SHUXUE

高中全新课时优化学习

数学

高二下册

优化学习编写组 编

浙江大学出版社

高中全新课时优化学习(高二下册)

数 学

优化学习编写组编
分册主编　刘建永
分册编委　季龙侯　鲁兴冠
　　　　　卢时光　方益初

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中全新课时优化学习．高二数学．下册／《高中全新课时优化学习》编写组编．—杭州：浙江大学出版社，2005.1
ISBN 7-308-04032-1

Ⅰ.高… Ⅱ.高… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 118311 号

出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
责任编辑 杨晓鸣 曾小丽
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 杭州杭新印务有限公司
经　　销 浙江省新华书店
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 58
字　　数 1700 千字
版 印 次 2005 年 1 月第 1 版 2006 年 11 月第 2 次印刷
书　　号 ISBN 7-308-04032-1/G·786
定　　价 61.00 元(全套)

编写说明

随着我国高等教育规模的急速扩大，上大学已经成了大多数青年学生可以实现的人生目标，与此同时，随着国家逐步完成了高中教材的大幅度修订，原有的教辅读物编写理念、体例等已显得不合时宜了。为此，浙江大学出版社特聘全国著名重点中学学科带头人领衔，组织浙江、江苏两省二十余所名校的第一线教师，倾力打造"高中全新课时优化学习"丛书。

本丛书有以下三大特色：

1. **全** 内容以面向全体学生为主，同时注意培养尖子学生，在各单元、各课知识内容的提炼上力图全面，由浅入深，难点、疑点的解析通俗易懂；例题的讲解多角度，举一反三；练习题设计难易适中，并配有相当量的创新题，供学有余力的学生学习思考，巩固提高。

2. **透** 丛书注重学科内容的综合与渗透，知识内容的融会贯通，主要体现在单元知识和前面已经学过的本学科内容的融会贯通、相互渗透，本单元知识和其他学科的知识相互渗透，以及在生活和生产实践中的应用，因而具有极强的启发性，从而培养学生对知识的综合思考能力，以及横向、纵向的思维能力和分析问题、解决问题的能力。

3. **实** 本丛书摒弃浮泛的说理，强调实用性、操作性，通过各种题型解析，基础训练，帮助学生加深记忆和理解，融会贯通所学的知识。练习设计和课堂教学同步，老师可以引领学生当堂练习，巩固该堂课的知识内容。

目　录

第九章　直线、平面和简单几何体(A)

○ 本章导言

本章分为两大节:"空间直线和平面"、"简单几何体".

第一大节:共含 6 个小节内容:平面、空间直线、直线和平面平行、直线和平面垂直、两个平面平行、两个平面垂直. 直线和平面是最基本的几何元素,空间直线和平面的位置关系是立体几何的基础知识,学好这一内容,对建立空间观念、实现从认识平面图形到认识立体图形的飞跃是至关重要的。

第二大节:学习简单几何体,高中阶段只研究棱柱、棱锥、多面体和正多面体以及球等四种最基本最常见的几何体,这构成了本大节的 4 个小节内容.

本章教学重点:平面的基本性质、空间直线的位置关系、直线与平面之间以及平面与平面之间的平行和垂直关系.

本章教学难点:一是建立空间观念;二是逻辑推理的严密.

本章教学建议:一是加强直观模型的运用;二是加强图形、符号及文字三者之间的联系与转化;三是注意与平面几何的联系与区别;四是注意及时构建、充实知识框架.

学习中应注意的问题:

(1) 建立正确的空间观念,实现由平面图形向立体图形转化,是学习立体几何的一个难点. 要及时联系平面图形的相关知识,利用对比、引申、联想等方法,找出平面图形和立体图形的异同以及两者的内在联系,逐步培养将立体图形转化为平面图形的能力.

(2) 正确使用图形、文字、符号三种数学语言,能够相互进行"翻译",这是立体几何的一个特点,也是学习的一个难点.

(3) 平面基本性质是研究立体几何的重要基础,空间的平行与垂直关系是立体几何的基本内容. 掌握好上述内容,就抓住了学习立体几何的关键.

(4) 培养和发展学生的逻辑思维能力是立体几何的重要任务,通过基本推理训练,达到训练思维的目的.

一、空间直线与平面

第 1 课时　平面的基本性质

○ 重点导读

1. 平面是一个描述而不定义的原始概念,它和点、直线一样,也是空间图形的重要组成部分,平面是绝对的平、无大小、无厚薄之分,是无限延展的.

2. 在画平面时,通常用平行四边形表示它所在的平面,用一个希腊字母表示,如平面 α,平面 β 等;也可以用平行四边形 $ABCD$ 的两个相对顶点的字母来表示,如平面 AC,平面 BD 等;有时根据需要也用其他平面图形(如三角形、梯形等)表示平面.

3. 以点作为元素,直线与平面都是由点构成的集合. 因此,正确使用"$\in$, $\subset$, $\cap$"等数学符号表示点、直线和平面三个元素之间的关系.

数学符号语言	数学语言表达
$A \in a$	点 A 在直线 a 上
$A \notin a$	点 A 在直线 a 外
$A \in \alpha$	点 A 在平面 α 内
$A \notin \alpha$	点 A 在平面 α 外
$a \subset \alpha$	直线 a 在平面 α 内
$a \cap b = A$	直线 a,b 相交于点 A
$\alpha \cap \beta = a$	平面 α、β 相交于直线 a

○ 问题精析

【例 1】 判断下列说法是否正确?并说明理由.

(1) 平行四边形是一个平面.

(2) 任何一个平面图形都是一个平面.

(3) 空间图形中先画的线是实线,后画的线是

虚线.

解 (1)不正确.平行四边形仅是平面上四条线段构成的图形,它是不能无限延伸的.

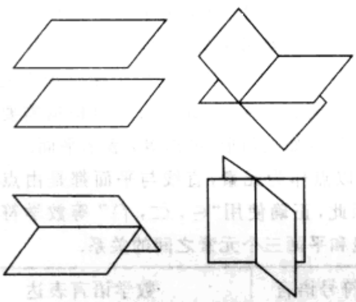
(2)不正确.平面图形和平面是完全不同的两个概念,平面图形是有大小的,它不可能无限延展.

(3)不正确.在空间图形中,我们一般是把能够看得见的线画成实线,把被平面遮住看不见的线画成虚线.

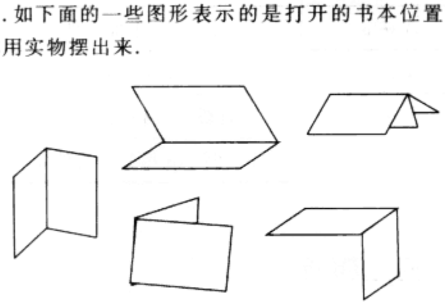
【思维拓展】 在立体几何中,通常用平行四边形表示平面,但绝不是说平行四边形就是平面.立体几何中的平面与平面几何中的平面图形是有区别的,平面图形有大小之分,而平面是不可度量的,无限延展的.

在平面几何中,凡是后引的辅助线我们都画成虚线;而立体几何则不然,凡是被平面遮住的线都画成虚线,不被遮住的线都画实线.若对此点没有认识,必将影响空间立体感的形成.

【例2】 两个平面有哪几种位置关系,请用直观图形表示出来.



【思维拓展】 画好两个相交平面的图形,是画好一切立体图形的基础,画空间图形的过程,是培养我们空间想像能力的过程,一定要认真对待.通过看模型画图,看图想模型来培养学生观察能力,动手能力.如下面的一些图形表示的是打开的书本位置,请你用实物摆出来.

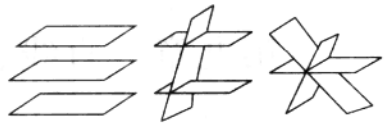


【例3】 三个平面可将空间分成几部分,请用直观图形表示出来.

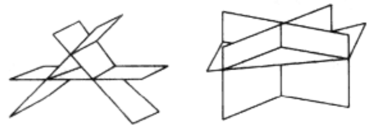
解析 本题情况较复杂,须分类予以处理,有以下五种情况,四种结果.

(1)四部分(互相平行)

(2)六部分(两种情况)



(3)七部分　　　　(4)八部分



【思维拓展】 本题在解答过程中,采用了从简单到复杂递进的处理方法,首先对两个平面在空间的位置分类讨论,再让第三个平面从不同情况介入,然后分类解决.本题是一个基础性很强的问题,无论是对立体图形的画法及空间想像能力的形成都大有裨益.

误区警示

学习立体几何时常见的错误,除与学习平面几何时同样易犯的那些逻辑错误外,主要还有以下一些方面:

1. 对基本概念、性质、定理理解不透,造成概念间相互混淆,定理、性质不会灵活运用,造成乱套滥用.

2. 空间概念薄弱,空间想像能力差,解题时凭直观、凭想像,不从概念本身出发去确定元素间的相应位置关系更是屡见不鲜.

3. 画图能力薄弱,缺乏画空间图形的基本功训练,所画图形不直观、不准确,不能表达题给的条件与元素之间的位置关系.

4. 不善于识别空间图形与平面图形间的区别与联系,不注意从两者性质间的对照类比中去掌握共性与差异.

其他,诸如推理不严谨,考虑不周全,使用公式定理不注意条件等等也都是学习立体几何时常见的一些错误.

优化训练

A组

1. 点 A 在直线 l 上,l 在平面 α 外,用符号表示正确的是(　　)

A. $A\in l, l\notin\alpha$　　　B. $A\in l, l\not\subset\alpha$

C. $A\subset l, l\not\subset\alpha$　　D. $A\subset l, A\notin\alpha$

2. 若点 Q 在直线 b 上，b 在平面 β 内，则 Q、b、β 之间的关系正确的是(　　)

A. $Q\in b\in\beta$　　B. $Q\in b\subset\beta$

C. $Q\subset b\subset\beta$　　D. $Q\subset b\in\beta$

3. 下面是一些命题的叙述语(A、B 表示点，a 表示直线，α、β 表示平面)

A. $\because A\in\alpha, B\in\alpha, \therefore AB\in\alpha$

B. $\because a\in\alpha, a\in\beta, \therefore \alpha\cap\beta=a$

C. $\because A\in a, a\not\subset\alpha, \therefore A\notin\alpha$

D. $\because A\notin a, a\subset\alpha, \therefore A\notin a$

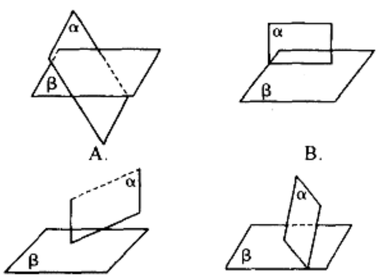
其中命题和叙述方法都正确的是(　　)

4. 若 $a\subset\alpha, b\subset\beta, \alpha\cap\beta=c, a\cap b=M$，则(　　)

A. $M\subset\beta$　　B. $M\notin c$

C. $M\subset\alpha$　　D. $M\in c$

5. 下图表示两个相交平面，其中画法正确的是(　　)



A.　　B.　　C.　　D.

6. 下列命题正确的是(　　)

A. 对边相等的四边形是平行四边形

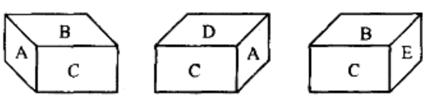
B. 四边相等的四边形是菱形

C. 梯形是平面图形

D. 两两相交的三条直线一定在同一平面内

B组

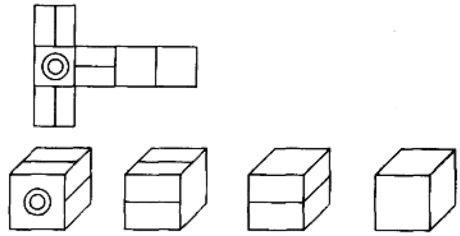
7. 如图，一个封闭的立方体，它 6 个表面各标出 A、B、C、D、E、F 这六个字母，现放成下面 3 种不同位置，所看见的表面上的字母已标明，则字母 A、B、C 对面的字母分别为(　　)



A. D、E、F　　B. F、D、E

C. E、F、D　　D. E、D、F

8. 下图代表未折叠正方体的表面展开图，将其折叠起来变成正方体后，图形是(　　)



A.　　B.　　C.　　D.

9. (1) 平面内有 4 条直线，它们可以把平面最多分成几部分？

(2) 空间有 4 个平面，它们可以把空间最多分成几部分？

第 2 课时　平　面

重点导读

1. 平面的基本性质：即三个公理及其三个推论．要注意一些词语的含义，如“确定一个平面”与“有且只有一个平面”是同义词．“有”即“存在”，“只有一个”即“唯一”．所以证明有关“有且只有一个”语句的命题时，要证两方面——存在性和唯一性．证明的方法是反证法和同一法．

2. 注意“符号语言”、“图形语言”、“文字语言”的互相转化．

3. 掌握利用平面的基本性质证明诸点共面、诸线共面、三点共线、三线共点问题的一般方法．

证明若干点或直线共面通常有两种思路：

(1) 先由部分元素确定若干平面，再证明这些平面重合；

(2) 先由部分元素确定一个平面，再证明其余元素在这平面内．

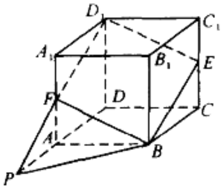
证明三点共线，通常先确定经过两点的直线是某两个平面的交线，再证明第三点是这两个平面的公共点，即该点分别在这两个平面内；

证明三线共点，通常先证其中的两条直线相交于一点，然后再证第三条直线经过这一点．

4. 利用上述公理及其推论证明有关命题时，要注意推理的严谨、符号使用的规范．

○ 问题精析

【例 1】 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别为 CC_1 和 AA_1 上的中点，画出平面 BED_1F 与平面 $ABCD$ 的交线.



分析 可根据公理 2，如果两个平面有一个公共点，它们就有过这点的一条直线，也只有这一条直线，这条直线的位置还须借助于另一个条件来确定.

解 在平面 AA_1D_1D 内，延长 D_1F，

$\because D_1F$ 与 DA 不平行，

$\therefore D_1F$ 与 DA 必相交于一点，设为 P，

则 $P\in FD_1$，$P\in DA$.

又 $\because FD_1\subset$ 平面 BED_1F，$AD\subset$ 平面 $ABCD$ 内，

$\therefore P\in$ 平面 BED_1F，$P\in$ 平面 $ABCD$.

又 B 为平面 BED_1F 与平面 $ABCD$ 的公共点，

$\therefore$ 连结 PB，PB 即为平面 BED_1F 与平面 $ABCD$ 的交线.

【思维拓展】 公理 2 是两个平面相交的性质，它说明两个平面相交，交线是一条直线，要注意理解两个平面不存在只有一个公共点的情形，如果有一个公共点，那么必定有无数多个公共点，且这些点恰好组成一条直线. 同时要注意，找到两个平面的一个公共点，交线的具体位置还无法判定，只有找到两个公共点，才能确定这两个平面的交线，这是做几何体截面时确定交线经常用到的方法.

【例 2】 已知：三个平面 α、β、γ 两两相交，a、b、c 是它们的三条交线.

(1) 若 $a\cap b=P$，求证：a、b、c 三线共点；

(2) 若 $a\parallel b$，试用反证法证明 a、b、c 三条直线互相平行.

证明 (1) 设 $\alpha\cap\beta=c$，$\beta\cap\gamma=b$，$\gamma\cap\alpha=a$，

由 $P\in a$，$a\subset\alpha$，得 $P\in\alpha$，

同理 $P\in b$，$b\subset\beta$，得 $P\in\beta$，

则 $P\in\alpha\cap\beta=c$.

即 a、b、c 三线共点于 P.

(2) 假设 a 不平行于 c，

由于 a、c 都在平面 α 内，可设 $a\cap c=P$，

则由(1)可得 a、b、c 三线共点于 P，这与已知条件 $a\parallel b$ 矛盾.

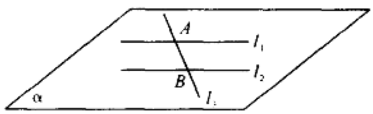
因此 $a\parallel c$，即 a、b、c 三线平行.

【思维拓展】 平面的基本性质(三个公理及公理 3 的三个推论)是研究空间图形性质的理论基础，必须彻底理解并牢固掌握，要逐步掌握立体几何中的文字语言、符号语言、图形语言及这三种语言的相互转化. 掌握公理及推论的主要用途，解决点共面、线共面、点共线、线共点等问题，以及用反证法证明问题的程序和依据.

○ 误区警示

问题：一条直线与两条平行线都相交，证明：这三条直线在同一平面内.

错证：如图.



$\because l_1$ 与 l_3 相交可以确定一个平面，l_2 与 l_3 相交可以确定一个平面，

$\therefore l_1$、l_2、l_3 三条直线在同一平面内.

剖析 证明过程中没有指出 l_1 与 l_3 确定的平面和 l_2 与 l_3 确定的平面是同一平面，没有达到论证三线共面的要求.

正确证法：

$\because l_1\parallel l_2$，$l_1$，$l_2$ 确定平面 α，

由已知条件 $l_1\cap l_3=A$，$l_2\cap l_3=B$，

$\therefore A\in\alpha$，$B\in\alpha$，由公理 1 知 $l_3\subset\alpha$，

故 l_1、l_2、l_3 三线在同一平面内.

○ 优化训练

A 组

1. 已知 E、F、G、H 是空间的四个点

命题甲：点 E、F、G、H 不共面；命题乙：点 E、F、G、H 中任何三点不共线；那么甲是乙成立的(　　)

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 非充分非必要条件

2. 下列命题中，正确的是(　　)

A. 首尾相连的四条线段在同一平面内

B. 三条互相平行的线段在同一平面内

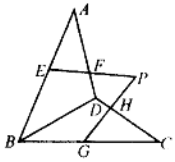
C. 两两相交的三条直线在同一平面内

D. 若四个点中的三个点在同一直线上，那么这四个点在同一平面内

3. 空间不全共线的四个点可确定________个平面.

4. 如果一条直线过平面内一点与平面外一点，那么它和这个平面有几个公共点?说明道理.

5. 如图，已知空间四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别是 AB、AD、BC、CD 上的点，且 EF 交 GH 于 P，求证：P 在直线 BD 上.

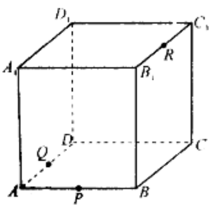


6. 已知：$d\cap a=P$，$d\cap b=Q$，$d\cap c=R$，$a\cap b=M$，$b\cap c=N$，$a\cap c=S$，且无三线共点，求证：a、b、c、d 共面.

B组

7. 求证：两两平行的三条直线如果都与另一条直线相交，那么这四条直线共面.

8. 正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，P、Q、R 分别是 AB、AD、B_1C_1 的中点，画出正方体的过 P、Q、R 的截面图形.



第 3 课时　空间直线(一)

○ 要点导读

1. 空间两条直线的位置关系：

(1) **相交直线** —— 有且仅有一个公共点；

(2) **平行直线** —— 在同一平面内，没有公共点；

(3) **异面直线** —— 不同在任何一个平面内，没有公共点.

若从有无公共点的角度分类：

(1) 有一个公共点 —— 相交直线；

(2) 没有公共点 —— 平行直线，异面直线.

若从是否共面的角度分类：

(1) 在同一平面内 —— 相交直线，平行直线；

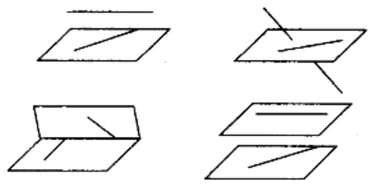
(2) 不同在任一平面内 —— 异面直线.

2. 异面直线的概念、画法及证明.

3. 图形语言、符号语言及文字语言的转化.

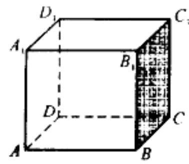
○ 问题精析

【例 1】 用一个平面衬托，画出两条异面直线；也可用两个平面衬托，画出两条异面直线.



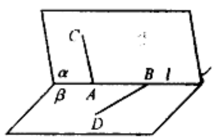
【例 2】 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，(1) 面的对角线所在的直线中，与直线 AB 成异面直线的有________；

(2) 正方体的体对角线所在直线中，与直线 AB_1 成异面直线的有________.



答：(1) 直线 A_1D，B_1C，A_1C_1，B_1D_1，C_1D，D_1C；(2) 直线 A_1C，D_1B.

【例 3】 已知：$\alpha\cap\beta=l$，$A\in l$，$B\in l$(A，B 不重合)，过 A 在平面 α 内作直线 AC，过 B 在平面 β 作直线 BD，求证：AC 和 BD 是异面直线.



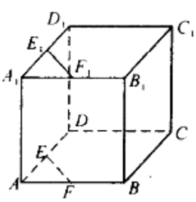
证明一　(用反证法) 若 AC 和 BD 共面，设它们确定平面 γ，由已知平面 α，γ 都经过 AC 和 AC 外一点 B，则此两平面重合；同理可得平面 β，γ 也重合. 因此，平面 α，β 重合，与已知矛盾，即 AC 和 BD 是异面直线.

证明二　(教科书例题 3 的结论) $AC\subset\alpha$，$B\in\alpha$，$B\notin AC$，$D\notin\alpha\Rightarrow AC$ 和 BD 是异面直线.

【思维拓展】 证明两条直线是异面直线的基本方法主要就是这两种：反证法与教科书上的结论.

○ 误区警示

如图，在正方体中，$AE=A_1E_1$，$AF=A_1F_1$，求证：$EF \mathrel{\underline{\parallel}} E_1F_1$.



错证：

$\because AE=A_1E_1$，$AF=A_1F_1$，

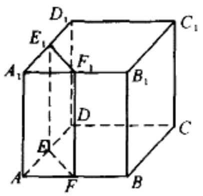
$\therefore Rt\triangle AEF \cong Rt\triangle A_1E_1F_1$,

$\therefore EF = E_1F_1, \angle AFE = \angle A_1F_1E_1$.

$\because AF \parallel A_1F_1, \therefore EF \parallel E_1F_1$,

$\therefore EF \underline{\parallel} E_1F_1$.

剖析：由 $\angle AFE = \angle A_1F_1E_1$ 和 $AF \parallel A_1F_1$，得出 $EF \parallel E_1F_1$，在立体几何中是没有根据的，例如，也可以在平面 ABB_1A_1 上作 $\angle A_1F_1E'_1 = \angle AFE$，此时 FE 与 $F_1E'_1$ 就不平行了．学习立体几何既要随时对照平面几何，但也不能将平面几何的结论不加证明随意搬用到立体几何证题中．



正确证法：

连结 FF_1、EE_1，$\because A_1F_1 \underline{\parallel} AF$，

$\therefore A_1AFF_1$ 是平行四边形，

$\therefore AA_1 \underline{\parallel} FF_1$，同理 $EE_1 \underline{\parallel} AA_1$，

$\therefore EE_1 \underline{\parallel} FF_1$，$\therefore E_1EFF_1$ 是平行四边形，

$\therefore EF \underline{\parallel} E_1F_1$.

优化训练

A组

1. 两条异面直线指的是（　　）

A. 在空间内不相交的两条直线

B. 分别位于两个不同平面内的两条直线

C. 某一个平面内的一条直线和这个平面外的一条直线

D. 不同在任何一个平面内的两条直线

2. 空间两条直线 a、b 与直线 l 都成异面直线，则 a、b 的位置是（　　）

A. 平行或相交　　B. 异面

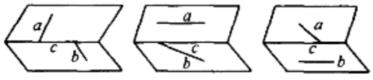
C. 平行　　D. 平行或相交或异面

3. a、b 是异面直线，若直线 c、d 分别与 a、b 相交于 E、F 及 G、H 不同四点，则 c、d 的关系是（　　）

A. 平行　　B. 相交

C. 异面　　D. 异面或相交

4. 已知 a、b 为异面直线，α、β 为平面．若 $a \subset \alpha$，$b \subset \beta$ 且 $\alpha \cap \beta = c$，则下列结论中一定正确的是（　　）



A. $a \cap c = \varnothing$ 且 $b \cap c = \varnothing$

B. $a \cap c = \varnothing$ 且 $b \cap c \neq \varnothing$

C. $a \cap c = \varnothing$ 或 $b \cap c = \varnothing$

D. $a \cap c \neq \varnothing$ 或 $b \cap c \neq \varnothing$

5. 已知平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = l$，m 是 α 内的一条直线，则在平面 β 内（　　）

A. 一定存在直线与直线 m 平行，也一定存在直线与直线 m 垂直

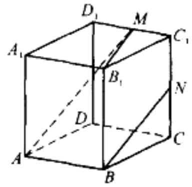
B. 一定存在直线与直线 m 平行，但不一定存在直线与直线 m 垂直

C. 不一定存在直线与直线 m 平行，但一定存在直线与直线 m 垂直

D. 不一定存在直线与直线 m 平行，也不一定存在直线与直线 m 垂直

B组

6. 如右图，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N 分别为棱 C_1D_1、C_1C 上的中点，有以下四个结论：



① 直线 AM 与 CC_1 是相交直线；

② 直线 AM 与 NB 是平行直线；

③ 直线 BN 与 MB_1 是异面直线；

④ 直线 AM 与 DD_1 是异面直线．

其中正确的结论为________（注：把你认为正确的结论的序号都填上）．

7. 已知空间四边形 $ABCD$，$AB \neq AC$，AE 是三角形 ABC 的 BC 边上的高，DF 是三角形 BCD 的 BC 边上的中线，求证：AE 和 DF 是异面直线．

8. 已知不共面的三条直线 a、b、c 相交于点 P，$A \in a$，$B \in a$，$C \in b$，$D \in c$，求证：AD 与 BC 为异面直线．

第 4 课时　空间直线（二）

重点导读

两条直线成异面直线时，主要研究它们所成的角与距离．

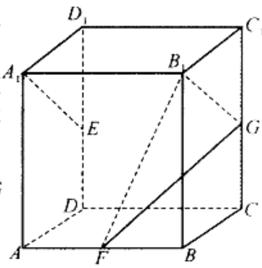
两条异面直线所成的角的定义：在空间任取一点 O 分别作 a、b 的平行线 a'、b'，a' 与 b' 所成的角就定义为 a、b 所成的角．因此，求两条异面直线所成的角，关

键是如何作出 a'、b'，再求出其大小. 注意两条异面直线所成的角的范围是 $(0°,90°]$.

两条异面直线的垂直，可由所成角为 $90°$ 来定义. 此时，不一定要先作出 a'、b' 再求其大小，而常用线、面的垂直关系进行相互转化.

○ 问题精析

【例 1】 长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB=2$，$AD=1$，E、F、G 分别是 DD_1、AB、CC_1 的中点，求异面直线 A_1E 与 GF 所成角.



解 连结 B_1G、B_1F，则 $B_1G \parallel A_1E$

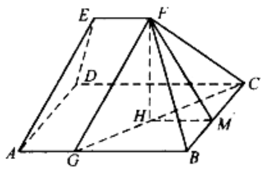
$\therefore \angle B_1GF$ 是异面直线 A_1E 与 GF 所成角或其补角.

又 $\because B_1F=\sqrt{5}$，$B_1G=\sqrt{2}$，$FG=\sqrt{3}$.

$\therefore \angle B_1GF=90°$

故异面直线 A_1E 与 GF 所成角为 $90°$.

【例 2】 如图，一个几何体中，底面 $ABCD$ 是矩形，$AB=9$，$BC=8$，$EF \parallel$ 平面 $ABCD$，且 $EF=3$，$EA=ED=FB=FC=13$，求异面直线 AE 与 CF 所成的角.



解 在平面 $ABEF$ 内，过 F 作 $FG \parallel AE$ 交 AB 于点 G，则 $\angle GFC$ 为异面直线 AE 与 CF 所成的角，连结 GC，

$\because EF \parallel$ 平面 $ABCD$，$\therefore EF \parallel AG$，

$\therefore AGFE$ 是平行四边形.

$\because EF=3$，$AB=9$，$\therefore GB=6$.

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，且 $BC=8$，

在 $Rt\triangle GBC$ 中，$GC=\sqrt{6^2+8^2}=10$；

又在 $\triangle FGC$ 中，$FG=FC=13$，$GC=10$，

$\cos\angle GFC=\dfrac{13^2+13^2-10^2}{2\times13\times13}=\dfrac{119}{169}$，

得 $\angle GFC=\arccos\dfrac{119}{169}$.

即异面直线 AE 与 CF 所成的角为 $\arccos\dfrac{119}{169}$.

【思维拓展】 求异面直线所成的角关键是作出或找到线线相交的角，再在某一个三角形内解出此角.

○ 误区警示

异面直线所成角的范围是 $(0,90°]$，当求得其角的余弦值为负值时，则此角的补角是异面直线所成的角.

○ 优化训练

A 组

1. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N 分别为 A_1B_1 和 BB_1 的中点，那么直线 AM 与 CN 所成角的余弦值为(　　)

A. $\dfrac{2}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　D. $\dfrac{2}{5}$

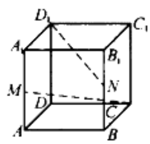
2. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $B_1E_1=D_1F_1=\dfrac{A_1B_1}{4}$，则 BE_1 与 DF_1 所成的角的余弦值是(　　)

A. $\dfrac{8}{17}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{15}{17}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，O 是底面 $ABCD$ 的中心，E、F 分别是 CC_1、AD 的中点，那么异面直线 OE 和 FD_1 所成的角的余弦值等于(　　)

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　　C. $\dfrac{4}{5}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

4. 正方体 $A_1B_1C_1D_1\text{-}ABCD$ 中，M、N 分别为棱 A_1A 和 B_1B 中点，则异面直线 CM 与 D_1N 所成角的正弦值为(　　)



A. $\dfrac{1}{9}$　　B. $\dfrac{4}{9}\sqrt{5}$

C. $\dfrac{2}{9}\sqrt{5}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

5. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，O 为 AC、BD 的交点，则 C_1O 与 A_1D 所成的角为(　　)

A. $60°$　　B. $90°$

C. $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

6. 若 a、b 是两条异面直线，则存在唯一的平面 β，满足(　　)

A. $a \parallel \beta$ 且 $b \parallel \beta$　　B. $a \subset \beta$ 且 $b \parallel \beta$

C. $a \perp \beta$ 且 $b \perp \beta$　　D. $a \subset \beta$ 且 $b \perp \beta$

B 组

7. 点 A 是等边三角形 BCD 所在平面外一点，$AB=AC=AD=BC=a$. E、F 分别在 AB、CD 上，且 $\dfrac{AE}{EB}$

$=\frac{CF}{FD}=\lambda(\lambda>0)$. 设 $f(\lambda)=\alpha_\lambda+\beta_\lambda$，$\alpha_\lambda$ 表示 EF 与 AC 所成的角，β_λ 表示 EF 与 BD 所成的角，则（　　）

A. $f(\lambda)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数

B. $f(\lambda)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

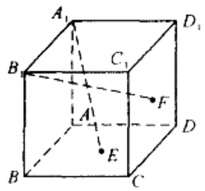
C. $f(\lambda)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数，在 $(1,+\infty)$ 上是减函数

D. $f(\lambda)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是常数

8. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别是相邻两侧面 BCC_1B_1 及 CDD_1C_1 的中心.

(1) 判断 A_1E 和 B_1F 的位置关系；

(2) 求 A_1E 和 B_1F 所成角的大小.



第 5 课时　异面直线

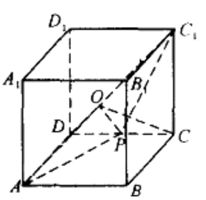
重点导读

如果两条异面直线 a，b 所成的角是直角，我们就说这两条异面直线互相垂直，记作 $a\perp b$，和两条异面直线都垂直相交的直线，叫做两条异面直线的公垂线；

两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段（公垂线段）的长度叫做两条异面直线的距离.

问题精析

【例 1】 正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，O 是对角线 AC_1 的中点，P 为 CD 的中点，求证：PO 是 AC_1 与 DC 的公垂线.



证明　连结 PC_1、AP，则 $Rt\triangle PCC_1\cong Rt\triangle PDA$，

$\therefore AP=PC_1$，$\because O$ 为 AC_1 的中点，$\therefore PO\perp AC_1$，

连结 OC、OD，$\because O$ 为 AC_1 的中点，$\therefore CO=DO$，

又 P 为 DC 的中点，$\therefore OP\perp DC$，

$\therefore PO$ 是 AC_1 与 DC 的公垂线.

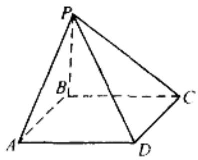
【思维拓展】 证明某一条直线是两条异面直线的公垂线，须证明以下两点：

① 与两条异面直线都垂直，② 与两条异面直线都相交.

【例 2】 已知 P 为矩形 $ABCD$ 所在平面外一点，$PA\perp BC$，$PB\perp CD$，PA 与 CD 所成角为 60°，PD 与 BC 所成角为 30°，$PA=a$.

(1) 求直线 PA 与 CD 间的距离；

(2) 求直线 PB 与 AD 间的距离.



解　(1) $\because ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD\perp CD$，$AD\parallel BC$，

又 $PA\perp BC$，$\therefore PA\perp AD$，

$\therefore AD$ 是异面直线 PA 与 CD 的公垂线段.

$\because PD$ 与 BC 所成的角为 30°，$BC\parallel AD$，

$\therefore PD$ 与 AD 的夹角为 30°，即 $\angle PDA=30^\circ$，

在 $Rt\triangle PAD$ 中，$\angle PAD=90^\circ$，$\angle PDA=30^\circ$，$PA=a$，$\therefore AD=\sqrt{3}a$.

(2) 同上可证，$PB\perp AB$，$AD\perp AB$，

$\therefore AB$ 是异面直线 PB 与 AD 间的公垂线.

在 $Rt\triangle PBA$ 中，$\angle PBA=90^\circ$，$\angle PAB=60^\circ$，$PA=a$，

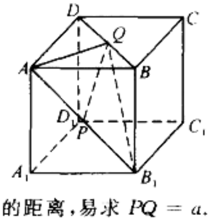
$\therefore AB=\frac{a}{2}$.

【思维拓展】 本题在原图形中找到两异面直线间的公垂线段，求出此公垂线段的长度，即得两异面直线间的距离，求异面直线间距离一般步骤为：一找（或作），二证明，三指（指出转化为平面图形中的什么距离），四计算（借助有关知识计算出它们的公垂线的长度）.

误区警示

棱长为 a 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，求异面直线 AB_1 与 BD 的距离.

错解：取 AB_1、BD 的中点 P、Q，连 PQ、AQ、B_1Q.



$\because AD=BB_1$，$DQ=BQ$，

$\therefore Rt\triangle AQD\cong B_1QB$，$\therefore AQ=QB_1$，$\therefore PQ\perp AB_1$.

则同理可证 $PQ\perp BD$，

$\therefore PQ$ 为异面直线 AB_1 与 BD 的距离，易求 $PQ=a$.

剖析：$Rt\triangle AQD$ 与 $Rt\triangle B_1OB$ 不可能全等，虽然有两组边相等，但不是对应边，显然 $AD\neq QB_1$. 因此，PQ 不是所求的距离.

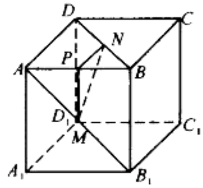
正解：在 AB_1 上任取一点 M，作 $MP\perp AB$ 于 P，

$PN \perp DB$ 于 N，

∴只要求出 MN 的最小值即可，

设 $AM = x$，则

$MP = \frac{\sqrt{2}}{2}x, AP = \frac{\sqrt{2}}{2}x$.



$\therefore PB = a - \frac{\sqrt{2}}{2}x$，

$PN = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - \frac{\sqrt{2}}{2}x) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}a - x)$，

$$\therefore MN = \sqrt{PM^2 + PN^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{3}{2}(x - \frac{\sqrt{2}}{3}a)^2 + \frac{2}{3}a^2}，$$

当 $x = \frac{\sqrt{2}}{3}a$ 时，$(MN)_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$，

故所求异面直线的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

○优化训练

A 组

1. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，O 为正方形 $ABCD$ 的中心，E、F 分别为 AB、BC 的中点，则异面直线 C_1O 与 EF 的距离为________.

2. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，EF 是异面直线 AC、A_1D 的公垂线，则 EF 和 BD_1 的关系是(　　)

A. 异面　B. 平行　C. 垂直　D. 相交

3. 正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，O 是底面 $ABCD$ 的中心，M、N 分别是棱 DD_1，D_1C_1 的中点，则直线 OM(　　)

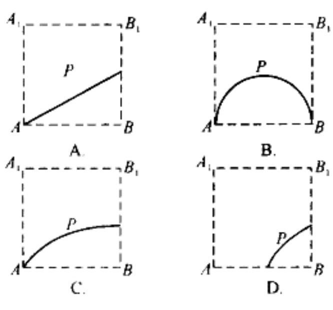
A. 是 AC 和 MN 的公垂线

B. 垂直于 AC，但不垂直于 MN

C. 垂直于 MN，但不垂直于 AC

D. 与 MN、AC 都不垂直

4. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的侧面 AB_1 内有一动点 P 到直线 A_1B_1 与直线 BC 的距离相等，则动点 P 所在曲线的形状为(　　)图示



5. 下列命题中正确的一个是(　　)

A. 若 a 与 b 是异面直线，b 与 c 也是异面直线，则 a 与 c 也是异面直线

B. 已知异面直线 a，b，两条直线 c，d 分别与 a，b 都相交，则 c，d 也是异面直线

C. 四个角都是直角的四边形一定是矩形

D. 两条异面直线可能没有公垂线

6. 在棱长为 a 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，下列说法正确的是(　　)

A. 直线 A_1B 与 DC_1 是距离为 a 的异面直线

B. 异面直线 AA_1 与 BC 的公垂线是 A_1B_1

C. 异面直线 AA_1 与 BD 的距离是 a

D. 在各棱所在的直线中，任何两条直线间的距离为 a

B 组

7. 在棱长为 a 的正方体 AC_1 中：

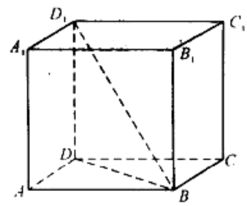
① 求 BD 和 B_1C 所成的角；

② 求 BD_1 和 B_1C 所成的角；

③ BD_1 不和哪些面对角线垂直?

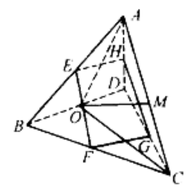
④ BD_1 与 CC_1 之间的距离；

⑤ BD_1 与 B_1C 之间的距离.



8. 空间四边形 $ABCD$，$AB = BC = CD = DA = a$ 对角线 $AC = BD = b$，E、F、G、H 分别为所在边的中点. 求：(1) 四边形 $FEGH$ 的面积；

(2) BD 与 AC 的距离.



第 6 课时　直线与平面平行的判定和性质(一)

○重点导读

直线与平面的位置关系有三种：

① 直线在平面内，② 直线与平面相交，③ 直线与

直线与平面平行的判定定理是通过直线与直线平行来判定直线与平面平行，它必须具备三个条件：

平面外的一条直线、平面内的一条直线、这两条直线平行．用符号表示为

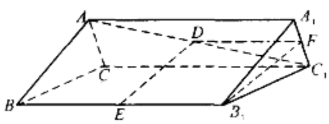
$$\left.\begin{array}{l} a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \parallel b \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel \alpha$$

判定定理的证明是用反证法，在证明中，既要理清思路，又要借助图形进行思考，准确使用符号进行表达．

判定定理的使用必须紧扣定理的三个条件，并且注意思路的严密，表达的规范．

○问题精析

【例1】 如图，正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，D、E 分别为 AC_1、BB_1 的中点，求证：$DE \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$.



证明 取 A_1C_1 中点 F，连结 B_1F、DF，

$\because D$、E 分别为 AC_1 和 BB_1 的中点，

$\therefore DF \parallel AA_1$，$DF = \dfrac{1}{2}AA_1$，

$B_1E \parallel AA_1$，$B_1E = \dfrac{1}{2}AA_1$，

$\therefore DF \parallel B_1E$，$DF = B_1E$，

$\therefore DEB_1F$ 为平行四边形，

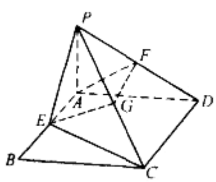
$\therefore DE \parallel B_1F$.

又 $\because B_1F \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，$DE \not\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，

$\therefore DE \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$.

【思维拓展】 关键是作出平面 $A_1B_1C_1$ 内与直线 DE 平行的直线 B_1F；又题中有线段中点的条件，因此常考虑利用三角形中位线的性质．

【例2】 设 $PA \perp$ 平面 ABC，四边形 $ABCD$ 是矩形，E、F 分别是 AB、PD 的中点，求证 $AF \parallel$ 平面 PCE.



证明 取 PC 中点 G，连 FG、EG，

$\because F$ 是 PD 中点，G 是 PC 中点，$\therefore FG \underline{\parallel} \dfrac{1}{2}CD$，

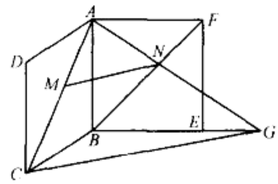
又 $ABCD$ 是矩形，E 是 AB 中点，$\therefore AE \underline{\parallel} \dfrac{1}{2}CD$，

$\therefore FG \underline{\parallel} AE$，即 $AEGF$ 是平行四边形，

得 $AF \parallel EG$，又 $EG \subset$ 平面 PCE，$AF \not\subset$ 平面 PCE，

$\therefore AF \parallel$ 平面 PCE.

【例3】 如图，两个全等的正方形 $ABCD$、$ABEF$ 所在平面相交于 AB，$M \in AC$，$N \in FB$，且 $AM = FN$，求证：$MN \parallel$ 平面 BCE.



分析 问题的关键就是在平面 BCE 中找到能与 MN 平行的直线．

证明一 连结 AN 并延长交 BE 延长线于 G，连结 CG.

由 $AF \parallel BG$ 知 $AN : NG = FN : NB$，

又在正方形 $ABCD$ 与 $ABEF$ 中，

$FN : NB = AM : MC$，

$\therefore AN : NG = AM : MC$，

$\therefore MN \parallel CG$．又 $MN \not\subset$ 平面 BCE，$CG \subset$ 平面 BCE.

于是 $MN \parallel$ 平面 BCE.

证明二 过 M、N 分别作 MP、NQ 平行 AB 交 BC、BE 于 P、Q，

$$MP : AB = CM : CA = BN : BF = NQ : EF = NQ : AB,$$

$\therefore MP = NQ$，又 $MP \parallel NQ$，

$\therefore MPQN$ 是平行四边形，得 $MN \parallel PQ$.

又 $MN \not\subset$ 平面 BCE，$PQ \subset$ 平面 BCE.

因此，$MN \parallel$ 平面 BCE.

【思维拓展】 线面平行的证明，一般都是要根据判定定理，找到平面内的一条直线；问题的关键就在于如何找，这就需要根据条件，不拘一格地处理．

○误区警示

【例】 a、b 是平面 M 外的两条直线，$a \parallel$ 平面 M，则“$a \parallel b$”是“$b \parallel$ 平面 M”的（　　）

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

错解：过 a 作平面 N 与平面 M 相交于直线 c，

$\because a \parallel$ 平面 M，$\therefore a \parallel c$，

又 $a \parallel b$，$\therefore b \parallel c$，

从而 b // 平面 M,故选(C).

错误原因:充要问题一定要研究相反的情况.这里 b // 平面 M 时,a 与 b 未必平行,可以相交,也可以异面.因此,是充分不必要条件.正确答案应选(A).

训练

A组

1. 若 a、b 是异面直线,且 a // 平面 α,那么 b 与平面 α 的位置关系是(　　)

A. b // α

B. b 与 α 相交

C. $b \subset \alpha$

D. 以上三种说法都有可能

2. 已知直线 m、n 和平面 α,则 m // n 的一个必要条件是(　　)

A. m // α,n // α　　B. $m \perp \alpha$,$n \perp \alpha$

C. m // α,$n \subset \alpha$　　D. m、n 与 α 成等角

3. 已知 l、m、n 为两两垂直且异面的三条直线,过 l 作平面 α 与 m 垂直,则直线 n 与平面 α 的关系是(　　)

A. n // α

B. n // α 或 $n \subset \alpha$

C. $n \subset \alpha$ 或 n 不平行于 α

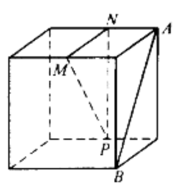
D. $n \subset \alpha$

4. 分别和两条异面直线平行的两条直线的位置关系是(　　)

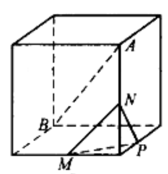
A. 一定平行　　B. 一定相交

C. 相交或异面　　D. 一定异面

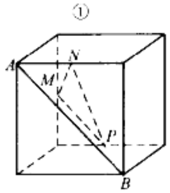
5. 下列四个正方体图形中,A、B 为正方体的两个顶点,M、N、P 分别为其所在棱的中点,能得出 AB // 面 MNP 的图形的序号是__________.(写出所有符合要求的图形序号)



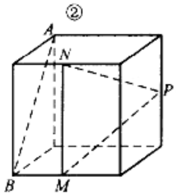
①



②

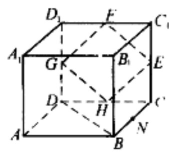


③



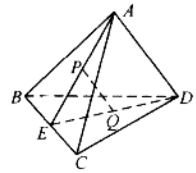
④

6. 如图,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,E、F、G、H 分别是棱 C_1C、C_1D_1、D_1D、DC 的中点,N 是 BC 的中点,点 M 在四边形 $EFGH$ 及其内部运动,则 M 满足________条件时,有 MN // 平面 B_1BDD_1.



B组

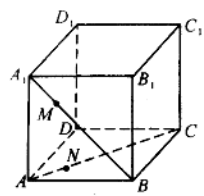
7. 已知空间四边形 $ABCD$,P、Q 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 的重心,求证 PQ // 平面 ACD.



8. 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a,M、N 分别是 A_1B 和 AC 上的点,$A_1M = AN = \frac{\sqrt{2}}{3}a$,

(1) 求证:MN // 平面 BB_1C_1C;

(2) 求:MN 的长.



第 7 课时　直线与平面平行的判定和性质(二)

导读

直线和平面平行的性质定理,是由直线和平面平行推出直线与直线平行,用符号表示为

$$\left.\begin{array}{l} a /\!/ \alpha \\ a \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = b \end{array}\right\} \Rightarrow a /\!/ b$$

直线和平面平行的性质定理,提供了证明直线与直线平行的一种重要的途径.在线面平行关系的证明中,常常综合应用直线与平面平行的判定定理和性质定理,反复交替地进行线面平行 ⇒ 线线平行 ⇒ 线面平行 ⇒ 线线平行的转化,往后还可以再与面面平行进行转化.

直线与平面平行时,直线上任意一点到平面的距离都相等,因此,可以定义直线与平面的距离;求线面距离时,必须寻找点到平面的垂线段,这又涉及直线