

◎ 正确思维和逻辑错误 解题方法分析和点评

跟我做

微积分演习

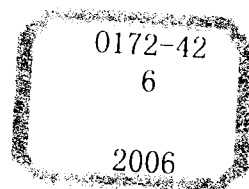
阎占立 邢鑫
编著

接触多变的题型
总结解题的方法
揭示命题的规律
测试应试的能力
体验做题的乐趣



郑州大学出版社

◎ 正确思维和逻辑错误 解题方法分析和点评



跟我做 微积分演习

阎占立 邢鑫
编著

接触多变的题型
总结解题的方法
揭示命题的规律
测试应试的能力
体验做题的乐趣



郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

跟我做微积分演习/阎占立,邢鑫编著. —郑州:郑州大学出版社,
2006. 11
ISBN 7 - 81106 - 332 - 8

I. 跟… II. ①阎…②邢… III. 微积分 - 高等学
校 - 教学参考资料 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 128268 号

郑州大学出版社出版发行

郑州市大学路 40 号

出版人:邓世平

全国新华书店经销

郑州文华印务有限公司印制

开本:850 mm × 1 168 mm

印张:29.5

字数:861 千字

版次:2006 年 11 月第 1 版

邮政编码:450052

发行部电话:0371 - 66966070

1/16

印数:1 ~ 3 100

印次:2006 年 11 月第 1 次印刷

书号:ISBN 7 - 81106 - 332 - 8/O · 35

定价:35.50 元

本书如有印装质量问题,请向本社调换

内容提要

本书是为非数学专业的学生编写的做微积分习题的指导书,书中除选编了微积分的基本习题及其提示或解答外,还有近十年来全国硕士研究生入学考试题一、二、三、四中的微积分试题。除第0章看我做题(学习微积分的准备知识)外,其他16章中每一节的结构基本上都是按“看我做题 $\Rightarrow$ 根据提示做习题(较难的习题都给了解答)”或“考研试题 $\Rightarrow$ 分析(提示)或解答”编写的。为了能够尽可能地满足各个专业学生的需要,本书在有关章节中还适当插入了一些补充知识作为补编。读者不看那些补编,也基本上能够完成历年研究生入学考试题。

本书适合正在学习微积分的低年级学生配合所用教科书阅读,也可作为高年级学生准备考研时的复习参考书。

前言

本书是为非数学专业的大学生编写的做微积分习题的指导书。书中的练习题主要取自下列两本书:

①《微积分》(上、下册,理工科学生用,阎占立编,高等教育出版社);

②《微积分及其应用》(经济类专业学生用,阎占立、杨振德等编,中国计量出版社)

和近十年(1996-2005)来全国硕士研究生入学考试题一、二(理工类)和考试题三、四(经济类)。读者在学习或做题过程中若有需要解答的问题,可发帖到一起来学微积分网站:

(网址) <http://www.lxwjf.com> 或 <http://lxwjf.yeah.net>

那里有管理员和版主或其他网友,会为你及时解答问题或同你一起讨论。

目前,国内出版的微积分教科书尽管有很多,但大体上可分为三类:

I 理科专业(包括数学专业)用《微积分》或《数学分析》;

II 工科专业用《微积分》或《高等数学》(其中包括有微积分);

III 经济类专业用《微积分》或《高等数学》(其中包括有微积分)。

因为要求不同,所以其在内容的取舍和编写的方法上会有很大的差别。

我们编写的这本《跟我做微积分演习》,为了能够尽可能满足各个专业学生的需要,在有关章节中适当插入了一些补充知识作为“补编”(这些内容在数学专业用的教科书中都可以找到)。读者在学习过程中,可先跳过那些补编,等以后有时间或根据自己的能力和需要再去看它们。不看那些补编,读者基本上也能够完成历年研究生入学考试题。

有学生问我:“学习微积分的方法是什么?有像吃快餐那样的方法吗?”我对他说,除了“看书,思考,做题”,我再想不出还有其他“灵丹妙方”。每个人都可以根据自己所学专业的需要,去选择适合他自己的教科书或参考书,认真读一读,做一做书中编选的习题。如果像吃快餐那样去学习一门科学知识,“欲速则不达”,恐怕未必能够真正学会和掌握那门科学知识。

我在网站上还看到有帖子说,“能看懂书,就是不会做习题。”这话虽然不完全对,但也有一定道理。任何一本微积分教科书中都会有例题,你“比着葫芦画个瓢”,总会做几个题吧,譬如求初等函数的微分或导数,以及求那些常用的初等函数的积分等。微积分的习题成千上万,有些较难做的习题,可能当初出自某篇论文或某本书中的定理,所以很少有人敢说,他会马上做出任何一个微积分的习题。假若你实在不会做某一个或某几个习题,不妨先不做它(们),去做其他的习题,你做题多了,熟能生巧,再回过头去做那些习题时,或许就感到它们很容易。

如果要我再具体说一下学习微积分的方法,那就只有四个字:

“说”,就是学说微积分中主要概念的定义和重要结论;

“记”,就是记住基本概念的定义和重要结论(包括定理),以及一些主要计算公式;

“练”,就是做够一定数量的练习(尤其是求函数的微分或导数和函数的积分);

“看”,就是在做到以上要求的基础上,再看一看有一定技巧的习题选解。

我们在做题过程中,都有可能出现错误。这些错误大体上分为两类:一是由于演算上的疏忽造成的“事实错误”(演算时细心一点就可以避免它);二是由于思维或推理不正确(即不合乎逻辑)造成的“逻辑错误”(这是因为对微积分有关知识不熟悉造成的)。我们在适当的地方将会指出某些考研试题和解答中的严重逻辑错误。

书中可能有演算上的错误或其他不当之处,恳请读者和专家们指正。编者对此将表示衷心的感谢。

编者
2005/11/9

目 录

前言	1
第0章 看我做题(学习微积分的准备知识)	1

第一篇 一元函数微积分

第1章 函数的极限和连续函数	22
第1-1节 函数的极限	22
第1-2节 连续函数的主要性质	32
第1-3节 试做研究生入学考试题(三)、(四)	34
第1-4节 试做研究生入学考试题(一)、(二)	36
第1-5节 极限的基本性质	42
第1-6节 数 e	45
第1-7节 数列极限的例题和习题	48
第2章 微分和微分法	58
第2-1节 微分和导数	58
第2-2节 高阶导数和高阶微分	66
第2-3节 试做研究生入学考试题(三)、(四)	69
第2-4节 试做研究生入学考试题(一)、(二)	73
第3章 微分中值定理和导数的简单应用	80
第3-1节 微分中值定理	80
第3-2节 判别函数增或减的方法·证不等式的方法	84
第3-3节 洛必达法则	87
第3-4节 泰勒公式	91
第3-5节 函数的极值和最大(小)值	95
第3-6节 函数的凸性·勾画函数图形的方法	100
第3-7节 曲线的曲率·曲率半径和曲率中心	104
第3-8节 试做研究生入学考试题(三)、(四)	106
第3-9节 试做研究生入学考试题(一)、(二)	115
第4章 牛顿-莱布尼茨积分和积分法	130
第4-1节 牛顿-莱布尼茨积分	130
第4-2节 积分法	133
第4-3节 常用积分公式表及其使用方法·点评	154
第4-4节 试做研究生入学考试题(三)、(四)	158
第4-5节 试做研究生入学考试题(一)、(二)	160

第5章 柯西-黎曼积分	164
第5-1节 柯西-黎曼积分的定义及其性质	164
第5-2节 关于连续函数积分的结论	170
第5-3节 定积分中的换元积分法	175
第5-4节 定积分中的分部积分法	181
第5-5节 反常积分·噶玛函数和贝塔函数	185
第5-6节 试做研究生入学考试题(三)、(四)	195
第5-7节 试做研究生入学考试题(一)、(二)	203
第5-8节 补编(可积准则和某些结论的补证)	217
第6章 积分在几何和物理上的应用	223
第6-1节 积分在几何上的应用	223
第6-2节 积分在物理上的应用	230
第6-3节 试做研究生入学考试题(三)、(四)	235
第6-4节 试做研究生入学考试题(一)、(二)	238

第二篇 一元函数微积分的进一步应用

第7章 微分方程(组)及其解法	245
第7-1节 一阶微分方程的解法	245
第7-2节 可降为一阶的二阶微分方程的解法	250
第7-3节 二阶线性齐次微分方程的基本解组	253
第7-4节 二阶线性常系数微分方程的解法	253
第7-5节 试做研究生入学考试题(三)、(四)	260
第7-6节 试做研究生入学考试题(一)、(二)	263
第7-7节 补编(简单一阶微分方程组的解法)	267
第8章 无穷级数	270
第8-1节 收敛级数的性质·条件收敛和绝对收敛	270
第8-2节 级数敛散性的判别法	271
第8-3节 幂级数	277
第8-4节 泰勒级数	284
第8-5节 傅里叶级数(理工科学生做)	288
第8-6节 试做研究生入学考试题(三)、(四)	297
第8-7节 试做研究生入学考试题(一)	302
第9章 微积分在经济科学中的应用	309
第9-1节 边际概念(导数的经济解释)	309
第9-2节 函数的弹性(函数的相对变化率)	312
第9-3节 试做研究生入学考试题(三)、(四)	314
第10章 向量的运算及其应用	317
第10-1节 向量及其运算	317
第10-2节 向量的数量积和向量积	319
第10-3节 空间中的平面方程和直线方程	321
第10-4节 向量函数的微积分	325

第 10-5 节 试做研究生入学考试题(一)	327
------------------------	-----

第三篇 多元函数微积分

第 11 章 多元函数的微分和微分法	329
第 11-1 节 多元函数和它的偏导数	329
第 11-2 节 函数的极限和连续函数	334
第 11-3 节 微分和导数	338
第 11-4 节 方向导数和梯度(理工科学生做)	349
第 11-5 节 高阶偏导数	352
第 11-6 节 试做研究生入学考试题(三)、(四)	359
第 11-7 节 试做研究生入学考试题(一)、(二)	364
第 11-8 节 补编(隐函数存在性和可微性定理)	370
第 12 章 多元函数的极值	374
第 12-1 节 无条件极值	374
第 12-2 节 条件极值·拉格朗日乘数法	376
第 12-3 节 试做研究生入学考试题(三)、(四)	380
第 12-4 节 试做研究生入学考试题(一)	382
第 13 章 重积分	384
第 13-1 节 二重积分的基本计算方法	384
第 13-2 节 二重积分的变量替换	389
第 13-3 节 三重积分的计算方法·矩和质心(理工科学生做)	394
第 13-4 节 试做研究生入学考试题(三)、(四)	401
第 13-5 节 试做研究生入学考试题(一)、(二)	407
第 14 章 曲线积分(理工科学生做)	412
第 14-1 节 曲线积分的定义和计算方法	412
第 14-2 节 试做研究生入学考试题(一)	423
第 15 章 曲面积分(理工科学生做)	426
第 15-1 节 标量函数的曲面积分(第一型曲面积分)	426
第 15-2 节 向量函数的曲面积分(第二型曲面积分)	430
第 15-3 节 试做研究生入学考试题(一)	440
第 16 章 场论初步(理工科学生做)	447
第 16-1 节 通量和散度	447
第 16-2 节 曲线积分与路径无关的条件	449
第 16-3 节 循环量和旋度	454
第 16-4 节 试做研究生入学考试题(一)	456

第0章 看我做题(学习微积分的准备知识)

假如你是经过高考进入大学学习的一年级大学生,就应当能够看懂下面这些有关中学数学知识的习题及其解法.本章的目的:一是想让你自测一下自己掌握中学数学知识的熟练程度(它当然也是你能够学好微积分的基础);二是想告诉你以后做题的正确方法;三是统一有关中学数学中的术语和记号.你看过后,或许从中多少会学习到一点你还不曾知道的新知识.其他读者若有看不懂的地方,不妨找本中学数学的参考书,用到时看一看有关知识就行了.

实数的绝对值 实数 x 的绝对值定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

在数轴上,实数 x 的绝对值 $|x|$ 表示点 x 到原点 O 的距离.记号

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

表示实数 x 的符号[其中 sgn 是 sign (记号,符号)的缩写].于是,实数 x 的绝对值为 $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$.

实数的绝对值有下面的性质:

- (i) $|x| \geq 0$;
- (ii) $\pm x \leq |x|$ 或 $-|x| \leq x \leq |x|$;
- (iii) $|-x| = |x|$;
- (iv) $|xy| = |x| |y|$;
- (v) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$;
- (vi) $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$.

除最后一个性质外,其余性质都是很明显的.

1. 证明绝对值的性质(vi): $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$.

证 由 $\pm x \leq |x|$, $\pm y \leq |y|$ 推出

$$\pm(x+y) \leq |x| + |y|$$

即 $|x+y| \leq |x| + |y|$, 而

$$|x-y| = |x+(-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$$

于是就证明了 $|x \pm y| \leq |x| + |y|$;

又因为

$$|x| = |(x \pm y) \mp y| \leq |x \pm y| + |y|$$

所以

$$|x| - |y| \leq |x \pm y|$$

同理

$$|y| - |x| \leq |y \pm x| = |x \pm y|$$

因此

$$\pm(|x| - |y|) \leq |x \pm y|$$

即又证明了 $||x| - |y|| \leq |x \pm y|$.

算术根 正数 x 的 n 次正方根 $p(p > 0$ 且 $p^n = x$) 称为 x 的 n 次算术根, 记成 $\sqrt[n]{x}$ (规定 $\sqrt[0]{0} = 0$). 特别地, 称

$\sqrt{x} (x \geq 0)$ 为 x 的算术平方根. 因此, $\sqrt{(-5)^2} = 5 (\neq -5)$. 对于任何实数 x , 总有 $\sqrt{x^2} = |x|$, 除已知 $x \geq 0$ 外, 一般不能写成 $\sqrt{x^2} = x$ (因为 $x < 0$ 时它不成立). 因此, $\sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$, 而一般不能写成 $\sqrt{\sin^2 x} = \sin x$.

一个正数的偶次方根不是唯一的, 而算术根是唯一的. 引入算术根的主要目的是在等式 (或不等式) 两端取算术根时, 等式 (或不等式) 还能够保持成立.

解不等式 求函数定义域时, 有时需要解不等式.

2. 解下面的绝对值不等式 (即用不含绝对值的不等式表示出它的解):

- (1) $|x+1| \leq 0.01$; (2) $|x-2| \geq 10$;
(3) $|x| > |x+1|$; (4) $|2x-1| < |x-1|$.

解 (1) $|x+1| \leq 0.01$ 等价于 $-0.01 \leq x+1 \leq 0.01$, 即 $-1.01 \leq x \leq -0.99$.

(2) $|x-2| \geq 10$, 即 $x-2 \geq 10$ 或 $x-2 \leq -10$, 即解为 $x \geq 12$ 或 $x \leq -8$.

(3) $|x| > |x+1|$ 与二次不等式 $x^2 > x^2 + 2x + 1$ 同解. 而后者可以化简为一次不等式 $2x + 1 < 0$, 其解为 $x < -1/2$, 所以原不等式的解为 $x < -1/2$, 或 $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

(4) $|2x-1| < |x-1|$ 与 $(2x-1)^2 < (x-1)^2$ 同解, 而后者可展开为 $4x^2 - 4x + 1 < x^2 - 2x + 1$, 即 (化简) $3x^2 - 2x < 0$ 或 $x(3x-2) < 0$. 因为 $x(3x-2) < 0$ 的解是 $0 < x < 2/3$ (大于小根且小于大根), 所以原不等式的解也是 $0 < x < 2/3$.

3. 解下面的不等式:

- (1) $2 + x - x^2 > 0$; (2) $3x - x^3 \geq 0$.

解 (1) $2 + x - x^2 > 0$ 即 $x^2 - x - 2 < 0$ 或 $(x+1)(x-2) < 0$. 因为左端有实根 $x_1 = -1$ 和 $x_2 = 2$, 所以原不等式的解是 $-1 < x < 2$.

(2) $3x - x^3 \geq 0$ 即 $x(3 - x^2) \geq 0$, 因此

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 3 - x^2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ 3 - x^2 \leq 0 \end{cases}$$

其中, 第一个不等式组的解是 $[0, \sqrt{3}]$, 第二个不等式组的解是 $(-\infty, -\sqrt{3}]$, 所以原不等式 $3x - x^3 \geq 0$ 的解是 $[0, \sqrt{3}]$ 或 $(-\infty, -\sqrt{3}]$, 即并集 $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [0, \sqrt{3}]$.

【注】 不等式组

$$\begin{cases} f(x) \leq 0 & (\geq 0, < 0, > 0) \\ g(x) \leq 0 & (\geq 0, < 0, > 0) \end{cases}$$

的解是其中两个不等式解的交集; 而上面那个不等式 $3x - x^3 \geq 0$ 的解应当是两个不等式组解的并集.

函数及其表示 设有两个变量 x 和 y . 当 x 变化时, 变量 y 随着 x 的变化而变化, 则称 x 为自变量, 而称 y 为因变量. 作为暂时的定义, 就把因变量称为函数 (在 19 世纪以前, 函数概念常常与数学公式联系在一起), 而自变量所允许取值的范围, 称为该函数的定义域. 任何函数都必须有它自己的定义域. 作为约定, 当没有写出函数定义域时, 应根据函数式或上下文来确定它的定义域.

4. 求下列函数的定义域:

- (1) $y = \frac{x}{x}$; (2) $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$;
(3) $y = \sqrt{x^2 - 4} - \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}$; (4) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$;

$$(5) y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

$$(6) y = \sqrt{\frac{1-x}{x^2-5x+6}};$$

$$(7) y = \arcsin \frac{2x}{1+x};$$

$$(8) y = \lg(1-2\cos x).$$

解 (1) 因为 0 不能做除数, 所以函数定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 或简写成 $x \neq 0$.

(2) 因为负数不能开偶次方, 所以应当有 $x^2 + x - 2 \geq 0$. 解二次不等式 $x^2 + x - 2 \geq 0$ 时, 将左端因式分解, 即 $(x-1)(x+2) \geq 0$, 可见 $x \leq -2$ 或 $x \geq 1$ (不大于小根或不小于大根).

【注】 把定义域写成 $x \leq -2$ 或 $x \geq 1$, 或者 $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$ 都可以.

$$(3) \text{解不等式组 } \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ 16 - x^2 > 0 \end{cases}, \text{即解 } 4 \leq x^2 < 16, \text{取算术平方根, 得 } 2 \leq |x| < 4, \text{即}$$

$$-4 < x \leq -2 \quad \text{或} \quad 2 \leq x < 4.$$

(4) 解不等式组

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ 3 + 2x - x^2 > 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} (x-1)(x-2) \geq 0 \\ (x-3)(x+1) < 0 \end{cases}$$

由二次不等式 $(x-1)(x-2) \geq 0$, 解得 $x \leq 1$ 或 $x \geq 2$; 由二次不等式 $(x-3)(x+1) < 0$, 解得 $-1 < x < 3$. 因此, 不等式组的解是 $(-1, 1] \cup [2, 3)$, 即函数定义域是 $(-1, 1] \cup [2, 3)$.

【注】 不等式组的解是两个不等式解的交集, 根据集合的运算规则, 有

$$\begin{aligned} [(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)] \cap (-1, 3) &= \{(-\infty, 1] \cap (-1, 3)\} \cup \{[2, +\infty) \cap (-1, 3)\} \\ &= (-1, 1] \cup [2, 3) \end{aligned}$$

(5) 解不等式组

$$\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} 1+x \leq 0 \\ 1-x < 0 \end{cases}$$

因为前者的解是 $-1 \leq x < 1$, 后者无解, 所以函数定义域是 $-1 \leq x < 1$.

(6) 解不等式组

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} 1-x \leq 0 \\ x^2 - 5x + 6 < 0 \end{cases}$$

因为第一个不等式组的解是 $x \leq 1$, 第二个不等式组的解是 $2 < x < 3$, 所以函数定义域是它们的并集, 即 $(-\infty, 1] \cup (2, 3)$.

$$(7) \text{解不等式 } \left| \frac{2x}{1+x} \right| \leq 1, \text{即 } |2x| \leq |1+x| \quad (x \neq -1). \text{后者等价于二次不等式}$$

$$4x^2 \leq x^2 + 2x + 1 \quad (x \neq -1)$$

即

$$3x^2 - 2x - 1 \leq 0 \quad (x \neq -1) \quad \text{或} \quad (3x+1)(x-1) \leq 0 \quad (x \neq -1)$$

其解为 $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$, 所以函数的定义域是 $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$.

(8) 解不等式 $1 - 2\cos x > 0$ (因为 0 和负数没有对数), 即 $\cos x < \frac{1}{2}$, 其解为

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} < x < 2(k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

因此, 函数的定义域是

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} < x < 2(k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

5. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 4]$, 求函数 $g(x) = f(x+1) + f(x-1)$ 的定义域.

解 解不等式组 $\begin{cases} 0 \leq x+1 \leq 4 \\ 0 \leq x-1 \leq 4 \end{cases}$ (为什么?), 得 $1 \leq x \leq 3$, 所以函数的定义域是 $[1, 3]$.

6. 设函数 $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$. 求: $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(-2)$.

解 $f(0) = 0^4 - 6 \cdot 0^3 + 11 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 = 0$

$$f(1) = 1^4 - 6 \cdot 1^3 + 11 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = 0$$

$$f(-1) = (-1)^4 - 6 \cdot (-1)^3 + 11 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 24$$

$$f(2) = 2^4 - 6 \cdot 2^3 + 11 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 = 0$$

$$f(-2) = (-2)^4 - 6 \cdot (-2)^3 + 11 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) = 120$$

7. 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq 0 \\ 2^x, & x > 0 \end{cases}$ (这是分段表示的函数). 求: $f(0)$, $f(-1)$, $f(-2)$,

$f(2)$, $f(3)$.

解 $f(0) = 1$, $f(-1) = 0$, $f(-2) = -1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 8$.

8. 设 $f(x) = x^2 + 1$. 求: $f(x+1)$, $f(x) + 1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, $f[f(x)]$.

解

$$f(x+1) = (x+1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2$$

$$f(x) + 1 = (x^2 + 1) + 1 = x^2 + 2$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$f[f(x)] = [f(x)]^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$$

【注】 $f[f(x)]$ 是由函数 $y = f(u)$ 与 $u = f(x)$ 复合成的复合函数.

9. 设 $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$. 求函数 $f(x)$.

解一 因为

$$f(x+1) = x^2 - 3x + 2 = (x^2 + 2x + 1) - 5(x+1) + 6 = (x+1)^2 - 5(x+1) + 6$$

所以(用 x 替换 $x+1$)

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

解二 令 $y = x+1$, 则 $x = y-1$, 于是

$$f(y) = (y-1)^2 - 3(y-1) + 2 = (y^2 - 2y + 1) - 3y + 3 + 2 = y^2 - 5y + 6$$

因此, $f(x) = x^2 - 5x + 6$ (函数与表示自变量的字母无关).

10. 若 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ($x > 0$), 求 $f(x)$.

解一 因为

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^2}} + 1}$$

所以(用 x 替换 $\frac{1}{x}$)

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$$

解二 令 $y = \frac{1}{x}$, 则 $x = \frac{1}{y}$, 于是

$$f(y) = \frac{1}{y} + \sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)^2 + 1} = \frac{1 + \sqrt{1 + y^2}}{y}$$

即

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$$

11. 已知 $f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}$, 求 $f(x)$.

解 把 $f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}$ 中的 x 换成 $\frac{1}{x}$, 则得

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 2f(x) + 2x$$

把它代入前式, 则得

$$f(x) - 2[2f(x) + 2x] = \frac{2}{x}, \quad \text{即 } f(x) - 4f(x) - 4x = \frac{2}{x}$$

由此得

$$f(x) = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3x}$$

12. 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$. 验证:

$$f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \equiv 0$$

$$\text{证 } f(x+3) = a(x+3)^2 + b(x+3) + c = a(x^2 + 6x + 9) + bx + 3b + c$$

$$f(x+2) = a(x+2)^2 + b(x+2) + c = a(x^2 + 4x + 4) + bx + 2b + c$$

$$f(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c = a(x^2 + 2x + 1) + bx + b + c$$

因此

$$\begin{aligned} & f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \\ &= a(x^2 + 6x + 9) + bx + 3b + c - 3[a(x^2 + 4x + 4) + bx + 2b + c] \\ & \quad + 3[a(x^2 + 2x + 1) + bx + b + c] - [ax^2 + bx + c] \equiv 0 \end{aligned}$$

13. 设 $f(x) = \log_a x$. 证明: 当 $|h|$ 足够小时, 有

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

证 根据对数的性质, 有

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \end{aligned}$$

14. 设自西向东的铁路经过甲城, 而甲城西南方有乙城, 且乙城距铁路的最短距离为 a km, 距甲城的距离为 b km (见图 0-1). 为了把货物从乙城运到甲城使运费最经济, 欲从乙城修筑一条公路直到铁路边. 若公路的运费为 x 元/km, 铁路的运费为 y 元/km, 公路与铁路的倾斜角为 θ , 试把总运费 φ 表示成倾斜角 θ 的函数.

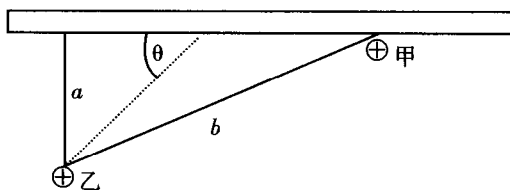


图 0-1

解 总运费 φ 是公路运费 φ_1 与铁路运费 φ_2 之和, 其中

$$\varphi_1 = \sqrt{a^2 + (a \cot \theta)^2} x, \quad \varphi_2 = (\sqrt{b^2 - a^2} - a \cot \theta) y$$

因此, 总运费为

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \sqrt{a^2 + (a \cot \theta)^2} x + (\sqrt{b^2 - a^2} - a \cot \theta) y \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

15. 设狄利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$, 则: $D[D(x)] = \underline{\quad 1 \quad}$.

[注意, 其中 $D[D(x)]$ 是复合函数, 而 $D(x)$ 的值是有理数]

【注】早期(19世纪以前)的函数概念常与所谓“数学公式”联系在一起. 19世纪时, 由于数学研究范围的扩大, 有必要把函数概念进一步抽象化. 狄利克雷(Dirichlet)用上面那个极简单的例子来阐明函数概念的实质(内涵): 让有理数对应1, 让无理数对应0. 他做出的函数虽然不是用“数学公式”给出的函数, 可是比用数学公式给出的任何一个函数都简单. 他是要把函数看成一种“对应(规则)”.

函数是这样一个确定的对应(记成 f), 对于自变量 x 的每一个数值, 按照这个对应能够唯一确定出实数 y 与 x 的值相对应, 记成 $y = f(x)$. 并把自变量 x 所允许取值的范围称为该函数 f 的定义域.

因此, 狄利克雷是近代函数概念的创始人之一. 在函数的这个定义中, 显然, 多值函数被排除在外(因为微积分研究的是单值函数). 若用 D 表示函数 f 的定义域, 则所有函数值组成的集合

$$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$$

称为函数 f 的值域.(请注意, $f(D)$ 是集合, 要同函数值 $f(x)$ 区别开来)

16. 如图0-2所示, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, 下底 $AB = a$, 上底 $DC = b$ ($b < a$), 高为 h . 今用垂直于底边 AB 的线段 EF 自点 A 向右平行移动至点 B . 若用 $S(x)$ 表示 EF 扫过的(变动)面积, 求函数 $S(x)$ 的表示式.

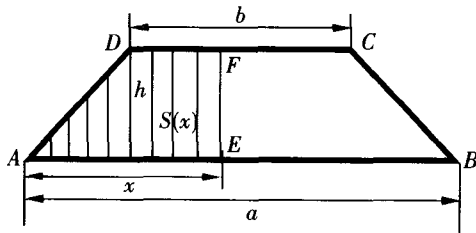


图 0-2

解 当 $0 \leq x \leq (a-b)/2$ 时, $S(x) = \frac{1}{2}x \cdot \frac{2hx}{a-b} = \frac{hx^2}{a-b}$;

当 $(a-b)/2 \leq x \leq (a+b)/2$ 时, $S(x) = \frac{(a-b)h}{4} + \left(x - \frac{a-b}{2}\right)h$;

当 $(a+b)/2 \leq x \leq a$ 时, $S(x) = \frac{(a+b)h}{2} - \frac{(a-x)^2 h}{a-b}$.

【注】像题7中的函数和上面的函数 $S(x)$ 都称为分段表示的函数. 分段表示的函数在技术科学或应用科学中被广泛地应用. 例如:

(1) 在电子(脉冲)技术中会用到的单位阶跃函数为

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (\text{见图 0-3})$$

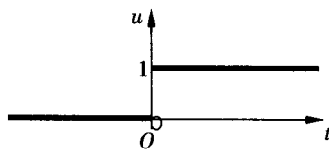


图 0-3

(2) 设正弦交流电的电流强度为

$$i(t) = I_m \sin \omega t \quad (I_m \text{ 为最大电流强度})$$

经过半波整流后, 在一个周期 $(0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega})$ 内, 电流强度 (见图 0-4) 为

$$i_+(t) = \begin{cases} I_m \sin \omega t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} \\ 0, & \frac{\pi}{\omega} < t \leq \frac{2\pi}{\omega} \end{cases}$$

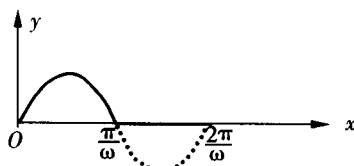


图 0-4

(3) 设 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数, 例如 $[0.99] = 0$, $[\pi] = 3$, $[-\pi] = -4$, 则称 $y = [x]$ 为取整函数 (见图 0-5). 这里的“ $[]$ ”是一个专用的函数记号, 就像中学数学中用到的函数记号 $\log, \sin$ 一样. 它在数论中是有用的, 而在微积分中偶尔会用到它.

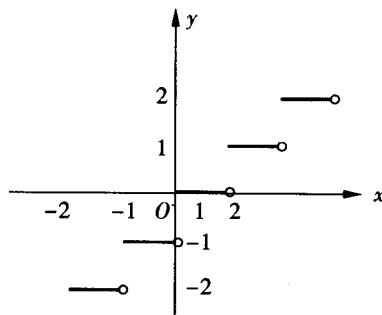


图 0-5

(4) 设 $\{x\} = x - [x]$. 其中的“ $\{ \}$ ”也是一个专用的函数记号, 而 $\{x\}$ 表示 x 的小数部分 (见图 0-6), 例如 $\{1.7\} = 0.7$. 但是, $\{-1.7\} = 0.3$, 因为根据定义, $\{-1.7\} = -1.7 - [-1.7] = -1.7 - (-2) = 0.3$.

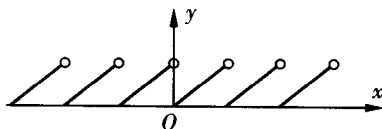


图 0-6

(5) 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数(见图 0-7), 其中 sgn 是 sign (符号, 记号) 的缩写.

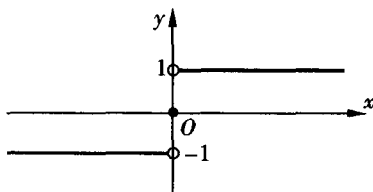


图 0-7

某些函数的特性

由于函数的多样性, 不同的函数会呈现出不同的变化状态. 若函数 $f(x)$ 的值域 $f(D)$ 包含在某个有限区间内, 即

$$A \leq f(x) \leq B \quad (x \in D)$$

则称它为有界函数, 并称 A 为它的下界, B 为它的上界. 一个函数可能只有下界, 即 $A \leq f(x)$, 也可能只有上界, 即 $f(x) \leq B$. 不是有界函数的函数称为无界函数. 无界函数可能是无下界, 或无上界, 或既无下界又无上界.

17. 证明: $f(x)$ 是有界函数 ($A \leq f(x) \leq B$), 当且仅当有正常数 M 使 $|f(x)| \leq M$.

证 充分性: 取 $\max\{|A|, |B|\}$, 则

$$f(x) \leq B \leq |B| \leq M \quad \text{且} \quad f(x) \geq A \geq -|A| \geq -M$$

即

$$-M \leq f(x) \leq M \quad \text{或} \quad |f(x)| \leq M.$$

必要性:

$$A = -M \leq f(x) \leq M = B$$

奇偶函数

设函数 $f(x)$ 定义在对称区间 $(-a, a)$ 或 $[-a, b]$ 上. 若满足 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数. 例如函数 $x, x^3, \sin x, \tan x$ 等. 奇函数的图形关于原点对称(中心对称). 若满足 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数. 例如 $x^2, x^4, \cos x$ 等. 偶函数的图形关于 y 轴对称.

18. 若 $f(x)$ 是奇函数, 证明 $f(0) = 0$.

证 $f(0) = f(-0) = -f(0)$, 所以 $2f(0) = 0$, 即 $f(0) = 0$.

19. 证明: 两个偶函数或两个奇函数的乘积都是偶函数; 而一个偶函数与一个奇函数的乘积是奇函数.

证 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是偶函数或都是奇函数, 则

$$f(-x)g(-x) = f(x)g(x)$$

或

$$f(-x)g(-x) = [-f(x)][-g(x)] = f(x)g(x)$$

即乘积 $f(x)g(x)$ 是偶函数;

对于一个偶函数与一个奇函数的乘积的情形, 不妨设 $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数, 则

$$f(-x)g(-x) = f(x)[-g(x)] = -f(x)g(x)$$

即乘积 $f(x)g(x)$ 是奇函数.

20. 验证: $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 和 $g(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$ 都是奇函数.