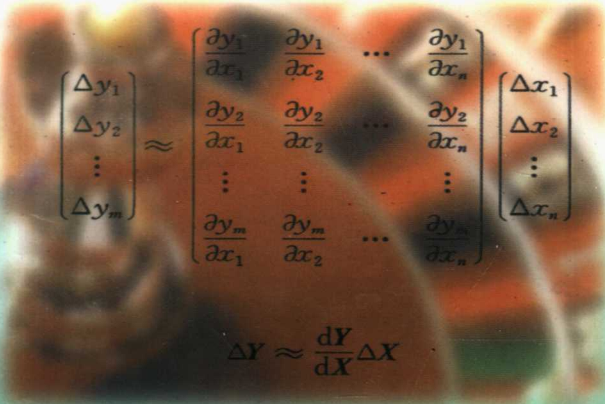

$$\begin{bmatrix}\Delta y_1\\ \Delta y_2\\ \vdots\\ \Delta y_m\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \vdots\\ \Delta x_n\end{bmatrix}$$

$$\Delta Y\approx\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}\Delta X$$

矩阵分析

刘丁酉　编著

武汉测绘科技大学出版社

矩阵分析

刘丁酉　编著

武汉测绘科技大学出版社

(鄂)新登字 14 号

图书在版编目(CIP)数据

矩阵分析/刘丁酉编著.—武汉:武汉测绘科技大学出版社,1998.9
ISBN 7-81030-652-9

Ⅰ.矩… Ⅱ.刘… Ⅲ.矩阵-研究生教育-教材 Ⅳ.O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 21041 号

责任编辑:张立福　　　　封面设计:曾　兵
武汉测绘科技大学出版社出版发行
(武汉市珞喻路 129 号,邮编 430079)
武汉测绘科技大学出版社印刷厂印刷
*
开本:850×1168　1/32　印张:10　字数:250 千字
1998 年 9 月第 1 版　　1998 年 9 月第 1 次印刷
印数:0001～1500 册　　定价:18.00 元

前　言

本书是武汉测绘科技大学工科硕士研究生必修的学位课程“高等代数”的教学用书，是以工科院校通用的工科数学《线性代数》作为预备知识，并参照国家教委课程指导委员会指定的工科硕士研究生“矩阵论”课程教学的基本要求，结合测绘类及相关学科的应用特点，在历年教学实践的基础上编写而成的。由于矩阵论既是一门发展完善、理论严谨、方法独特的数学基础课，又广泛应用于工程科学的各个领域，故该教材的基本内容在硕士研究生的培养过程中是不可缺少的组成部分，对培养学生的逻辑思维能力、推理能力及解决实际问题的能力等方面具有极其重要的地位和作用。

本书仅限于工科硕士生的专业需要及数学素质的培养，结合数学知识的自然延伸与专业实际的特点进行选材，力求在内容上更适当，在结构上较合理，既兼顾数学自身的系统性，又注重理论和方法在工程科学中的实用性。为此，本书参照我校历届研究生数学课程设置的基本要求与教学规律，选择了线性代数基础和矩阵理论及应用的部分基本内容，以满足教学需要。其中第一部分由前四章构成，内容包括线性代数的有关概念、线性空间与线性变换、相似矩阵与 Jordan 标准形、内积空间，其中第一章基本上是在工科线性代数基础上的补充和深化，同时也是后续内容赖以立足的预备知识；二至四章可以视为线性代数的基本内容。第二部分由五、六两章构成，它是矩阵分析的基本内容。这里我们仅选择了专

业上更实用的向量与矩阵范数、矩阵分析以及广义逆矩阵等内容。

概括地讲，本书还力求突出以下几个特点：一是注重教学对象，本书考虑到目前硕士生中有很大一部分为工作多年的非应届毕业生，解题及证明技巧已相当陌生，故增写第一章作为衔接，并在前四章后面各增写了综合举例一节，后两章增加了不少实例。二是注重专业需要，除去各章节内容皆有侧重外，本书第六章的广义逆矩阵比起其他相关的教学参考书来要丰富得多，已能够满足测绘类的专业所需。三是吸收了一部分近现代数学与科技中的矩阵分析新方法，如求 Jordan 标准形的波尔曼方法、矩阵幂级数等等。各章还配有大量的习题供学生选做和复习。此外，本书还在加强与本科线性代数的衔接、突出专业特色（如加权广义逆矩阵、矩阵分解）等方面作了较有特色的补充。

本书在编写和出版过程中，武汉测绘科技大学张范荪教授曾给予了热情的指导和帮助，武汉高校研究生数学教学协作组的老师们也曾提出过一些宝贵意见和建议，本书还参考使用了多位专家的教材和专著，武汉测绘科技大学研究生部及教材科为本书的出版提供了大力支持。这里特向所有支持本书出版的同志表示衷心谢意。

书中不妥之处，敬请各位同行及读者批评指正。

作　者

1998 年 8 月

目　录

第一章　线性代数的有关概念

由于我们置身于“宇宙”这个空间中，对于在该几何空间内所描述的几乎一切问题常常易于为我们的直觉所体察，因而我们习惯于用它来考察和研究有关问题，以至于遇到新情况时，我们也希望能像这个几何空间一样给出其形象直观的解释。然而，随着科学技术的不断发展，研究对象已远远超出了几何空间的范围，例如，在测量上就经常会遇到多于三个点(或状态)的量测结果的数值分析。此外，在一般的数值问题中也需要讨论各类函数或矩阵集合的性质。总之，我们希望建立一些类似于 R^3 但比之更抽象的结构，使得各种问题都能纳入一个统一的数学描述之中。线性代数正是这一基本思想的直接产物。

当前，线性代数已成为工程技术领域的科技人员所必须掌握的数学课程之一。在测绘部门，甚至是最简单的测量平差计算，也都把线性代数作为其重要的基础理论和方法。此外，线性代数也是矩阵论等数学课程的入门砖。作为预备，本章先介绍线性代数的有关概念，这些内容既是对已学线性代数知识的复习和深化，也是本课程的基础内容。

§1.1　n 阶行列式

行列式是研究线性方程组的基本工具，也是其他科学技术领

域常用的数学工具之一。二阶及三阶行列式早已为大家所熟悉，这里讨论 n 阶行列式的一般定义及其性质。为此，先回顾一下排列的概念。

一、n 级排列

定义 1.1.1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1 i_2\cdots i_n$ 称为一个 **n 级排列**。

显然，n 个自然数排成的所有 n 级排列数为 $n!$ 且 $12\cdots n$ 是其中的一个 n 级排列，它具有按递增方式排列的自然顺序。

定义 1.1.2 在一个排列中，若一对数的前后位置与自然顺序相反，则称它们为一个**逆序**。一个排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**。

例如 32514 就是一个 5 级排列，其中 32，31，21，51，54 都是该排列中的逆序，故其逆序数为 5。一般地，排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$。

定义 1.1.3 逆序数是奇数的排列称为**奇排列**，逆序数是偶数的排列称为**偶排列**。

例如 32514 是奇排列，12345 是偶排列。

定义 1.1.4 交换某排列中两个数的位置而其余的数不变，则称对该排列施行了一个**对换**。

定理 1.1.1 任一排列皆可经一系列对换变为自然顺序，且对换个数与排列的逆序数相同。

证 不妨设排列是 $1,2,\cdots,n$ 的任一 n 级排列，且 1 前面有 r_1 个数，则经 r_1 次对换可将 1 换到第一个位置而其余各数相对位置不变。进而在排列中除 1 外，若 2 前面有 r_2 个数，也可经 r_2 次对换将 2 换到仅次于 1 的第二个位置上，如此下去，只需有限次对换即可将排列换成自然顺序，且对换次数 $r_1+r_2+\cdots+r_{n-1}$ 恰为排列的逆序数。

由定理 1.1.1 易见，任意两个 n 级排列皆可经一系列对换互变。

定理 1.1.2　每个对换都改变排列的奇偶性。

证　易证任一排列中相邻两个数的对换改变排列的奇偶性。一般地，设某排列为

$$\cdots j i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots$$

若将该排列中的 k 与 i_s 对换，再与 i_{s-1} 对换，直至与 i_1 对换，则经此 s 次对换后可将排列换成

$$\cdots j k i_1 i_2 \cdots i_s \cdots$$

再将此排列中的 j 与 $k,i_1,\cdots,i_s$ 依次作 $s+1$ 次对换，则排列又可换成

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots$$

这意味着将原排列中的 j 与 k 作对换可由 $2s+1$ 次相邻位置的互换实现，故对换前后排列的奇偶性相反。

二、n 阶行列式的定义与性质

定义 1.1.5　由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的一个 n 阶行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.1.1}$$

即所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.1.2}$$

的代数和，其中每一项的符号由排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的奇偶性决定。

由定义，n 阶行列式(1.1.1)是由形如(1.1.2)的 $n!$ 项之代数

和组成的。

例 1 计算上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 该行列式的左下角元素全为零，因而必有许多形如(1.1.2)式的项为零。注意到(1.1.1)式中代数和的每一项皆取自不同行不同列，于是只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$不为零。又因 $12\cdots n$ 为偶排列，故所求行列式 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

作为上例的特殊情形，我们称主对角线（从左上角到右下角这条对角线）以外的元素全为零的行列式为**对角形行列式**，易见它的值也等于主对角线上元素的乘积。

由定理 1.1.1 及行列式(1.1.1)的行下标与列下标地位的对称性，n 阶行列式的定义也可按列下标成自然顺序表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{1.1.3}$$

n 阶行列式也具有以下性质：

a) 行列互换，行列式不变。即对转置行列式 D^{T}，有

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D$$

b) 行列式中每一行（或列）的公因子可以提到行列式之外。即用某一个数乘以行列式的一行（或列）就相当于用这个数乘以此行

列式。

由性质 b)可得

(1) 若行列式中一行(或列)为零,则该行列式为零;

(2) 若用某一个数乘以 n 阶行列式的每一个元素,则相当于用这个数的 n 次幂乘以此行列式。

c) 对换行列式中两行(或两列)的位置,行列式反号。

d) 若行列式中有两行(或两列)相同,则该行列式为零。

由性质 a)及 d)可得,若行列式中有两行(或两列)对应成比例,则该行列式为零。

e) 若行列式中某一行(或列)是两组数的和,则该行列式等于两个行列式的和,且两行列式除去该行(或列)分别各取一组数外,其余各行(或列)都与原来行列式的对应行(或列)相同。

性质 e)还可推广到某一行(或列)为多组数的和的情形。

f) 把行列式的某行(或列)的倍数加到另一行(或列),该行列式不变。

利用行列式的定义及定理 1.1.2 不难证明上述性质,留作习题。

例 2 若一个 n 阶行列式 D 的元素满足

$$a_{ij}=-a_{ji} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

则称它为**反对称行列式**,且有

$$D=D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^n D$$

特别地,当 n 为奇数时,有 $D=0$。

三、n 阶行列式的展开定理

在 n 阶行列式的展开式中,虽然每一项都是 n 个元素的连乘

积，但因其取自不同行不同列，故对某一确定行的 n 个元素（如 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$）来说，每一项都仅含该行中的一个元素。这意味着 n 阶行列式的 $n!$ 项可按该行的 n 个元素提取公因子而分成 n 组，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \tag{1.1.4}$$

其中 $A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 代表那些含有 a_{ij} 的项在提取公因子 a_{ij} 后的代数和。

为了分析这些 A_{ij} 的结构，我们引入以下定义。

定义 1.1.6 在 n 阶行列式 D 中任选 k 行和 k 列（$k\leqslant n$），将其交叉点上的 k^2 个元素按照原来位置排成一个 k 阶行列式 M，称为 D 的一个 **k 阶子式**。在 D 中划去 M 所在之 k 行 k 列后余下的 $(n-k)^2$ 个元素按照原来位置排成的 $n-k$ 阶行列式 M'，称为 M **的余子式**。

由定义知 M 与 M' 互为余子式，有时也称 M 与 M' 为 D 的一对**互余子式**，例如四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中的子式 $M=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ 与余子式 $M'=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ 就是一对互余子式，其中 M 取自第一、三行和第二、四列。

定义 1.1.7 设 D 的 k 阶子式 M 在 D 中所在的行列指标分别是 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 和 $j_1,j_2,\cdots,j_k$，则称

$$A=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}\cdot M' \tag{1.1.5}$$

为 M 的代数余子式，其中 M' 为 M 的余子式。

引理 1.1.1 行列式 D 的任一子式 M 与其代数余子式 A 之积的每一项皆为 D 中的展开项。

证 设子式 M 位于 D 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行和第 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列，且

$$i_1<i_2<\cdots<i_k,\quad j_1<j_2<\cdots<j_k$$

若变动 D 中的行和列使 M 位于 D 的左上角，并保持 M 的余子式 M' 的行列相对位置不变，则 M' 位于 D 的右下角。由定理 1.1.1 的证明可类似求得上述变动所进行的相对位置对换次数为

$$(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_k-k)+(j_1-1)+(j_2-2)+\cdots+(j_k-k)$$
$$=(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)-2(1+2+\cdots+k)$$

若记 D_1 为变换后的行列式，则

$$D_1=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}\cdot D$$

不妨设 D_1 中的一对互余子式 M_1 与 M_1' 为

$$M_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\quad M_1'=\begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

此时 M_1 的代数余子式

$$A_1=(-1)^{(1+2+\cdots+k)+(1+2+\cdots+k)}\cdot M_1'=M_1'$$

且 M_1 的每一项都可写成

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{k\alpha_k}$$

M_1' 的每一项也可写成

$$a_{k+1,\beta_1}a_{k+2,\beta_2}\cdots a_{n,\beta_{n-k}}$$

其中 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$ 是 $1,2,\cdots,k$ 的一个排列，$\beta_1\beta_2\cdots\beta_{n-k}$ 是 $k+1,k+2,\cdots,n$ 的一个排列，于是两项乘积 $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{k\alpha_k}a_{k+1,\beta_1}a_{k+2,\beta_2}\cdots a_{n,\beta_{n-k}}$ 的符号为

$$(-1)^{\tau(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k)+\tau(\beta_1-k,\beta_2-k,\cdots,\beta_{n-k}-k)}=(-1)^{\tau(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k\beta_1\beta_2\cdots\beta_{n-k})}$$

它正是 D_1 中的一项且符号相同，注意到 $M_1=M, M_1'=M'$，即知 MA 的每一项都与 D 中的对应项相等且符号相同。

定理 1.1.3(拉普拉斯定理) 设在行列式 D 中任意取定 k 行 $(1\leqslant k\leqslant n-1)$，则由这 k 行元素所组成的一切 k 阶子式与其对应的代数余子式的乘积之和等于行列式 D。

证 设取定后的一切 k 阶子式为 $M_1, M_2, \cdots, M_t$，且它们的代数余子式分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_t$，于是由引理 1.1.1 知 $M_iA_i(i=1, 2, \cdots, t)$ 中每一项皆为 D 中的项且符号相同，因此要证明

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t$$

只须证明等式两端项数相等即可。易见右端为

$$t\cdot k!\cdot(n-k)!=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot k!\cdot(n-k)!=n!$$

定理得证。

在定理 1.1.3 中取 $k=1$，即知(1.1.4)式中的 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，这说明行列式 D 等于某行(或列)的元素分别与其对应的代数余子式乘积之和，再结合行列式的性质 d)易知，在行列式 D 中，某行(或列)的元素与另一行(或列)相应元素的代数余子式的乘积之和为零，于是有以下定理。

定理 1.1.4 设 n 阶行列式 D 的任一元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，则

$$\sum_{s=1}^{n}a_{ks}A_{is}=\begin{cases}D, i=k;\\0, i\neq k;\end{cases}\qquad \sum_{s=1}^{n}a_{sk}A_{sj}=\begin{cases}D, j=k;\\0, j\neq k。\end{cases}\quad(1.1.6)$$

成立。

例 3 利用定理 1.1.3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\0 & -1 & 2 & 1\\1 & 0 & 1 & 3\\0 & 1 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

解 取定 D 中第一、二行并利用定理 1.1.3 可得

$$
\begin{aligned}
D &= M_1A_1 + M_2A_2 + M_3A_3 + M_4A_4 + M_5A_5 + M_6A_6 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 8 + 6 - 1 + 5 - 18 - 7 \\
&= -7
\end{aligned}
$$

利用拉普拉斯定理还可证明以下定理：

定理 1.1.5 两个 n 阶行列式

$$
D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}
$$

二者的乘积等于一个 n 阶行列式 C，其中元素 c_{ij} 是 D_1 的第 i 行元素与 D_2 的第 j 列对应元素乘积的和，即

$$
C = D_1D_2, \quad c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj} \qquad (i,j = 1,2,\cdots,n)
$$

该定理又称为**行列式的乘法定理**。（证明略去）

四、克莱姆法则

作为行列式的一个应用，这里简要回顾一下解线性方程组的克莱姆法则。

定理 1.1.6 若线性方程组