


教育部推荐教材

金融学研究生核心教材系列

数理金融学

林清泉 主编.....



 中国人民大学出版社

F830
135
2007

教育部推荐教材

金融学研究生核心教材系列

数理金融学

..... 林清泉 主编

 中国人民大学出版社



图书在版编目 (CIP) 数据

数理金融学/林清泉主编.

北京: 中国人民大学出版社, 2006

教育部推荐教材

金融学研究生核心教材系列

ISBN 7-300-07260-7

I. 数…

II. 林…

III. 金融学: 数理经济学-研究生-教材

IV. F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 157864 号

教育部推荐教材

金融学研究生核心教材系列

数理金融学

林清泉 主编

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号 邮政编码 100080

电 话 010-62511242 (总编室) 010-62511398 (质管部)

010-82501766 (邮购部) 010-62514148 (门市部)

010-62515195 (发行公司) 010-62515275 (盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>
<http://www.ttrnet.com> (人大教研网)

经 销 新华书店

印 刷 河北涿州星河印刷有限公司

规 格 185mm×240mm 16 开本 版 次 2007 年 1 月第 1 版

印 张 20.75 插页 1 印 次 2007 年 1 月第 1 次印刷

字 数 401 000 定 价 35.00 元

版权所有 侵权必究

印装差错 负责调换

随着金融自由化的发展和各国金融管制的不断放松，各种金融产品层出不穷，这就导致现代金融市场的不确定性不断增加。如何在不确定的环境下使资源得到最优的配置，就成为一个现实的问题。

数理金融学是运用数学工具解决金融问题的基础。本书介绍了数理金融学的理论基础和近年的发展历程，并对各阶段的理论进行了详细的解析。



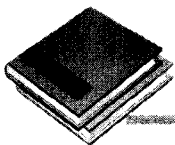
金融学研究生核心教材系列是教育部
推荐教材。

该套丛书立足于培养国际化人才，是
为金融学研究生量身定做的重点教材。

教材主编均系金融学研究教学一线
的学术带头人，有丰富的教学经验和深厚
的研究积淀，在本领域内深受同行认可。



策划编辑 王克方
责任编辑 王松
封面设计 李亚莉
版式设计 赵星华



总序

亚里士多德曾经将人类的知识分做三大类：纯粹理性、实践理性和技艺。而金融学却将这三类知识完美地融合在一起，体现了它的独特魅力，也激发了一代又一代学者的研究兴趣。金融业的发展壮大，金融学者的艰难求索，推动了金融学科的发展。曾几何时，金融学只是经济学中一个无足轻重的分支；今天，金融学与经济学相互融合，你中有我，我中有你，并且在很大程度上金融学在改写着经济学。诺贝尔经济学奖多次颁发给在金融研究中有突出贡献的经济学家便是金融学科日益壮大的明证。

20世纪30年代之前，受落后的经济发展水平和简单的金融活动的制约，当时的经济学家将货币看做覆盖在实物经济上的一层“面纱”，对经济并不产生实际影响。货币政策的任务也仅是控制货币数量，稳定物价水平，维持货币的购买力。30年代大萧条之后问世的凯恩斯《就业、利息与货币通论》成为金融学发展史上一个重要的里程碑，它推进了经济学家对于货币的地位和作用的认识。当时金融理论的视角虽然由宏观和微观两个角度构成，但是宏观层次的研究明显要重于微观层次的研究。宏观金融理论主要围绕货币职能、货币供求机制以及货币政策等问题展开。微观金融理论则局限于商业银行领域，对其他金融机构极少涉及。在研究方法上，当时的金融理论采用的是古典经济学一般均衡的分析方法，侧重于纯理论性的描述，极少运用数学和统计学的分析工具。





20世纪六七十年代,货币经济进一步发展到金融经济。随着金融市场化、自由化的兴起和技术进步的加快,金融活动突破了原有的机构和国界的藩篱,金融创新层出不穷。沧海桑田式的巨大变迁,不仅冲击着传统的经济思想,而且从根本上使人们重新认识了金融之于现代经济的重要意义,分析视角也日趋创新。追随着哈里·马克维茨的创见,金融学家在资本市场运行机制、资产定价与公司财务方面进行了深入的探索,奠定了金融经济时代的思想基础。与传统金融理论相比,现代金融学研究更加务实与深入,研究对象更偏重微观层次。由于金融活动前所未有的复杂性,金融理论的研究手段更为先进,借助于现代信息技术,并广泛运用数学和模型分析方法以及定量分析方法。金融学由描述性科学逐步走向了分析性科学。

金融实践的革命,金融学研究的推进,成为推动金融学科发展的沃土。尤其在我国这样一个经济体制转轨的国家,近几十年间,金融无论是在实践还是在理论上的发展都是日新月异,一日千里。结果是,金融学在整个学科体系中的独立地位日渐凸现,研究体系和基本框架日益完善,有力地指导着现实的经济运行。改革开放之前,金融学科的理论基础是马克思主义经典著作关于货币、信用和银行在社会主义社会中的地位和作用的有关论述,学科发展模式则是以当时的苏联为范本。这一时期,该领域研究的重点集中在货币、信用和银行等问题上。由于当时实行的是高度集中的计划经济体制,金融业在经济中的作用受到了极大的抑制,金融学科发展缓慢。随着经济制度的转轨,中国的金融实践得到了发展;同时,以市场经济为背景的西方金融理论思想被引入,涌现出一批旨在描述和解释中国金融实践的理论成果。金融学作为新兴学科在高等教育学科体系中确立了相对独立的地位,金融学科发展呈现出繁荣景象。20世纪80年代开始,随着改革开放的深入,我国金融业发展的市场化、科技化和全球化的趋势日益明显,对金融人才的质量和结构提出了更高的要求。为此,金融教育需要先行一步,通过相应的改革设计,努力培养出大批既掌握本国金融运行特点和规律,又通晓金融国际运作的高级人才。目前,金融学术界和教育界人士就学科发展定位、学科边界、课程体系设计等诸多方面还存在着争论,但总体而言,要适应我国金融实践的发展,金融学科的研究对象应当向金融市场和微观主体倾斜,更加体现其应用性;研究方法也应当更多地使用数理分析工具,更加体现其科学性。

金融学研究生核心教材系列是“211工程金融政策与金融管理”项目的标志性成果之一。该项目根据教育部“进一步凝练学科方向,使学科的结构更加优化,定位更加准确,重点更加突出,特色更加鲜明”的指示精神,目标是要巩固和加强中国人民大学在宏观金融学领域的优势地位,并以此为基础,发展以金融风险为基础的微观金融学,特别是努力探索微观金融与宏观金融的内在联系机理,然后在一个合理逻辑的基础上,推动中国金融教学领域的改



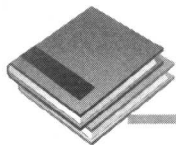


革。本套教材系列包括的 13 部教材：《货币经济学》、《金融经济学》、《数理金融学》、《计量金融学》、《制度金融学》、《高级财务学》、《证券投资学》、《国际金融学》、《投资银行学》、《银行经济学》、《金融工程学》、《保险经济学》、《保险精算学》，就是基于上述思想，在充分消化、吸收国际一流同类教材精华的基础上，立足于中国国情，强调金融学一般原理与本土案例的结合。值得一提的是，本套教材吸收了中国人民大学成功的教学改革实践——“中美金融教学实验项目”的许多成果。这一中外合作办学项目于 2002 年开始实施，旨在培养融会贯通中西，既掌握现代金融理论、又有实际应用能力的高层次人才。项目的生源是中国人民大学相关专业本科三年级开始本硕连读的优秀学生（2005 年开始通过全国大学生金融夏令营的方式选拔）；授课教师既有美国麻省理工学院、耶鲁大学、哥伦比亚大学和明尼苏达州立大学的经济学或金融学教授，又有接受过国外金融学教育的国内优秀教师。课程安排的原则是学术与应用并重，思想与方法并重，中外教材并重，授课语言依从效果。四年来，该项目培养的人才已经开始得到社会和学界的认可。“中美金融教学实验项目”的有益成果为本套教材提供了教育实践基础。

鉴于金融是当前市场经济中最为活跃的一分子，金融学是一个正在发展的开放性新兴学科，因而学科边界和内涵都处于一个不断更新、变化的动态环境之中。金融理论研究和金融学科建设的争论远远没有尘埃落定的一天。现在，本套教材即将面世，唯愿能够为生机无限的金融学科贡献一份绵薄之力！

最后，特别感谢国务院学位办领导和教育部社政司领导的支持与指导。在 2002 年 7 月举办的“全国金融学科研究生专业建设研讨会”中，该套教材被定为推荐教材。





前 言



林清泉：中国人民大学财政金融学院教授、博士生导师，现任中国人民大学货币金融系副主任。1982年2月毕业于四川大学，先后获得四川大学学士学位、华中理工大学硕士学位、中国科学院博士学位，后在山东大学金融高级人才培养基地，从事金融工程、金融数学的博士后研究。林清泉教授还是德国慕尼黑大学金融与资本市场研究所高级访问学者及德国莱比锡大学金融与投资研究所高级访问学者。

金融学的核心问题是研究在不确定的环境下如何使资源配置最优。由于不确定性在资源配置决策中的重要性和复杂性，因而需要以一定的数学工具来对其进行分析。自20世纪50年代以来，随着金融学理论与金融市场和工具不断发展，数学在金融研究中的作用逐渐引起理论界和实业界的重视。随着时





间的推移, 数学理论与思想方法在金融学理论研究和实践中更加凸现出它的作用与魅力。数学理论和方法作为研究金融学的工具, 极大地促进了金融理论的发展, 数理金融学由此孕育而生。简要地说, 数理金融学 (mathematical finance) 是指运用数学理论和方法来研究金融经济运行规律, 并解决金融问题的一门新兴的交叉学科, 也是金融学因自身发展而衍生出来的一个新的分支。它是由数学与金融学相结合而产生的一门新学科, 也是金融学由定性分析向定性分析与定量分析相结合, 由规范研究 (概念的界定, 原理的介绍, 对各种现象、事例和故事的描述及推理的研究方法) 向实证研究的转变, 由理论阐述向理论研究与实用研究并重, 由金融模糊决策向以数理分析结果为依据的决策方向发展。它是 20 世纪后期随着公司财务、商业银行与证券投资业务的迅速发展而诞生的。数理金融学的基本特点是运用数学思想与方法, 并把它作为工具去研究和分析金融领域尤其是金融市场交易中的各种问题, 从而较为客观地刻画出金融交易过程中的各种行为及其可能的结果, 使得有关金融交易的决策更为合理和理智。

随着金融自由化的发展和各国金融管制的不断放松及各国金融产品的不断创新, 金融交易的范围和层次显现出多样性, 这使得金融产品的交易价格更具有不确定性。因此, 资源配置和交易过程是以金融资产的价格为核心的风险和收益的度量问题, 此时就需要我们把金融交易行为进行量化。如何正确地度量资产的风险和收益, 并对金融资产价值的不确定性进行定量分析, 从而做出最优的投融资决策, 是数理金融学研究的重点。

数理金融学是金融工程的理论基础 (严格地讲, 数理金融学没有明确的界定), 简要地说, 金融工程就是把数理金融的基本原理和结果工程化、产品化, 前者是基础理论, 后者是理论的应用。两者是相互依赖和促进的, 金融工程学的发展为数理金融不断提出新的研究课题, 从而促进了数理金融学的发展。在中国, 随着经济和金融改革的不断深入, 虽然我国在数理金融和金融工程的理论研究和实践应用方面还落后于西方发达国家, 但是人们的观念已经有了很大的变化, 对于数学在金融学研究的重要地位和作用已得到认同, 而且随着证券市场的发展, 已经有一些带有创新性的金融产品, 包括可转换债券、交易所交易基金 (ETFs) 等。伴随着中国金融体制的逐步深化以及中国金融市场的不断发展, 金融工程在中国的应用前景十分广阔, 作为金融工程基础理论的数理金融学, 也必将获得迅速发展; 同时, 数理金融学的发展不断为金融工程学提供新的理论和方法, 从而可以为金融市场提供更加系统化、更加有效的金融产品和金融解决方案。

数理金融学从一些假设出发, 通过建立数学模型表达、推理和论证金融学理论和原理。本书分为两个部分。

第一部分是基础理论篇, 包括第 1 章到第 6 章。第 1 章是金融数学基础,





它介绍了微积分、线性代数、概率论的一些主要符号和结果；效用函数理论这一经济学均衡理论的基石，尽管它的存在性受到质疑，但是许多经济学、金融学理论还是建立在这个基础之上。第2章介绍了在一定条件下效用函数的存在性、序数效用函数和基数效用函数（期望效用）及其性质，同时还给出了两个关于效用函数存在性问题的悖论。本章还在效用理论框架下讨论了消费问题，并讨论了风险厌恶的效用函数描述和一些常用的效用函数。第3章介绍了离散型金融市场，包括离散金融市场的描述并引入了状态价格和回报的概念。本章在介绍了套利组合、多余资产、可保险状态等内容之后，讨论了金融市场存在可保险状态的条件，并对金融市场的套利进行了分类，即一类套利机会和二类套利机会，并讨论了它们之间的关系。该章还介绍无套利定价模型和状态价格向量，并介绍了金融市场不存在一类、二类套利机会的等价条件，同时还介绍了无风险套利和一价原则。第4章先简要介绍了马克维茨组合理论、半方差组合理论和其他的组合模型，然后讨论了基于财富效用的组合理论以及随机占优理论，最后介绍了有效市场理论和金融市场的信息问题。第5章先简要介绍了经典的资本资产定价模型，随后介绍了资本资产定价的扩展模型：考虑税收因素的资本资产定价模型、不存在无风险资产的资本资产定价模型、考虑跨时期的资本资产定价模型以及考虑消费因素的资本资产定价模型，最后讨论了套利定价模型。第6章主要是介绍B-S公式，先介绍了B-S定价公式的发展过程、B-S公式的导出方法及主要结果，并讨论了期权价格的敏感性分析，最后介绍了B-S公式的其他推导方法和求解方法。

第二部分包括第7章到第10章。第7章介绍了近代研究金融理论的数理基础，如测度论、可测函数、条件期望和随机过程。第8章首先介绍了随机分析、随机积分的概念和结论，然后介绍了连续时间金融市场的描述、资产价格和财富过程的描述及随机微分方程解的存在唯一性，最后讨论了财富过程达到某一预定目标的分布问题，这个目标可看做是投资目标，也可以看做是某一公司破产时财富所达到的标准。第9章介绍了近十几年才发展起来的数学理论——倒向随机微分方程和正倒向随机微分方程理论，目的是使读者了解近年来数学理论的发展对金融市场理论研究的推动作用，了解应用倒向随机微分方程理论对投资策略的研究、应用正倒向随机微分方程理论对于大户投资对市场价格影响的研究所起到的重要作用。第10章介绍了应用倒向随机微分方程理论研究金融市场无套利与等价鞅测度、市场完备性的关系，这一部分内容新颖，而且讨论问题的方法较为特别。数理金融学中关于金融风险和金融风险管理的内容也很丰富，但本书没有涉及，作为弥补，本书在最后一节简要介绍了金融风险的分析方法。

近十多年来，作者在学习、教学和研究过程中体会到，对于按传统模式培养的学生来说，他们大多都具有学习现代金融学理论的数学基础，但在接受现





代金融理论及其研究方法方面有一些障碍，主要原因是他们对数学的一些符号和简单的结果不够熟悉，不能把它们与金融理论的学习和研究衔接起来。如果教师在教学中或者在教材的编写过程中注意帮助学生克服这方面的障碍，将会起到事半功倍的作用。如果读者的数学基础比较好，可跳过第1章和第7章。

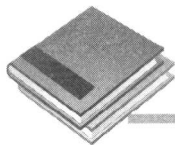
本书可作为经济学和金融学研究生的课程教材，对于那些有一定金融学和数学基础的从业人员，本书也不失为一本较好的提高教材。虽然在本书的编写过程中，作者倾注了自己的全部热情和精力，但是由于自身的学识和能力有限，不足之处在所难免，真诚希望广大读者能够不吝指正。

本书是在作者多年讲授该课程的讲稿基础上经补充修改而形成的。第5章第3节、第4节和第5节由荣琪整理编写；第6章第4节由刘志整理编写；杨丰参加了第10章部分内容的编写；其余部分由林清泉编写。感谢王振、魏刚、于岩群、陈多佳、罗刚、刘伟琳、马荷为本书的录入所付出的辛劳。

作者在此感谢“211工程”项目的支持，感谢中国人民大学出版社为本书的出版和发行所做的工作。另外，本书在编写过程中引用了相关专家的研究成果和著作，在此一并表示感谢。

林清泉





目 录

第 1 章 金融数学基础	1
§ 1 微积分基础	1
§ 2 矩阵与线性规划	5
§ 3 概率论	18
小结	25
思考题	25
第 2 章 效用函数	26
§ 1 效用函数和偏好序	26
§ 2 消费者的配给问题	36
§ 3 期望效用函数	43
§ 4 风险厌恶效用函数及常用效用函数	54
小结	64
思考题	64
第 3 章 离散状态的金融市场	65
§ 1 离散状态金融市场模型	66





§ 2 离散状态金融市场占优与套利模型 76
小结 91
思考题 92

第 4 章 证券组合问题 93

§ 1 马克维茨组合理论 94
§ 2 半方差组合 101
§ 3 基于效用函数的证券组合 105
§ 4 随机占优 113
§ 5 有效市场理论 119
小结 127
思考题 128

第 5 章 资本资产定价模型及其扩展 129

§ 1 资本资产定价模型 130
§ 2 存在税收因素影响的 CAPM 模型 139
§ 3 不存在无风险资产的 CAPM 模型 142
§ 4 时际 CAPM 模型 146
§ 5 基于消费的 CAPM 模型 152
§ 6 套利定价 (多因素) 模型 (MPM 与 APT) 153
小结 160
思考题 160

第 6 章 B-S 公式及其应用 162

§ 1 B-S 公式的发展历史 163
§ 2 布莱克-斯科尔斯期权定价公式 167
§ 3 期权价值的敏感性因素分析 174
§ 4 B-S 偏微分方程的其他论证方法及解法 177
小结 184
思考题 185

第 7 章 金融学数理基础 186

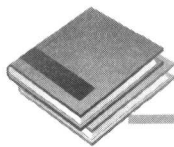
§ 1 测度论 187
§ 2 可测映射 192
§ 3 期望、条件期望 202





§ 4 随机过程	211
小结	232
思考题	233
第 8 章 连续时间金融市场	234
§ 1 随机分析初步	234
§ 2 金融市场描述	240
§ 3 资产价格和财富过程的描述——随机微分方程	246
§ 4 金融资产价值首达某一水平的分布	251
小结	256
思考题	257
第 9 章 倒向随机微分方程：投资策略与投资成本的一种描述方法	258
§ 1 问题的提出	258
§ 2 倒向随机微分方程	261
§ 3 倒向随机微分方程在金融市场中的应用	267
§ 4 正倒向随机微分方程——大户投资问题	278
小结	295
思考题	295
第 10 章 完备市场、无套利市场和等价鞅测度	296
§ 1 无套利与等价鞅测度	296
§ 2 完备市场	299
§ 3 金融风险分析方法	302
小结	311
思考题	312
参考文献	313





第 1 章

金融数学基础

经济学、金融学研究的边际效用、边际成本、效用最大化、最优投资策略等问题，需要采用微积分等数理方法作为基础。本章主要介绍在数理金融学中经常用到的数学分析、概率论、线性代数以及线性规划中的基本理论和方法，内容包括函数、微分、函数的极值、泰勒级数、齐次函数、隐函数以及在积分号下求微分；在概率论中，我们介绍了矩的概念、特征函数理论、切比雪夫不等式、正态随机变量、对数正态随机变量、大数定律和中心极限定理、截尾分布和公平博弈模型、詹森不等式；在线性代数和线性规划部分，我们介绍了向量、正交变换和广义逆、向量的范数、多元函数的微分及 Hessian 矩阵、多元函数极值条件、受限条件下的极值；最后，我们介绍了线性规划的基本概念和影子价格等内容。

§ 1

微积分基础

1.1 函数微分与泰勒级数 (Taylor series)

1. 导数与偏导数

设 $F(x)$, $F(x, y)$, \dots 都是实函数，它们的导数和偏导数分别记为：





$$F'(x), F''(x), \dots, F^{(n)}(x), \dots$$

和

$$F(x, y) \equiv F_x(x, y) \equiv \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$$

如果 $F(x, y)$ 关于 x, y 的偏导数连续, 则

$$F_{12}(x, y) \equiv F_{21}(x, y) \equiv \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (1.1)$$

2. 高阶无穷小, 同阶无穷小

$f(x) = o(x^n)$ 表示 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$, 即 $f(x)$ 是 x^n 的高阶无穷小; $f(x) =$

$O(x^n)$ 表示 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^{n+\epsilon}} = 0$, 即对于任意的 $\epsilon > 0$, $f(x)$ 是 x^n 的同阶无穷小。

3. δ 函数

如果函数 $\delta(x)$ 满足下列条件:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

且

$$\int_a^b \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \quad a \leq x_0 \leq b \quad (1.3)$$

则称函数 $\delta(x)$ 为 δ 函数。

例如

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (1.4)$$

4. 泰勒级数

设 $f(x)$ 在区间 $(x, x+h)$ 上有 n 阶导数, 则

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n + \dots \quad (1.5)$$

表示成拉格朗日余项形式的泰勒级数为:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \dots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)h^{(n-1)} + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x^*)h^n \quad (1.6)$$

其中, $x^* \in [x, x+h]$ 。

