◎ 正确思维和逻辑错误 解题方法分析和点评

跟我做

微积分演习

阎占立 邢鑫
编著

接触多变的题型
总结解题的方法
揭示命题的规律
测试应试的能力
体验做题的乐趣

郑州大学出版社

◎ 正确思维和逻辑错误　解题方法分析和点评

跟我做
微积分演习

阎占立　邢鑫
编著

接触多变的题型
总结解题的方法
揭示命题的规律
测试应试的能力
体验做题的乐趣

郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

跟我做微积分演习/阎占立,邢鑫编著. —郑州:郑州大学出版社,2006.11

ISBN 7-81106-332-8

Ⅰ.跟… Ⅱ.①阎…②邢… Ⅲ.微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第128268号

郑州大学出版社出版发行
郑州市大学路40号　　邮政编码:450052
出版人:邓世平　　发行部电话:0371-66966070
全国新华书店经销
郑州文华印务有限公司印制
开本:850 mm×1 168 mm　　1/16
印张:29.5
字数:861千字　　印数:1~3 100
版次:2006年11月第1版　　印次:2006年11月第1次印刷

书号:ISBN 7-81106-332-8/O·35　　定价:35.50元

内容提要

本书是为非数学专业的学生编写的做微积分习题的指导书，书中除选编了微积分的基本习题及其提示或解答外，还有近十年来全国硕士研究生入学考试题一、二、三、四中的微积分试题。除第 0 章看我做题（学习微积分的准备知识）外，其他 16 章中每一节的结构基本上都是按“看我做题⇒根据提示做习题（较难的习题都给出了解答）”或“考研试题⇒分析（提示）或解答”编写的。为了能够尽可能地满足各个专业学生的需要，本书在有关章节中还适当插入了一些补充知识作为补编。读者不看那些补编，也基本上能够完成历年研究生入学考试题。

本书适合正在学习微积分的低年级学生配合所用教科书阅读，也可作为高年级学生准备考研时的复习参考书。

前　言

本书是为非数学专业的大学生编写的做微积分习题的指导书。书中的练习题主要取自下列两本书：

①《微积分》(上、下册，理工科学生用，阎占立编，高等教育出版社)；

②《微积分及其应用》(经济类专业学生用，阎占立、杨振德等编，中国计量出版社)

和近十年(1996－2005)来全国硕士研究生入学考试题一、二(理工类)和考试题三、四(经济类)。读者在学习或做题过程中若有需要解答的问题，可发贴子到一起来学微积分网站：

(网址)　http://www.lxwjf.com 或 http://lxwjf.yeah.net

那里有管理员和版主或其他网友，会为你及时解答问题或同你一起讨论。

目前，国内出版的微积分教科书尽管有很多，但大体上可分为三类：

Ⅰ　理科专业(包括数学专业)用《微积分》或《数学分析》；

Ⅱ　工科专业用《微积分》或《高等数学》(其中包括有微积分)；

Ⅲ　经济类专业用《微积分》或《高等数学》(其中包括有微积分)。

因为要求不同，所以其在内容的取舍和编写的方法上会有很大的差别。

我们编写的这本《跟我做微积分演习》，为了能够尽可能满足各个专业学生的需要，在有关章节中适当插入了一些补充知识作为“补编”(这些内容在数学专业用的教科书中都可以找到)。读者在学习过程中，可先跳过那些补编，等以后有时间或根据自己的能力和需要再去看它们。不看那些补编，读者基本上也能够完成历年研究生入学考试题。

有学生问我：“学习微积分的方法是什么？有像吃快餐那样的方法吗?”我对他说，除了“看书，思考，做题”，我再想不出还有其他“灵丹妙方”。每个人都可以根据自己所学专业的需要，去选择适合他自己的教科书或参考书，认真读一读，做一做书中编选的习题。如果像吃快餐那样去学习一门科学知识，“欲速则不达”，恐怕未必能够真正学会和掌握那门科学知识。

我在网站上还看到有贴子说，“能看懂书，就是不会做习题。”这话虽然不完全对，但也有一定道理。任何一本微积分教科书中都会有例题，你“比着葫芦画个瓢”，总会做几个题吧，譬如求初等函数的微分或导数，以及求那些常用的初等函数的积分等。微积分的习题成千上万，有些较难做的习题，可能当初出自某篇论文或某本书中的定理，所以很少有人敢说，他会马上做出任何一个微积分的习题。假若你实在不会做某一个或某几个习题，不妨先不做它(们)，去做其他的习题，你做题多了，熟能生巧，再回过头去做那些习题时，或许就感到它们很容易。

如果要我再具体说一下学习微积分的方法，那就只有四个字：

“说”，就是学说微积分中主要概念的定义和重要结论；

“记”，就是记住基本概念的定义和重要结论(包括定理)，以及一些主要计算公式；

“练”，就是做够一定数量的练习(尤其是求函数的微分或导数和函数的积分)；

“看”，就是在做到以上要求的基础上，再看一看有一定技巧的习题选解。

我们在做题过程中，都有可能出现错误。这些错误大体上分为两类：一是由于演算上的疏忽造成的“**事实错误**”(演算时细心一点就可以避免它)；二是由于思维或推理不正确(即不合乎逻辑)造成的“**逻辑错误**”(这是因为对微积分有关知识不熟悉造成的)。我们在适当的地方将会指出某些考研试题和解答中的严重逻辑错误。

书中可能有演算上的错误或其他不当之处，恳请读者和专家们指正。编者对此将表示衷心的感谢。

编者

2005/11/9

目　　录

第三篇　多元函数微积分

第 0 章　看我做题(学习微积分的准备知识)

假如你是经过高考进入大学学习的一年级大学生,就应当能够看懂下面这些有关中学数学知识的习题及其解法. 本章的目的:一是想让你自测一下自己掌握中学数学知识的熟练程度(它当然也是你能够学好微积分的基础);二是想告诉你以后做题的正确方法;三是统一有关中学数学中的术语和记号. 你看过后,或许从中多少会学习到一点你还不曾知道的新知识. 其他读者若有看不懂的地方,不妨找本中学数学的参考书,用到时看一看有关知识就行了.

实数的绝对值　实数 x 的绝对值定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

在数轴上,实数 x 的绝对值 $|x|$ 表示点 x 到原点 O 的距离. 记号

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

表示实数 x 的符号[其中 sgn 是 sign(记号,符号)的缩写]. 于是,实数 x 的绝对值为 $|x|=x\cdot\operatorname{sgn} x$.

实数的绝对值有下面的性质:

(ⅰ) $|x|\geqslant 0$;　　(ⅱ) $\pm x\leqslant |x|$ 或 $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$;

(ⅲ) $|-x|=|x|$;　　(ⅳ) $|xy|=|x|\,|y|$;

(ⅴ) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$;　　(ⅵ) $\big||x|-|y|\big|\leqslant |x\pm y|\leqslant |x|+|y|$.

除最后一个性质外,其余性质都是很明显的.

1. 证明绝对值的性质(ⅵ):$\big||x|-|y|\big|\leqslant |x\pm y|\leqslant |x|+|y|$.

证　由 $\pm x\leqslant |x|$, $\pm y\leqslant |y|$ 推出

$$\pm(x+y)\leqslant |x|+|y|$$

即 $|x+y|\leqslant |x|+|y|$,而

$$|x-y|=|x+(-y)|\leqslant |x|+|-y|=|x|+|y|$$

于是就证明了 $|x\pm y|\leqslant |x|+|y|$;

又因为

$$|x|=|(x\pm y)\mp y|\leqslant |x\pm y|+|y|$$

所以

$$|x|-|y|\leqslant |x\pm y|$$

同理

$$|y|-|x|\leqslant |y\pm x|=|x\pm y|$$

因此

$$\pm(|x|-|y|)\leqslant |x\pm y|$$

即又证明了 $\big||x|-|y|\big|\leqslant |x\pm y|$.

算术根　正数 x 的 n 次正方根 p($p>0$ 且 $p^n=x$)称为 x 的 n 次算术根,记成 $\sqrt[n]{x}$(规定 $\sqrt[n]{0}=0$). 特别地,称

$\sqrt{x}(x\geqslant 0)$为x的算术平方根. 因此，$\sqrt{(-5)^2}=5(\neq -5)$. 对于任何实数x，总有$\sqrt{x^2}=|x|$，除已知$x\geqslant 0$外，一般不能写成$\sqrt{x^2}=x$(因为$x<0$时它不成立). 因此，$\sqrt{\sin^2 x}=|\sin x|$，而一般不能写成$\sqrt{\sin^2 x}=\sin x$.

一个正数的偶次方根不是唯一的，而算术根是唯一的. 引入算术根的主要目的是在等式(或不等式)两端取算术根时，等式(或不等式)还能够保持成立.

解不等式　求函数定义域时，有时需要解不等式.

2. 解下面的绝对值不等式(即用不含绝对值的不等式表示出它的解)：

(1) $|x+1|\leqslant 0.01$;　　(2) $|x-2|\geqslant 10$;

(3) $|x|>|x+1|$;　　(4) $|2x-1|<|x-1|$.

解　(1) $|x+1|\leqslant 0.01$ 等价于 $-0.01\leqslant x+1\leqslant 0.01$，即 $-1.01\leqslant x\leqslant -0.99$.

(2) $|x-2|\geqslant 10$，即 $x-2\geqslant 10$ 或 $x-2\leqslant -10$，即解为 $x\geqslant 12$ 或 $x\leqslant -8$.

(3) $|x|>|x+1|$ 与二次不等式 $x^2>x^2+2x+1$ 同解. 而后者可以化简为一次不等式 $2x+1<0$，其解为 $x<-1/2$，所以原不等式的解为 $x<-1/2$，或 $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$.

(4) $|2x-1|<|x-1|$ 与 $(2x-1)^2<(x-1)^2$ 同解，而后者可展开为 $4x^2-4x+1<x^2-2x+1$，即(化简) $3x^2-2x<0$ 或 $x(3x-2)<0$. 因为 $x(3x-2)<0$ 的解是 $0<x<2/3$(大于小根且小于大根)，所以原不等式的解也是 $0<x<2/3$.

3. 解下面的不等式：

(1) $2+x-x^2>0$;　　(2) $3x-x^3\geqslant 0$.

解　(1) $2+x-x^2>0$ 即 $x^2-x-2<0$ 或 $(x+1)(x-2)<0$. 因为左端有实根 $x_1=-1$ 和 $x_2=2$，所以原不等式的解是 $-1<x<2$.

(2) $3x-x^3\geqslant 0$ 即 $x(3-x^2)\geqslant 0$，因此

$$\begin{cases}x\geqslant 0\\ 3-x^2\geqslant 0\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x\leqslant 0\\ 3-x^2\leqslant 0\end{cases}$$

其中，第一个不等式组的解是$[0,\sqrt{3}]$，第二个不等式组的解是$(-\infty,-\sqrt{3}]$，所以原不等式 $3x-x^3\geqslant 0$的解是$[0,\sqrt{3}]$或$(-\infty,-\sqrt{3}]$，即并集$(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[0,\sqrt{3}]$.

【注】　不等式组

$$\begin{cases}f(x)\leqslant 0\quad(\geqslant 0,\ <0,\ >0)\\ g(x)\leqslant 0\quad(\geqslant 0,\ <0,\ >0)\end{cases}$$

的解是其中两个不等式解的交集；而上面那个不等式 $3x-x^3\geqslant 0$ 的解应当是两个不等式组解的并集.

函数及其表示　设有两个变量x和y. 当x变化时，变量y随着x的变化而变化，则称x为自变量，而称y为因变量. 作为暂时的定义，就把因变量称为函数(在19世纪以前，函数概念常常与数学公式联系在一起)，而自变量所允许取值的范围，称为该函数的定义域. 任何函数都必须有它自己的定义域. 作为约定，当没有写出函数定义域时，应根据函数式或上下文来确定它的定义域.

4. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{x}{x}$;　　(2) $y=\sqrt{x^2+x-2}$;

(3) $y=\sqrt{x^2-4}-\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$;　　(4) $y=\sqrt{x^2-3x+2}-\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;

(5) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;　　(6) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{x^2-5x+6}}$;

(7) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$;　　(8) $y=\lg(1-2\cos x)$.

解　(1)因为 0 不能做除数,所以函数定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,或简写成 $x\neq 0$.

(2)因为负数不能开偶次方,所以应当有 $x^2+x-2\geqslant 0$. 解二次不等式 $x^2+x-2\geqslant 0$ 时,将左端因式分解,即 $(x-1)(x+2)\geqslant 0$,可见 $x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 1$(不大于小根或不小于大根).

【注】 把定义域写成 $x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 1$,或者 $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$ 都可以.

(3)解不等式组 $\begin{cases}x^2-4\geqslant 0\\ 16-x^2>0\end{cases}$,即解 $4\leqslant x^2<16$,取算术平方根,得 $2\leqslant |x|<4$,即

$$-4<x\leqslant -2 \quad 或 \quad 2\leqslant x<4.$$

(4)解不等式组

$$\begin{cases}x^2-3x+2\geqslant 0\\ 3+2x-x^2>0\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}(x-1)(x-2)\geqslant 0\\ (x-3)(x+1)<0\end{cases}$$

由二次不等式 $(x-1)(x-2)\geqslant 0$,解得 $x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 2$;由二次不等式 $(x-3)(x+1)<0$,解得 $-1<x<3$. 因此,不等式组的解是 $(-1,1]\cup[2,3)$,即函数定义域是 $(-1,1]\cup[2,3)$.

【注】 不等式组的解是两个不等式解的交集,根据集合的运算规则,有

$$\begin{aligned}[(-\infty,1]\cup[2,+\infty)]\cap(-1,3)&=\{(-\infty,1]\cap(-1,3)\}\cup\{[2,+\infty)\cap(-1,3)\}\\&=(-1,1]\cup[2,3)\end{aligned}$$

(5)解不等式组

$$\begin{cases}1+x\geqslant 0\\ 1-x>0\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}1+x\leqslant 0\\ 1-x<0\end{cases}$$

因为前者的解是 $-1\leqslant x<1$,后者无解,所以函数定义域是 $-1\leqslant x<1$.

(6)解不等式组

$$\begin{cases}1-x\geqslant 0\\ x^2-5x+6>0\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}1-x\leqslant 0\\ x^2-5x+6<0\end{cases}$$

因为第一个不等式组的解是 $x\leqslant 1$,第二个不等式组的解是 $2<x<3$,所以函数定义域是它们的并集,即 $(-\infty,1]\cup(2,3)$.

(7)解不等式 $\left|\dfrac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1$,即 $|2x|\leqslant|1+x|$ $(x\neq -1)$. 后者等价于二次不等式

$$4x^2\leqslant x^2+2x+1 \quad (x\neq -1)$$

即

$$3x^2-2x-1\leqslant 0(x\neq -1) \quad 或 \quad (3x+1)(x-1)\leqslant 0(x\neq -1)$$

其解为 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$,所以函数的定义域是 $\left[-\dfrac{1}{3},1\right]$.

(8)解不等式 $1-2\cos x>0$(因为 0 和负数没有对数),即 $\cos x<\dfrac{1}{2}$,其解为

$$2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2(k+1)\pi-\frac{\pi}{3} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

因此,函数的定义域是

$$2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2(k+1)\pi-\frac{\pi}{3} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

5. 已知函数$f(x)$的定义域是$[0,4]$,求函数$g(x)=f(x+1)+f(x-1)$的定义域.

解 解不等式组$\begin{cases}0\leqslant x+1\leqslant 4\\0\leqslant x-1\leqslant 4\end{cases}$(为什么?),得$1\leqslant x\leqslant 3$,所以函数的定义域是$[1,3]$.

6. 设函数$f(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x$. 求:$f(0)$,$f(1)$,$f(-1)$,$f(2)$,$f(-2)$.

解 $f(0)=0^4-6\cdot 0^3+11\cdot 0^2-6\cdot 0=0$

$f(1)=1^4-6\cdot 1^3+11\cdot 1^2-6\cdot 1=0$

$f(-1)=(-1)^4-6\cdot(-1)^3+11\cdot(-1)^2-6\cdot(-1)=24$

$f(2)=2^4-6\cdot 2^3+11\cdot 2^2-6\cdot 2=0$

$f(-2)=(-2)^4-6\cdot(-2)^3+11\cdot(-2)^2-6\cdot(-2)=120$

7. 设$f(x)=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 0\\2^x, & x>0\end{cases}$(这是分段表示的函数). 求:$f(0)$,$f(-1)$,$f(-2)$,$f(2)$,$f(3)$.

解 $f(0)=1$, $f(-1)=0$, $f(-2)=-1$, $f(2)=4$, $f(3)=8$.

8. 设$f(x)=x^2+1$. 求:$f(x+1)$,$f(x)+1$,$f\left(\frac{1}{x}\right)$,$\frac{1}{f(x)}$,$f[f(x)]$.

解

$$f(x+1)=(x+1)^2+1=x^2+2x+2$$
$$f(x)+1=(x^2+1)+1=x^2+2$$
$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+1=\frac{1}{x^2}+1$$
$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x^2+1}$$
$$f[f(x)]=[f(x)]^2+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$$

【注】 $f[f(x)]$是由函数$y=f(u)$与$u=f(x)$复合成的复合函数.

9. 设$f(x+1)=x^2-3x+2$. 求函数$f(x)$.

解一 因为

$$f(x+1)=x^2-3x+2=(x^2+2x+1)-5(x+1)+6=(x+1)^2-5(x+1)+6$$

所以(用x替换$x+1$)

$$f(x)=x^2-5x+6$$

解二 令$y=x+1$,则$x=y-1$,于是

$$f(y)=(y-1)^2-3(y-1)+2=(y^2-2y+1)-3y+3+2=y^2-5y+6$$

因此,$f(x)=x^2-5x+6$(函数与表示自变量的字母无关).

10. 若$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{x^2+1}\ (x>0)$,求$f(x)$.

解一 因为

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^2}}+1}$$

所以(用x替换$\frac{1}{x}$)

$$f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$$

解二 令$y=\frac{1}{x}$,则$x=\frac{1}{y}$,于是

$$f(y)=\frac{1}{y}+\sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)^2+1}=\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}$$

即
$$f(x)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$$

11. 已知 $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x}$,求 $f(x)$.

解　把 $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x}$ 中的 x 换成 $\frac{1}{x}$,则得

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=2f(x)+2x$$

把它代入前式,则得

$$f(x)-2[2f(x)+2x]=\frac{2}{x},\quad 即\ f(x)-4f(x)-4x=\frac{2}{x}$$

由此得

$$f(x)=-\frac{4}{3}x-\frac{2}{3x}$$

12. 设函数 $f(x)=ax^2+bx+c$. 验证:

$$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv 0$$

证
$$f(x+3)=a(x+3)^2+b(x+3)+c=a(x^2+6x+9)+bx+3b+c$$
$$f(x+2)=a(x+2)^2+b(x+2)+c=a(x^2+4x+4)+bx+2b+c$$
$$f(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c=a(x^2+2x+1)+bx+b+c$$

因此

$$\begin{aligned}&f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\\=&a(x^2+6x+9)+bx+3b+c-3[a(x^2+4x+4)+bx+2b+c]\pm\\&3[a(x^2+2x+1)+bx+b+c]-[ax^2+bx+c]\equiv 0\end{aligned}$$

13. 设 $f(x)=\log_a x$. 证明:当 $|h|$ 足够小时,有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

证　根据对数的性质,有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

14. 设自西向东的铁路经过甲城,而甲城西南方有乙城,且乙城距铁路的最短距离为 a km,距甲城的距离为 b km(见图 0-1). 为了把货物从乙城运到甲城使运费最经济,欲从乙城修筑一条公路直到铁路边. 若公路的运费为 x 元/km,铁路的运费为 y 元/km,公路与铁路的倾斜角为 θ,试把总运费 φ 表示成倾斜角 θ 的函数.

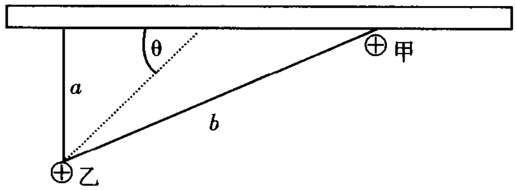

图 0-1

解 总运费 φ 是公路运费 φ_1 与铁路运费 φ_2 之和，其中

$$\varphi_1=\sqrt{a^2+(a\cot\theta)^2}\,x,\quad \varphi_2=(\sqrt{b^2-a^2}-a\cot\theta)y$$

因此，总运费为

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2=\sqrt{a^2+(a\cot\theta)^2}\,x+(\sqrt{b^2-a^2}-a\cot\theta)y\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

15. 设狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$，则：$D[D(x)]=$ __1__.

[注意，其中 $D[D(x)]$ 是复合函数，而 $D(x)$ 的值是有理数]

【注】 早期（19 世纪以前）的函数概念常与所谓“数学公式”联系在一起. 19 世纪时，由于数学研究范围的扩大，有必要把函数概念进一步抽象化. 狄利克雷（Dirichlet）用上面那个极简单的例子来阐明函数概念的实质（内涵）：让有理数对应 1，让无理数对应 0. 他做出的函数虽然不是用“数学公式”给出的函数，可是比用数学公式给出的任何一个函数都简单. 他是要把函数看成一种“对应（规则）”.

函数是这样一个确定的对应（记成 f），对于自变量 x 的每一个数值，按照这个对应能够唯一确定出实数 y 与 x 的值相对应，记成 $y=f(x)$. 并把自变量 x 所允许取值的范围称为该函数 f 的定义域.

因此，狄利克雷是近代函数概念的创始人之一. 在函数的这个定义中，显然，多值函数被排除在外（因为微积分研究的是单值函数）. 若用 D 表示函数 f 的定义域，则所有函数值组成的集合

$$f(D)=\{f(x)\mid x\in D\}$$

称为函数 f 的值域.（请注意，$f(D)$ 是集合，要同函数值 $f(x)$ 区别开来）

16. 如图 0-2 所示，在等腰梯形 $ABCD$ 中，下底 $AB=a$，上底 $DC=b\,(b<a)$，高为 h. 今用垂直于底边 AB 的线段 $\overline{EF}$ 自点 A 向右平行移动至点 B. 若用 $S(x)$ 表示 $\overline{EF}$ 扫过的（变动）面积，求函数 $S(x)$ 的表示式.

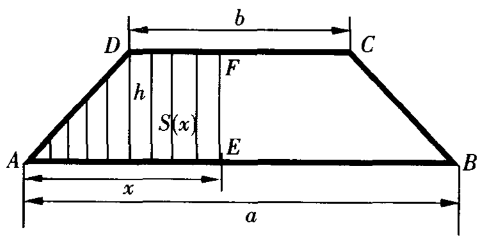

图 0-2

解 当 $0\leqslant x\leqslant(a-b)/2$ 时，$S(x)=\dfrac{1}{2}x\cdot\dfrac{2hx}{a-b}=\dfrac{hx^2}{a-b}$；

当 $(a-b)/2\leqslant x\leqslant(a+b)/2$ 时，$S(x)=\dfrac{(a-b)h}{4}+\left(x-\dfrac{a-b}{2}\right)h$；

当 $(a+b)/2\leqslant x\leqslant a$ 时，$S(x)=\dfrac{(a+b)h}{2}-\dfrac{(a-x)^2h}{a-b}$.

【注】 像题 7 中的函数和上面的函数 $S(x)$ 都称为分段表示的函数. 分段表示的函数在技术科学或应用科学中被广泛地应用. 例如：

（1）在电子（脉冲）技术中会用到的单位阶跃函数为

$$u(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}\quad(\text{见图 } 0-3)$$

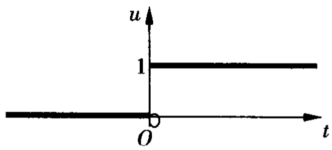

图 0-3

(2)设正弦交流电的电流强度为

$$i(t)=I_m\sin\omega t\quad(I_m\text{ 为最大电流强度})$$

经过半波整流后,在一个周期$\left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{2\pi}{\omega}\right)$内,电流强度(见图 0-4)为

$$i_+(t)=\begin{cases}I_m\sin\omega t, & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{\omega}\\[2mm] 0, & \dfrac{\pi}{\omega}<t\leqslant\dfrac{2\pi}{\omega}\end{cases}$$

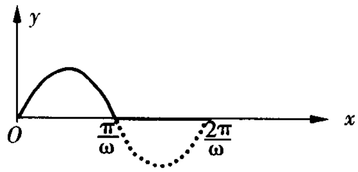

图 0-4

(3)设$[x]$表示不超过实数 x 的最大整数,例如$[0.99]=0$,$[\pi=3]$,$[-\pi]=-4$,则称$y=[x]$为取整函数(见图 0-5). 这里的"[　]"是一个专用的函数记号,就像中学数学中用到的函数记号 log,sin 一样. 它在数论中是有用的,而在微积分中偶尔会用到它.

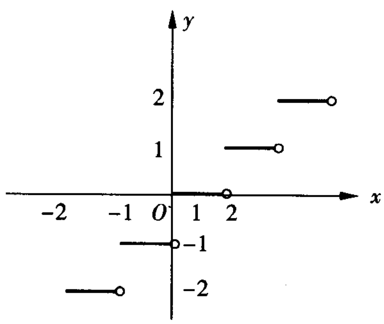

图 0-5

(4)设$\{x\}=x-[x]$. 其中的"{　}"也是一个专用的函数记号,而$\{x\}$表示 x 的小数部分(见图 0-6),例如$\{1.7\}=0.7$. 但是,$\{-1.7\}=0.3$,因为根据定义,$\{-1.7\}=-1.7-[-1.7]=-1.7-(-2)=0.3$.

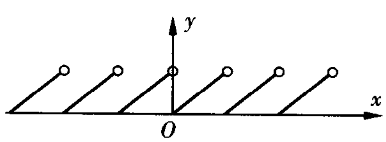

图 0-6

(5)函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数(见图0-7),其中 sgn 是 sign(符号,记号)的缩写.

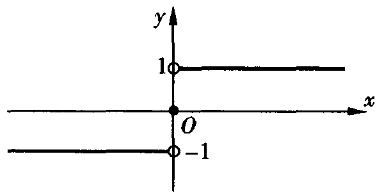

图0-7

某些函数的特性 由于函数的多样性,不同的函数会呈现出不同的变化状态. 若函数 $f(x)$ 的值域 $f(D)$ 包含在某个有限区间内,即

$$A\leqslant f(x)\leqslant B\quad (x\in D)$$

则称它为有界函数,并称 A 为它的下界,B 为它的上界. 一个函数可能只有下界,即 $A\leqslant f(x)$,也可能只有上界,即 $f(x)\leqslant B$. 不是有界函数的函数称为无界函数. 无界函数可能是无下界,或无上界,或既无下界又无上界.

17. 证明:$f(x)$ 是有界函数($A\leqslant f(x)\leqslant B$),当且仅当有正常数 M 使 $|f(x)|\leqslant M$.

证 充分性:取 $\max\{|A|,|B|\}$,则

$$f(x)\leqslant B\leqslant |B|\leqslant M\quad 且\quad f(x)\geqslant A\geqslant -|A|\geqslant -M$$

即

$$-M\leqslant f(x)\leqslant M\quad 或\quad |f(x)|\leqslant M.$$

必要性:

$$A=-M\leqslant f(x)\leqslant M=B$$

奇偶函数 设函数 $f(x)$ 定义在对称区间 $(-a,a)$ 或 $[-a,b]$ 上. 若满足 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数. 例如函数 $x,x^3,\sin x,\tan x$ 等. 奇函数的图形关于原点对称(中心对称). 若满足 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数. 例如 $x^2,x^4,\cos x$ 等. 偶函数的图形关于 y 轴对称.

18. 若 $f(x)$ 是奇函数,证明 $f(0)=0$.

证 $f(0)=f(-0)=-f(0)$,所以 $2f(0)=0$,即 $f(0)=0$.

19. 证明:两个偶函数或两个奇函数的乘积都是偶函数;而一个偶函数与一个奇函数的乘积是奇函数.

证 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是偶函数或都是奇函数,则

$$f(-x)g(-x)=f(x)g(x)$$

或

$$f(-x)g(-x)=[-f(x)][-g(x)]=f(x)g(x)$$

即乘积 $f(x)g(x)$ 是偶函数;

对于一个偶函数与一个奇函数的乘积的情形,不妨设 $f(x)$ 是偶函数,$g(x)$ 是奇函数,则

$$f(-x)g(-x)=f(x)[-g(x)]=-f(x)g(x)$$

即乘积 $f(x)g(x)$ 是奇函数.

20. 验证:$f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 和 $g(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$ 都是奇函数.