frac{9}{y-9}$，即$y=12,x=4$时$x+y=9$.

### 六、高考题细讲

**【例】** (2004，湖南理，5分)设$a>0,b>0$，则下列不等式中不恒成立的是(　　)

A. $(a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant4$

B. $a^3+b^3\geqslant2ab^2$

C. $a^2+b^2+2\geqslant2a+2b$

D. $\sqrt{|a-b|}\geqslant\sqrt{a}-\sqrt{b}$

**解**：A：$(a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant4$(当$a=b$时取"="号)，所以成立.C：$a^2+b^2+2=a^2+1+b^2+1\geqslant2a+2b$(当且仅当$a=b=1$时"="成立)所以成立.D：两边平方：$|a-b|\geqslant a+b-2\sqrt{ab}$，所以$a-b\geqslant a+b-2\sqrt{ab}$或$a-b\leqslant-a-b+2\sqrt{ab}$.所以$a\geqslant b$或$a\leqslant b$.所以成立.B：$a=1,b=-1$时$a^3+b^3=0$，$2ab^2=2$显然B不恒成立.故应选B.

## 第4课时　算术平均数与几何平均数定理的应用

### 一、基本知识点细讲

**知识点1：求函数的值域(最值).**

**详析**：算术平均数与几何平均数定理应用广泛，尤其是利用它来求函数的值域.应用时一定要注意使用条件：一正，二定，三相等.求最小值时，对于不等式$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，①当$a,b\in\mathbf{R}^+$；②当$ab$为一常数$k$；③当$a=b$这三个条件同时成立时，我们说$a+b$可取得最小值$2\sqrt{k}$.

求最大值时，要求满足①$a,b$为正数，②$a+b$为定值$k$，③不等式等号能够成立，即能够有$a=b$成立.这样由$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，知$\frac{k^2}{4}$为$ab$的最大值.要明确其含义.当条件不具备时，要灵活运用拆、配、凑等手段，创造条件使用此定理，达到求出值域(最值)的目的.

**【例1】** 已知$x<\frac{5}{4}$，求函数$y=4x-2+\frac{1}{4x-5}$的最大值.

**解**：因为$x<\frac{5}{4}$，所以$4x-5<0$.所以$5-4x>0$.所以$y=4x-2+\frac{1}{4x-5}=4x-5+\frac{1}{4x-5}+3=-\left[(5-4x)+\frac{1}{(5-4x)}\right]+3$.因为$5-4x>0$，所以$5-4x+\frac{1}{5-4x}\geqslant2\sqrt{(5-4x)\cdot\frac{1}{(5-4x)}}=2$.所以$y\leqslant-2+3=1$.当且仅当$5-4x=\frac{1}{5-4x}$，即$(5-4x)^2=1$，即$5-4x=1,x=1$时$y$有最大值1.

**评析**：利用此定理求最值时，往往需拆项，添项，目的是保证积为定值时，和有最小值；和为定值时，积有最大值.

**知识点2：证明不等式.**

**详析**：两个正数的算术平均数与几何平均数定理还可用来证明不等式.

**【例2】** 已知：$a,b,c\in\mathbf{R}$且均不为0，证明：$\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}+\frac{a^2b^2}{c^2}\geqslant a^2+b^2+c^2$.

**证明**：$\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{a^2c^2}{b^2}\geqslant2\sqrt{\frac{b^2c^2}{a^2}\cdot\frac{a^2c^2}{b^2}}=2c^2$，

同理，$\frac{c^2a^2}{b^2}+\frac{a^2b^2}{c^2}\geqslant2a^2$，$\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}\geqslant2b^2$，

上面三式相加，再除以 2，可得 $\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}+\frac{a^2b^2}{c^2}\geqslant a^2+b^2+c^2$.

**评析**：每两个正数运用定理，得三个结构相同的式子. 要得三个数的和的形式，需三式相加再除以 2 即可，这种手段在以后的证明中经常用到，应注意积累.

**知识点 3：比较大小.**

**详析**：应用算术平均数与几何平均数定理比较两个或多个数的大小.

**【例 3】** 已知 $a、b\in\mathbf{R}^+$，试比较 $\frac{a+b}{2}$，$\sqrt{ab}$，$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ 的大小.

**解**：$\sqrt{ab}-\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)\sqrt{ab}-2ab}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}\geqslant 0$，所以 $\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\frac{a+b}{2}=\sqrt{\frac{2(a^2+b^2)}{4}}-\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{4}}-\frac{a+b}{2}=\frac{a+b}{2}-\frac{a+b}{2}=0$，所以 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}$. 又 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，所以 $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$（当且仅当 $a=b$ 时取等号）.

**评析**：这四个式子的大小关系经常使用，所以要求我们既要会证明大小关系，又要记住结论.

## 二、基本能力点细讲

**能力点：应用算术平均数与几何平均数定理解应用题.**

**详析**：算术平均数与几何平均数定理是不等式应用中的重要依据. 历年高考试题中都有体现其应用的试题，做这类题目时应从文字材料中抽象出数学模型，进而转化为数学计算问题.

**【例】** 某单位建造一间地面面积为 $12\mathrm{m}^2$ 的背面靠墙壁的矩形小房，房屋正面的造价为 1200 元/$\mathrm{m}^2$，房屋侧面造价为 800 元/$\mathrm{m}^2$. 屋顶的造价为 5800 元，如果墙高为 3m，且不计房屋背面费用，问怎样设计能使总造价最低；最低总造价为多少元？

**解**：设底面矩形与墙相对的边长为 $x$m，则另一边长为 $\frac{12}{x}\mathrm{m}^2$，又设房屋总造价为 $y$ 元. 则由题意可得 $y=1200\times 3x+800\times 2\times 3\times\frac{12}{x}+5800=3600\left(x+\frac{16}{x}\right)+5800\geqslant 3600\times 2\times\sqrt{x\cdot\frac{16}{x}}+5800\geqslant 34600$，当且仅当 $x=\frac{16}{x}$，即 $x=4$ 时，$y$ 最小.

因此，当底面矩形中与墙相对的边长为 4m，另一边长为 3m 时，房屋的总造价最低，最低总造价为 34600 元.

**评析**：应用算术平均数与几何平均数定理解应用题时应注意：①设变量（一般把要求的最大值或最小值设为函数）. ②建立相应的函数关系式把实际问题抽象为函数的最值问题. ③在定义域内，求出函数的最值. ④正确写出答案.

## 三、综合能力点细讲

**详析**：两个正数的算术平均数与几何平均数定理常与三角形、几何综合考查有关最值问题.

**【例】** 在△$ABC$ 中，$a、b、c$ 是△$ABC$ 的三边，且 $a+b=10$，$\cos C$ 是方程 $2x^2-3x-2=0$ 的根，求△$ABC$ 周长的最小值.

**解**：由 $2x^2-3x-2=0$，解得 $x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=2$. 因为 $-1<\cos C<1$，所以 $\cos C=-\frac{1}{2}$. 由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$，可得 $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos C}=\sqrt{a^2+b^2+ab}=\sqrt{(a+b)^2-ab}=\sqrt{100-ab}\geqslant\sqrt{100-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}=\sqrt{75}$，当且仅当 $a=b=5$ 时“=”成立. 所以 $a+b+c\geqslant 10+5\sqrt{3}$，即△$ABC$ 周长的最小值为 $10+5\sqrt{3}$.

**评析**：本题为算术平均数与几何平均数定理与三角形综合性解有关最值问题. 两边 $a、b$ 的和固定，只须求 $c$ 边的最小值即可. 显然用到余弦定理.

## 四、新型题细讲

（一）阅读理解题

**详析**：阅读理解题是近几年出现的新题型，这类试题的特点是：首先阅读较多的文字，函数的图象或图表，对提供的材料进行观察、归纳；加工提炼，然后回答出问题，本节的阅读理解题主要考查两个正数的算术平均数与几何平均数定理在求最值中的应用及适用条件.

**【例 1】** 已知 $x+y=1(x>0,y>0)$，求 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$

学习札记