高等学校专科教材

高等数学

（上册）

广东工业大学应用数学系 编

华南理工大学出版社

GAODENG SHUXUE

高等学校专科教材

高等数学

（上册）

广东工业大学应用数学系　编

华南理工大学出版社

·广州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)/广东工业大学应用数学系编.—广州：华南理工大学出版社，2003.10

ISBN 7-5623-2007-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.广…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 050569 号

总 发 行：华南理工大学出版社
（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
发行部电话：020-87113487　87111048（传真）
E-mail：scut202@scut.edu.cn
http://www2.scut.edu.cn/press

责任编辑：张君晓

印 刷 者：广州市新明光印刷有限公司

开　　本：850×1168　1/32　**印张**：19.125　**字数**：480 千

版　　次：2003 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

印　　数：1～3500 册

定　　价：32.50 元（上下册）

前　　言

在科学技术飞速发展的今天,人们越来越意识到数学的重要。数学不仅在各行各业中有着广泛的应用,而且对培养具备创新能力的人才具有不可替代的作用。因此,数学在高等继续教育的工科类、经济类、管理类等有关专业的教学计划里占有较大的比重。基于此,广东工业大学高等继续教育学院组织部分有多年丰富教学经验的教师成立了教材编写组,依照教育部颁布的现行高等数学课程教学的基本要求,编写了适合高等学校培养人才需要的《高等数学》教材。

本教材具有如下的特色:一是具有可读性。力求整套教材在要求上做到适合专科教育的特点;在内容上力求做到认真精选,数学思想严谨,重点突出;在语言叙述上力求做到明确简练,深入浅出。二是具有适用性。对于基本概念尽量用直观的几何例题和实际问题加以引入;对于基本理论尽量强化其应用性;对于基本运算尽量强调数学思路的清晰。因此整套教材通过数学知识的传授,注重加强对学生各种能力的培养,使之更能适应现代化建设对人才在素质方面的各种要求。三是具有灵活性。整套教材分上、下两册,教学学时为130～140。部分教学内容(打“*”号者)可供不同层次(如脱产、业余、夜大和函授等)和不同专业(工科类专科各专业)灵活地加以选用。同时,为了便于学生的自学与复习,在每章末均编写了总习题,其中有填空题、选择题、计算题和证明题等。书末还附有习题与总习题的解答。

为了指导学生的学习,我们还编写了与教材相配套的《高等数

学学习指导》。其内容包括疑难解答、例题演示和习题提示等(习题均来源于本教材)。这样可使学生比较灵活、独立自主地从中学到更多有益的知识与方法。

参加本套教材编写工作的有:张式强、徐志庭、郝同壬、陈耀灼和吴为汉等同志。整套教材由华南理工大学汪国强教授担任主审。广东工业大学高等继续教育学院有关负责同志对本教材的编写与出版工作给予了具体指导与帮助。应用数学系对编写工作给予了大力支持。在此谨向他们表示衷心的感谢。

尽管编者有力求把书编好的愿望,但由于水平所限,书中难免有不妥之处,敬请同行赐教,欢迎批评指正。

编　者

2003年6月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象.函数、极限、连续、导数、微分、不定积分和定积分这七个概念构成一元函数微积分学的框架.本章将介绍函数、极限与函数的连续性等基本概念,以及它们的一些性质.

§1-1　函　　数

一、函数概念

在中学数学中已初步学习了函数概念,下面给出函数的一般性定义.

定义　设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集.如果对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$.数集 D 叫做这个函数的定义域.x 叫做自变量,y 叫做因变量,与 x_0 相对应的 y 值记为 y_0,或 $f(x_0)$,$y|_{x=x_0}$,称 $f(x_0)$ 为 $x=x_0$ 时,函数 $y=f(x)$ 的函数值.函数值的全体组成的集合称为值域,记为 W.

如果函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时 y 有确定的值 y_0 与之对应,称函数在点 $x=x_0$ 有定义或有意义.因此,函数的定义域就是使函数 $f(x)$ 有定义的 x 值的全体组成的集合.一般情况下定义域常用区间表示.满足不等式 $a<x<b$ 的实数集合记为 (a,b),称为开区间;满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数集合记为 $[a,b]$,称为闭

区间；类似的有半开闭区间$[a,b)$，$(a,b]$；a、b称为区间端点．$b-a$称为区间的长度．除此之外，满足不等式$x\geqslant a$的集合记为$[a,+\infty)$，满足$x<b$的集合记为$(-\infty,b)$而$(-\infty,+\infty)$表示全体实数集合．满足不等式$|x-x_0|<\delta(\delta>0)$的实数集合，在实数轴上表示以x_0为中心，长度为2δ的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，称为x_0的δ邻域，记为$U(x_0,\delta)$．x_0称为领域中心，δ称为邻域半径；而满足不等式$0<|x-x_0|<\delta$的实数集合表示为$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$是$x_0$的去心邻域，记为$U(\hat{x}_0,\delta)$．

对函数的概念，下面作进一步的说明．

1．函数符号

函数的实质是对应关系，深入理解函数符号十分重要．符号$y=f(x)$只表示y是x的函数，并不是y等于f和x的乘积．f与$f(x)$的含义是有区别的．f表示自变量与因变量的对应关系或法则；而$f(x)$则是自变量x对应的函数值．因此，对给定的某一个实数x，$f(x)$是一个数．但是，出于叙述的方便与对变量x取值的任意性，有时也将$f(x)$说成函数．在同一个问题中$f(x)$是指一个函数还是指一个函数值，则可以结合上下文来理解．今后在叙述上有时说函数$y=f(x)$，有时也说函数$f(x)$或函数f，其含义都一样．

2．函数三要素

函数有三个要素，即定义域D、对应法则f及值域W．如果已知D及f，当然可以确定W．因此，也有人说函数有两个要素，即定义域D及对应法则f．给出一个函数的关键是给出定义域D和对应法则f，至于用什么字母表示自变量及因变量无关重要．如$y=\cos x$和$s=\cos t$都是余弦函数．

我们可以根据函数三个要素是否相等来判别两个函数是否相同．例如，$y=x$与$y=\frac{x^2}{x}$的定义域不同，前者$D=(-\infty,+\infty)$，后

者 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,因此这两个函数不相同.

又例如,$y=\cos x$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$ 是否为同一个函数呢?因为 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$,这两个函数值域不同.前者 $W=[-1,1]$,后者 $W=[0,1]$,故这两个函数不是同一个函数.

又例如,$y=\sin 2x$ 与 $y=2\sin x\cos x$ 是不是相同函数呢?它们的定义域 D 都是 $(-\infty,+\infty)$,值域都是 $W=[-1,1]$.如何判定这两个函数的对应法则是否相等呢?

一般的判定方法是:如果函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 定义域内任何一个 x 值对应的函数值总满足 $f(x)=g(x)$,则认为这两个函数对应法则相等;至于它们的对应方式如何,对应方法繁简是无关重要的,即只看最后结果.

因此对于 $y=\sin 2x$ 与 $y=2\sin x\cos x$,由于它们的定义域同为 $(-\infty,+\infty)$,定义域内任一实数 x 恒有 $\sin 2x=2\sin x\cos x$,所以它们的对应法则相同,故这两个函数是相同的函数.

如果自变量在定义域内任取一个值时,对应的函数值只有一个,这种函数叫单值函数,否则叫多值函数,如 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$,$y=\arcsin x$.如没有特别说明,使用"函数"这一词都是指单值函数.

3. *对应法则表达形式*

对应法则 f 是因变量 y 和自变量 x 的函数关系的体现,它是函数概念中最本质的要素.对应法则的表达形式是各种各样的,通常函数有如下三种表示方法.

(1)图示法.用直角坐标中的曲线表示函数的方法,叫函数的图示法.

(2)表格法.如常见的对数表、三角函数表等都是把自变量一系列值与对应的函数值列成表,这种表示的方法叫表格法.

(3)公式法.如果两个变量之间的对应法则借助公式给出,要

对自变量施行哪些数学运算，以及应按照怎样的次序来进行这些运算，方能得出函数的对应值，则称之为用公式表示函数. 如 $y=x^2+1$ 是用公式来表示函数的对应法则.

函数表示方法有多种，一个函数往往可以同时用三种形式表示. 在实际应用中，必须从实际出发，选用适当的方式或互相配合，综合使用上述三种方式. 在概念上要区别函数定义与它的表达形式.

如果对应法则可以用自变量 x 的算式明显表示，这样的函数叫显函数，如 $y=x^2+1$ 所表示的函数称为显函数. 如果对应法则由 x、y 之间的一个二元方程 $F(x,y)=0$ 来确定，则这样的函数称为由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数，如 $xy-\sin(x+y)=0$ 或 $y-x^2-1=0$ 所表示的函数称为隐函数.

把一个隐函数化为显函数，叫做隐函数的显化. 如由 $y-x^2-1=0$ 可解出 $y=x^2+1$，但由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数不一定能显化，如方程 $xy-\sin(x+y)=0$ 确定的隐函数就不能显化.

在科学技术及经济领域中，还常遇到自变量在不同范围内用不同式子分段表示的一类函数，称为分段函数.

例如，我国工薪人员应纳多少税呢？根据中华人民共和国个人所得税法规定：个人工资、薪金所得应纳个人所得税；应纳税所得额的计算为：工资、薪金所得，以每月收入额减除 800 元后的余额，为应纳税所得额. 最后列出 1-1 的税率表.

表 1-1　个人所得税税表(工资、薪金所得适用)

级　数	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过 500 元的	5
2	超过 500 元到 2000 元的部分	10
3	超过 2000 元到 5000 元的部分	15
4	超过 5000 元到 20000 元的部分	20

续表 1-1

级　数	全月应纳税所得额	税率(%)
5	超过 20000 元到 40000 元的部分	25
6	超过 40000 元到 60000 元的部分	30
7	超过 60000 元到 80000 元的部分	35
8	超过 80000 元到 100000 元的部分	40
9	超过 100000 元的部分	45

若某人的月工资、薪金所得为 x 元,他应缴纳的税款 y 与其工资、薪金所得 x 之间的关系,可按下列方法确定:

按税法规定,当 $x \leqslant 800$ 元时,不必纳税,所以这时 $y=0$;

当 $800 < x \leqslant 1300$ 元时,纳税部分是 $x-800$,税率为 5%,所以 $y=(x-800)\times\frac{5}{100}$;

当 $1300 < x \leqslant 2800$ 元时,其中 800 元不纳税,500 元应纳 5% 的税,即 $500\times\frac{5}{100}=25$(元).再多的部分,即 $x-1300$ 按 10% 纳税.所以他应纳的税款为 $y=25+(x-1300)\times\frac{10}{100}$(元).

因此月工资、薪金不超过 2800 元与应缴纳税款的函数关系为

$$y=\begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 800 \\ (x-800)\times\frac{5}{100}, & 800 < x \leqslant 1300 \\ 25+(x-1300)\times\frac{10}{100}, & 1300 < x \leqslant 2800 \end{cases}$$

读者可以按照同样方法找出月工资、薪金超过 2800 元与缴纳税款的函数关系(资料来源:税制改革文件汇编·北京市税务局海淀区分局).

这种分段收费的方法在经济领域中常用.如为了充分利用电力资源、水资源、旅游资源或运输资源等,往往采用分段收费方法

来达到鼓励或控制人们对资源的消耗.

4. 函数的定义域

在实际问题中,定义域往往是反映函数关系的使用范围,只有自变量在定义域中取值时,函数关系才有实际意义.因此,研究函数关系时,应注意其定义域.考察函数的定义域,必须注意以下两个方面:

(1)联系函数所反映的实际问题,其定义域由实际意义来确定.

例如,圆面积 A 和直径 d 有函数关系:$A=\frac{\pi d^2}{4}$.其定义域 $D=(0,l]$,而不是使该式运算有意义的范围$(-\infty,+\infty)$.

(2)一般在数学上研究函数,其定义域由函数式本身来确定,即要算式有意义的自变量所允许的范围,叫自然定义域.例如,在用分式所表示的函数中,分母不能为零;用根式表示的函数中,负数不能开偶次方根;用对数式表示的函数中,真数要大于零;用反三角函数式表示的函数中,要符合反三角函数的定义;如果函数表达式中含有分式、根式或反三角函数式,则应取各部分定义域的公共部分.

例 1 求下列函数的定义域:

(1)$y=\frac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$;

(2)$y=\lg\frac{x}{x-1}$;

(3)$y=\arcsin\frac{x+1}{3}$.

解 (1)求定义域相当于解不等式组:

$$\begin{cases}4-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases},\quad 即\quad \begin{cases}x\neq\pm 2\\ x\geqslant -2\end{cases}$$

所以函数的定义域 $D=(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(2)因为$\frac{x}{x-1}>0$,即

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x < 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases}$$

所以函数的定义域 $D=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

(3)因为 $-1\leqslant\frac{x+1}{3}\leqslant1$,所以 $-3\leqslant x+1\leqslant3$,即 $-4\leqslant x\leqslant2$.因此,函数的定义域 $D=[-4,2]$.

例 2 求分段函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant1 \\ x^2-1, & 1<|x|<2\end{cases}$ 的定义域.

解 分段函数的定义域,等于各段函数定义域的并.第一段为 $|x|\leqslant1$,即 $-1\leqslant x\leqslant1$.第二段为 $1<|x|<2$,相当于解不等式组:

$$\begin{cases} 1 < |x| \\ |x| < 2 \end{cases},\ 即 \begin{cases} x > 1 \text{ 或 } x < -1 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$$

也即
$$\begin{cases} x > 1 \\ -2 < x < 2 \end{cases},\ 或 \begin{cases} x < -1 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$$

故
$$1 < x < 2 \text{ 或 } -2 < x < -1$$

第一段与第二段定义域之并为该函数的定义域 $D=(-2,2)$.

例 3 设 $f(x-2)=x^2-3x+3$,求 $f(x)$ 及 $f(x_0+h)-f(x_0)$.

解 令 $x-2=u$,则 $x=u+2$,代入已知式得

$$\begin{aligned} f(u) &= f(x-2) = x^2-3x+3 = (u+2)^2-3(u+2)+3 \\ &= u^2+u+1 \end{aligned}$$

故
$$f(x) = x^2+x+1$$

$$\begin{aligned} f(x_0+h)-f(x_0) &= (x_0+h)^2+(x_0+h)+1-x_0^2-x_0-1 \\ &= h(2x_0+h+1) \end{aligned}$$

二、函数的几何特性

1. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$.如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数

$f(x)$在区间 I 上是严格单调增加的;如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是严格单调减少的. 严格单调增加和严格单调减少的函数统称为严格单调函数.

在几何上,单调增加的函数,它的图形是随着 x 的增加而上升的曲线;单调减少的函数,它的图形是随着 x 的增加而下降的曲线.

例如,函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是严格单调增加的;在$(-\infty,0)$上是严格单调减少的;在区间$(-\infty,+\infty)$内函数 $f(x)=x^2$不是单调的(见图 1-1). 一个函数之严格单调增或严格单调减一定不能脱离所指定的范围.

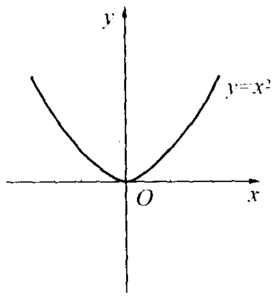

图 1-1

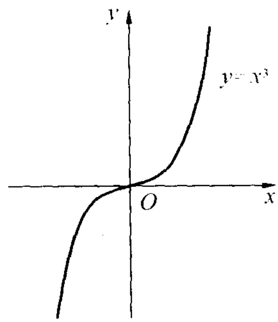

图 1-2

例 4 证明函数 $f(x)=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是严格单调增加的.

证 设 x_1,x_2 是$(-\infty,+\infty)$内任意两点,当 $x_1<x_2$ 时,需要证 $f(x_1)=x_1^3<x_2^3=f(x_2)$,即证 $x_1^3-x_2^3<0$.

事实上,由于 $x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$,而 $x_1-x_2<0$,$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0$,所以 $x_1^3-x_2^3<$

0，即 $x_1^3<x_2^3$（见图 1-2）.从而证明了 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格单调增加的.

2．有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，如果存在正数 M，使得任一 $x\subset X$ 所对应的函数值都满足不等式 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界.如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.这就是说，如果对于任何正数 M，总存在 $x_1\subset X$，使 $|f(x_1)|>M$，那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

在几何上，如果函数的图形介于两水平直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间，则函数是有界的.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为无论 x 取任何实数，$|\sin x|\leqslant 1$ 都成立.函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内无界，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立，而在 $(1,2)$ 内 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 是无界的.又如函数 $y=\sqrt{\cos x-1}$ 在其定义域内也是有界函数.

注意：函数的有界性是对定义域 D 内某个数集 X 而言，当然 X 可以是整个定义域或定义域中某个区间，或由离散点所组成的数集.

3．奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$）.如果对于定义域 D 的任何 x 值恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

也就是说，对于给定的函数，当自变量 x 换为 $-x$ 时，如果函数值不变号，则该函数为偶函数；如果函数值符号改变，则该函数为奇函数.