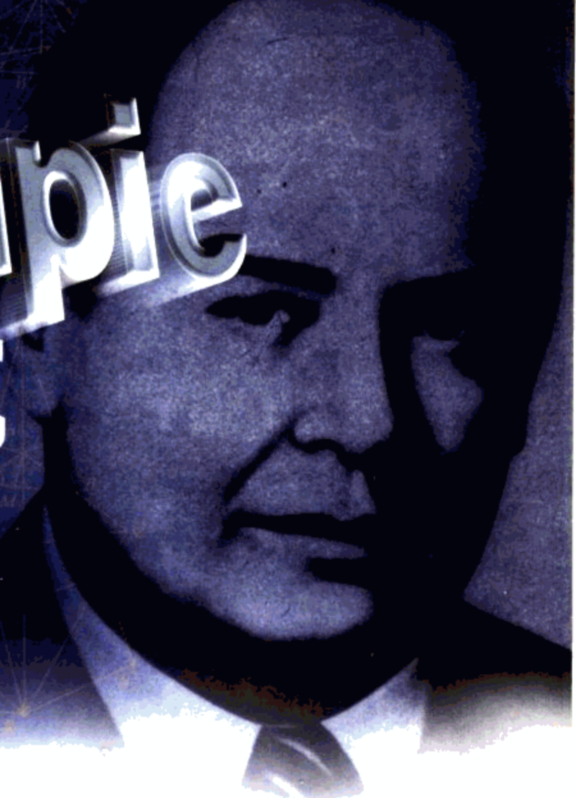


Olympic

学科奥林匹克系列丛书

高中数学奥林匹克题集

华南师范大学附属中学
广东奥林匹克学校 合编

主编 吴颖民

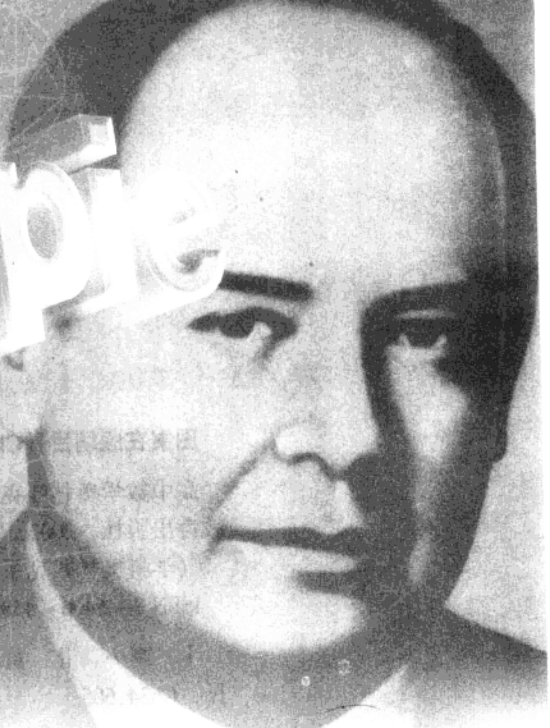
副主编 杨小村 黄启林

本书主编 黄启林

广东教育出版社

Olympic

学科奥林匹克
系列丛书



高中数学
奥林匹克题集

华南师范大学附属中学
广东奥林匹克学校
合编

主编＼吴颖民
副主编＼杨小村＼黄启林
本书主编＼黄启林

广 东 教 育 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

高中数学奥林匹克题集/黄启林主编．—广州：广东教育出版社，2002．3

（学科奥林匹克系列丛书/吴颖民主编）

ISBN 7-5406-4585-7

Ⅰ．高…　Ⅱ．黄…　Ⅲ．数学课-高中-习题
Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 030773 号

广东教育出版社出版发行

（广州市环市东路水荫路 11 号）

邮政编码：510075

广东新华发行集团股份有限公司经销

南海市彩印制本厂印刷

（南海市桂城叠南）

787 毫米×1092 毫米　16 开本　22.75 印张　455 000 字

2002 年 3 月第 1 版　2002 年 3 月第 1 次印刷

印数 1-5000 册

ISBN 7-5406-4585-7/G·4160

定价：28.30 元

前言

本书收集了高中数学奥林匹克中几何、代数、数论、组合等四大内容的一些题目及解答。这些题目及解答一部分来自于黄启林老师（广东省中学数学高级教师，广东省中学数学特级教师，中国数学奥林匹克高级教练员，华南师范大学附属中学教学处副主任，广东奥林匹克教务办公室主任）十多年来用于训练他的学生参加全国中学生数学奥林匹克（冬令营）的有关资料；一部分来自于黄启林老师的学生洪献文（现北京大学学生，1996 年和 1997 年两次参加中国中学生数学奥林匹克（冬令营），并两次入选中国中学生数学奥林匹克国家集训队）、邓伟嘉（现清华大学学生，1999 年参加中国中学生数学奥林匹克，在本次竞赛中以满分获得金奖，并入选 1999 年中国中学生数学奥林匹克国家集训队）、朱琪慧（现清华大学学生，1999 年和 2000 年两次参加中国中学生数学奥林匹克，并两次入选中国中学生数学奥林匹克国家集训队和国家队，在 1999 年 7 月和 2000 年 7 月分别获得第 40 届和第 41 届国际中学生数学奥林匹克（IMO）银牌和金牌，在 2000 年 4 月第 26 届全俄中学生数学奥林匹克决赛中以满分得了金牌）、李鑫（现北京大学学生，1998 年、1999 年、2000 年、2001 年四次参加中国中学生数学奥林匹克，并四次入选中国中学生数学奥林匹克国家集训队，三次入选中国中学生数学奥林匹克国家队。在 1999 年 7 月和 2000 年 7 月分别获得第 40 届和第 41 届国际中学生数学奥林匹克金牌，在 2000 年 4 月第 26 届全俄中学生数学奥林匹克决赛中获得了银牌）的个人资料积累，特别是邓玮嘉、洪献文两位同学的资料积累。早在 1996 年和 1997 年间，为了提高洪献文同学的数学奥林匹克水平，黄启林老师就开始指导洪献文同学对有关培训资料进行了分门别类的整理，前后共花了三至四个月的时间，这些整理出来的资料便是本书的最原始的素材。在 1999 年五六月间，黄启林老师又指导邓玮嘉对这些资料进行了修改和补充，从而编成了这本《高中数学奥林匹克题集》，朱琪慧和李鑫在 2000 年的暑假对书稿还作了少量的修改和补充。

本书是高中数学奥林匹克训练和研究的宝贵资料，也是数学爱好者难觅的参考读物，还是中学数学教师指导学生开展研究性学习教学的参考用书。在编写过

程中，作者参阅了一些书刊的有关资料，在此不一一注明，望谅解。限于作者水平，书中如有错误，欢迎读者指正。

序

吴颖民

我校于20世纪90年代初，经广东省人民政府批准承办广东奥林匹克学校。办奥校主要的目的有两个，一是为我国参加国际学科奥林匹克竞赛输送一批苗子，二是为高素质创新人才的培养打下良好的基础。经过近十年的艰苦创业，我们的劳动终于结出了硕果：我校学生在国际学科奥林匹克竞赛中取得了四枚金牌、一枚银牌、一枚铜牌的好成绩；我们的年轻教师在培养拔尖人才的磨炼中逐步成熟起来，涌现出一批在培养拔尖人才方面颇有造诣的优秀教师；编写了大量教材、讲义和训练习题，逐步形成了有华南师范大学附中特色的学科奥林匹克教程；还逐步地摸索并初步掌握了培养学科竞赛拔尖人才和创新型高素质人才的规律，孕育出一批论著和科研成果。这次由广东教育出版社编辑、出版的《学科奥林匹克系列丛书》，就是近十年来我校在学科奥林匹克的培训实践中所取得的丰硕成果之一。

我国是在20世纪80年代中期陆续派队参加国际中学生学科奥林匹克竞赛的。无论是数学、物理、化学，还是生物、信息学的竞赛，我国选手都取得了让人刮目相看的好成绩。这从一个侧面说明，虽然我国人口多，地区差异大，发展不平衡，总体水平不高，但在培养学科拔尖人才和创新型人才方面，是有一套好办法的，是值得肯定的。

社会上对学生参加奥林匹克竞赛的看法各异，褒贬不一。其实，就我们的经验看，学科奥林匹克活动是一项有利于学生创新思维的培养、有利于学生对知识的深刻理解与灵活运用、有利于提高学生运用基础知识分析问题和解决问题能力的“思维体操”。如果说，培养学生的创新精神和实践能力是素质教育的重点，那么，开展学科奥林匹克活动，则是实施素质教育的一项具体实践。

为了实现在21世纪中叶建成社会主义现代化强国的宏伟目标，我国正在实施科教兴国的战略，大力发展教育事业和科学事业。科学事业的发展，在很大程度上依赖教育事业为其培养和输送一大批有创新能力的拔尖人才。因此，我们一方面要为普及九年义务教育而努力，为提高全民族科学文化素质而努力；另一方面也要为培养一批又一批有创新精神和实践能力，能攻克科学技术难关的拔尖人才作贡献。我们认为，提高广大群众的科学文化水平和培养少数拔尖人才，是并行不悖的，都关乎国家和民族的生存与发展的大计。因此，要理直气壮地培养拔尖人才。

我们十分感谢广东教育出版社的领导和编辑对这套书出版的关心和支持！我们祈望这套书的出版，能对教育界摒弃应试教育的弊端，能对优秀的青少年学生的成长产生积极的影响。

2001年6月

目录

习　　题

一、几何

1.1 常规几何题

1. 两圆 C_1 和 C_2 交于 A 和 B 两点，设 P 是 C_1 上的点，Q 是 C_2 上的点，$\angle APB+\angle AQB=90°$. 证明：如果 O_1 是 C_1 的圆心，O_2 是 C_2 的圆心，且 O_1，O_2 在直线 AB 的异侧，则 $\triangle O_1AO_2$ 和 $\triangle O_1BO_2$ 都是直角三角形.

2. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$，$\angle B$ 及 $\angle C$ 的内角平分线与 $\triangle ABC$ 的外接圆分别交于点 A_1，B_1 与 C_1（$A\neq A_1$，$B\neq B_1$，$C\neq C_1$），点 A_0，B_0 和 C_0 分别是 AA_1 与 B_1C_1，BB_1 与 A_1C_1 及 CC_1 与 A_1B_1 的交点，求证：$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_0B_0C_0$ 的内心重合.

3. 设凸四边形 $ABCD$ 的四个顶点共圆，并且有另一个圆 O，它的圆心 O 在边 AB 上，且与 BC，CD，DA 分别相切于 M，N，P 点. 求证：$AD+BC=AB$.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=30°$，O 是外心，I 是内心，边 AC 上的点 D 与 BC 上的点 E 使 $AD=BE=AB$，求证：$OI\perp DE$ 且 $OI=DE$.

5. 设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，P 为其外接圆上任意一点，证明：关于 $\triangle ABC$ 的点 P 的西姆松线通过线段 PH 的中点.

6. 圆 C 外一点 K，到 C 的切线是 KL 和 KN，在 KN 延长线上取一点 M，$\triangle KLM$ 的外接圆和 C 再在一点 P 相交，Q 是 N 到 LM 的垂足. 求证：$\angle MPQ=2\angle KML$.

7. 设 MN 为两圆 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的一条外公切线，直线 O_1O_2 顺次交两圆于 A，B，C，D 四点，$\odot O$ 为过点 A，D 且和 $\odot O_1$，$\odot O_2$ 相交的圆，交点分别为 E，F，求证：E，F，N，M 四点共圆.

8. $\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆，$\odot O_1$ 与 AB、AC 相切于 D 和 E，与 $\odot O$ 内切于 P. 证明：DE 的中点 M 为 $\triangle ABC$ 的内心.

9. 在直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$CD\perp AB$，D 为垂足，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 分别是 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BDC$ 的内切圆，两圆的另外一条外公切线分别交 AC，BC 于 P，Q. 求证：P，A，B，Q 四点共圆.

10. AM 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线，以 AM 为直径作圆交 AB，AC 于 D，E. 过 D，E 作该圆的切线相交于 P，试证：$PM\perp BC$.

11. 在一个$\triangle ABC$中，$\angle C=2\angle B$，P为$\triangle ABC$内满足$AP=AC$及$PB=PC$的一点．求证：AP是$\angle A$的三等分线．

12. 两圆相交于点A和点B．过A作一直线，分别与两圆相交于点C和点D，设M和N分别是不含点A的弧BC和BD的中点，K为线段CD的中点．证明：$\angle MKN=90°$．

13. $\triangle ABC$中，$\angle A$的平分线交BC于D，设Γ和Γ'分别是$\triangle ABD$和$\triangle ACD$的外接圆，P，Q是AD与Γ，Γ'的公切线的交点．求证：$PQ^2=AB\cdot AC$．

14. 由$\triangle ABC$向外作$\triangle BCD$和$\triangle ACE$，使得：$AE=BD$且$\angle BDC+\angle AEC=180°$，$F$是线段$AB$上的一点满足$\frac{AF}{FB}=\frac{DC}{CE}$．证明：$\frac{DE}{CD+CE}=\frac{EF}{BC}=\frac{FD}{AC}$．

15. 给定锐角$\triangle ABC$，在$\triangle ABC$外部作正三角形ABD和正三角形ACE．假设CD，BE分别交AB，AC于F，G；CD，BE交于点P．$\triangle PBC$与四边形$AFPG$面积相等．求$\angle BAC$．

16. G是$\triangle ABC$的重心，M，N分别是AC，AB的中点．设$\triangle ANC$和$\triangle AMB$的外接圆相交于A和P，$\triangle AMN$的外接圆交AP于T．求$AT:AP$．

1.2　几何等式

1. P为$\triangle ABC$内部任意一点，设AP，BP，CP分别交BC，CA，AB于点D，E，F，求证：$S_{\triangle DEF}=\frac{2PD\cdot PE\cdot PF}{PA\cdot PB\cdot PC}\cdot S_{\triangle ABC}$．

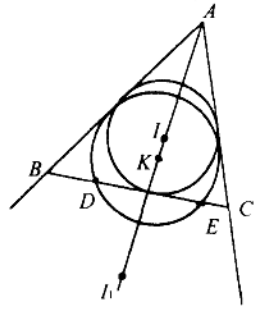
2. 设I为$\triangle ABC$的内心，角A，B，C所对边分别为a，b，c，求证：$\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ac}+\frac{IC^2}{ab}=1$．

3. 给定任一三角形ABC，从C点作$n-1$条射线，交线段AB于M_1，M_2，M_3，…，M_{n-1}，记$\triangle ACM_1$，$\triangle M_1CM_2$，…，$\triangle M_{n-1}CB$的内切圆半径分别为r_1，r_2，…，r_n，它们与AB边相切的旁切圆半径分别为p_1，p_2，…，p_n，$\triangle ABC$的内切圆半径为r，AB边的旁切圆半径为p，求证：$\frac{r_1}{p_1}\cdot\frac{r_2}{p_2}\cdots\frac{r_n}{p_n}=\frac{r}{p}$．

4. 凸四边形的四个角分别为2α，2β，2γ，2δ，四条边分别为l，m，n，k．求证：它的面积$S=\frac{(l+m+n+k)^2}{4(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\delta)}-\frac{(l+n-m-k)^2}{4(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\delta)}$．

5. 一个半径为P的圆与$\triangle ABC$的边AB，AC相切，圆心K到BC的距离为d．证明：$a(P-d)=2s(P-r)$．这里r，$2s$分别为$\triangle ABC$的内切圆半径与周长，并约定K与A在BC同侧时$d>0$，否则$d\leqslant 0$．

6. 如图，圆K交$\triangle ABC$的边BC于D，E，记$\triangle ABC$内切圆，BC边上的旁切圆，圆K半径分别为r，r_1，p．证明：$DE=\frac{4\sqrt{rr_1(p-r)(r_1-p)}}{r_1-r}$．



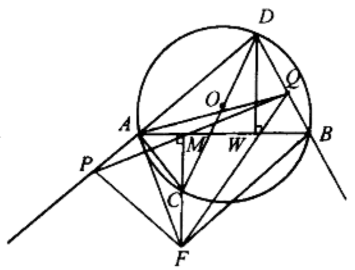
（第6题）

1.3　几何不等式与几何最值

1. 设P是$\triangle ABC$所在平面上的一点，G是$\triangle ABC$的重心，求证：$PA+PB+PC>3PG$．

2. 设$\triangle ABC$的边长和面积分别为a，b，c和$\triangle$，记$H=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$，$K=ab+bc+ca$，求证：$\frac{(K-H)^2}{12}\geqslant\triangle^2\geqslant\frac{(K-H)(3K-5H)}{12}$，并问等号何时成立？

3. 已知$\odot O$的内接四边形$ABCD$中，CD为直径，$CM\perp AB$于M，过M作直线与$\angle ADB$的两边分别相交于P和Q（如图）．求证：$AB<PQ$．

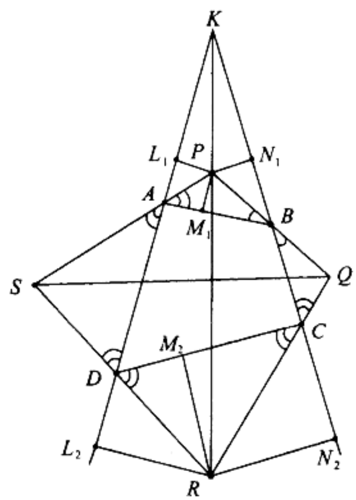


（第3题）

4. 设$A_1B_1C_1D_1$和$A_2B_2C_2D_2$是圆内接凸四边形，$A_iB_i=a_i$，$B_iC_i=b_i$，$C_iD_i=c_i$，$D_iA_i=d_i$，面积为F_i（$i=1,2$），令$K=4(a_1b_1+c_1d_1)(a_2b_2+c_2d_2)-(a_1^2+b_1^2-c_1^2-d_1^2)(a_2^2+b_2^2-c_2^2-d_2^2)$，则$K\geqslant16F_1F_2$，等号当且仅当对应角$B_1=B_2$时成立．

5. 已知$\triangle ABC$，设I是它的内心，角A，B，C的内角平分线分别与其对边交于A'，B'，C'．求证：$\frac{5}{4}<\frac{AI\cdot BI}{AA'\cdot BB'}+\frac{BI\cdot CI}{BB'\cdot CC'}+\frac{CI\cdot AI}{CC'\cdot AA'}\leqslant\frac{4}{3}$．

6. 凸四边形$ABCD$，其四条外角平分线如图分别相交于P，Q，R，S．求证：$PR+QS\geqslant AB+BC+CD+DA$，并求等号成立的充要条件．



（第6题）

7. 设$\triangle ABC$的外接圆半径为R，内切圆半径为r，P为$\triangle ABC$内任一点，AP，BP，CP的延长线分别交对边及外接圆于U'，U；V'，V；W'，W．记$f(p)=\frac{UU'}{AU'}+\frac{VV'}{BV'}+\frac{WW'}{CW'}$．求$f(p)$的最大值．

8. 设P是正四面体T内任一点，过P作与T的各面平行的4个平面，把T分为14块，从这14块中去掉四面体和平行六面体，剩下各块体积之和记为$f(p)$，这里所说"剩下各块"是指那些与T的某棱邻接，但不和任一顶点邻接的块．设T的体积为1，试求$f(p)$的最小上界和最大下界．

9. 在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，$A\geqslant B\geqslant C$，$A'\geqslant B'\geqslant C'$，证明：$\frac{1}{h_ah_a'}+\frac{1}{t_bt_b'}+\frac{1}{m_cm_c'}\geqslant\frac{12}{aa'+bb'+cc'}$．其中$a$，$b$，$c$是$A$，$B$，$C$的对边，$h_a$是$a$上的高，$t_b$是$b$上的角平分线，$m_c$是$c$的中线．对于$\triangle A'B'C'$，情况类似．

10. 在平面上已给定一点O和封闭折线F（未必是凸的）．设P表示F的周长，记从O到F的顶点距离之和为D，从O到F的各边距离之和为H．求证：$D^2-H^2\geqslant\frac{P^2}{4}$．

11. 设 $ABCDEF$ 是凸六边形，且 $AB /\!/ DE$，$BC /\!/ EF$，$CD /\!/ FA$. 记 R_A，R_C，R_E 分别是 $\triangle FAB$、$\triangle BCD$、$\triangle DEF$ 的外接圆半径. 求证：$R_A+R_C+R_E \geqslant \frac{p}{2}$，其中 p 是该六边形的周长.

12. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，外接圆半径为 R，圆心为 O，AO 所在直线交过 B，O，C 的圆于另一点 A_1，类似地定义 B_1，C_1. 求证：$OA_1 \cdot OB_1 \cdot OC_1 \geqslant 8R^3$.

13. 在锐角三角形 ABC 中，求证：$h_a+h_b+h_c \leqslant 3(R+r)$，其中 h_a，h_b，h_c 分别为 BC，CA，AB 边上的高，R 是三角形外接圆半径，r 是内切圆半径.

14. 点 P，Q，R 分别在 $\triangle ABC$ 的边 BC，CA，AB 上，并且将周长三等分（即 $PC+CQ=QA+AR=RB+BP$）. 证明 $\triangle PQR$ 的周长不小于 $\triangle ABC$ 的周长的一半.

1.4 几何计算

1. 已知边长分别为 a，b，c 的 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$\odot O_1$ 内切于 $\odot O$，切点 G 在 BC 弧上，由点 A，B，C 分别引 $\odot O_1$ 的切线长顺次为 α，β，γ，证明：$a\alpha = b\beta + c\gamma$.

2. 在平面上任意放置边长为 a 的正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 与边长为 b 的正方形 $B_1B_2B_3B_4$（A_1，A_2，A_3，A_4 与 B_1，B_2，B_3，B_4 同为逆时针转向），顺次连接 A_1B_1，A_2B_2，A_3B_3，A_4B_4 的中点 P_1，P_2，P_3，P_4 得四边形 $P_1P_2P_3P_4$.

(1) 求证：$P_1P_2P_3P_4$ 为正方形；

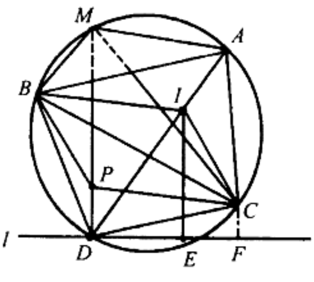
(2) 试求 $P_1P_2P_3P_4$ 的面积 S 的最大值与最小值.

3. 过圆内接凸四边形 $ABCD$ 的顶点 C 在四边形外任作一直线分别交 AB，AD 的延长线于 E，F. 求证：

(1) $AB \cdot CE \cdot DF + AD \cdot BE \cdot CF = BC \cdot CD \cdot EF$；

(2) $AE \cdot CF \cdot BC = AF \cdot EC \cdot CD$.

4. 如图，I 为 $\triangle ABC$ 内心，D 为 AI 延长线与 $\triangle ABC$ 外接圆交点，$PBIC$ 是一个平行四边形，其中 $PB /\!/ CI$，$PC /\!/ BI$，DP 延长线交 $\triangle ABC$ 外接圆于 M. 求证：$MC = MA + MB$.



（第 4 题）

5. $ABCD$ 是圆内接四边形，E 在 AB 边上，F 在 CD 边上，且 $\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}$，$P$ 点在线段 EF 上且 $\frac{PE}{PF}=\frac{AB}{CD}$. 求证：三角形 APD 与三角形 BPC 的面积比是一个与 E，F 位置无关的定值.

6. 三角形 ABC 内有两点 M 和 N，使得 $\angle MAB=\angle NAC$ 及 $\angle MBA=\angle NBC$ 成立. 求证：$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC}+\frac{BM \cdot BN}{BC \cdot BA}+\frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB}=1$.

7. 凸六边形 $ABCDEF$ 中，$\angle B+\angle D+\angle F=360°$，且 $\frac{AB \cdot CD \cdot EF}{BC \cdot DE \cdot EA}=1$. 求证：$\frac{BC \cdot AE \cdot FD}{CA \cdot EF \cdot DB}=1$.

8. $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=2\angle ABC$，在 BC 边上取点 D 使得 $CD=2BD$，延长 AD 到 E 使得 AD

$=DE$. 求证：$\angle ECB+180^\circ=2\angle EBC$.

9. 直角坐标系 xOy，n 个点 $M_1(x_1, y_1)$，…，$M_n(x_n, y_n)$ 满足 $y_1>0$，…，$y_k>0$，$y_{k+1}<0$，…，$y_n<0$ $(1\leqslant k\leqslant n)$. 横轴上排列有 $n+1$ 个点 A_1，A_2，…，A_{n+1}，并且对每个点 A_j $(1\leqslant j\leqslant n+1)$ 有 $\sum\limits_{i=1}^{k}\angle M_iA_jX=\sum\limits_{i=k+1}^{n}\angle M_iA_jX$.

这里 $\angle M_iA_jX$ 是 $\overrightarrow{A_jM_i}$ 和横轴正方向之间的夹角（角度的大小在 0 与 π 之间）.

证明：点集 $\{M_1, \cdots, M_n\}$ 关于横轴对称.

10. $\triangle ABC$ 的垂心为 H，在直线 AH，BH，CH 上分别取 L，M，N，使 $AL=BM=CN=$ 定值 x.

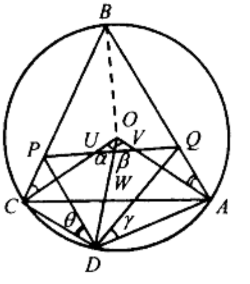
(1) 证明：$\triangle LMN$ 的面积为 $\frac{1}{2}(\sin A+\sin B+\sin C)(x^2-2Rx+2Rr)$，其中 R，r 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆半径.

(2) 在直线 AH，BH，CH 上分别取 L_1，L_2，M_1，M_2，N_1，N_2，使 $AL_1=BM_1=CN_1=x_1$，$AL_2=BM_2=CN_2=x_2\neq x_1$. 证明 $S_{\triangle L_1M_1N_1}=S_{\triangle L_2M_2N_2}$ 的充要条件是 $x_1+x_2=2R$.

(3) 符号同 (2)，若 L_1，M_1，N_1 共线，L_2，M_2，N_2 共线，证明这两条直线的交点是 $\triangle ABC$ 的内心并且 $L_1M_1\perp L_2M_2$.

11. 平面上给定 $\triangle A_1A_2A_3$ 及点 P_0，定义 $A_s=A_{s-3}$，$S\geqslant 4$. 造点列 P_0，P_1，P_2，…，使得 P_{k+1} 为绕中心 A_{k+1} 顺时针旋转 120°时 P_k 所达到的位置，$k=1$，2，…. 若 $P_{1986}=P_0$，证明：$\triangle A_1A_2A_3$ 为等边三角形.

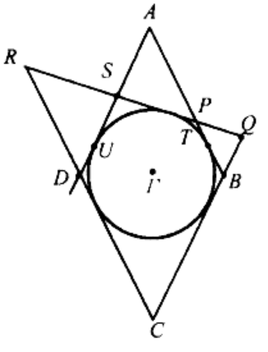
12. 已知⊙O 有三条直径 AD，BE，CF 两两夹 60°角，圆内一点 P 使 $|OP|<\frac{R}{2}$，过 P 作与三角形垂直的弦与圆周交于六个点，擦去三直径，将 P 与 A，B，C，D，E，F 相连，得到 12 块区域，相间染成黑、白两色. 证明：$S_{黑}=S_{白}$.



（第 14 题）

13. 在$\triangle ABC$ 的 3 条边 BC、CA，AB 上分别取点 D，E，F，使$\triangle DEF$ 为等边三角形. a，b，c 分别表示$\triangle ABC$ 的三边长，而 S 表示它的面积. 求证：$DE\geqslant 2\sqrt{2}S\cdot(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S)^{-\frac{1}{2}}$.

14. 给定⊙O 的一个内接三角形 ABC，D 是 $\overset{\frown}{AC}$ 上的一个动点. P，Q 分别是 BC，BA 上的两点，满足 $\angle CDP=\angle QAO$，$\angle ADQ=\angle PCO$，PQ 交 OC，OD，OA 于点 U，W，V. 求证：$\frac{UD}{VD}\cdot\frac{OP}{OQ}=\frac{PD}{QD}\cdot\frac{OU}{OV}$.



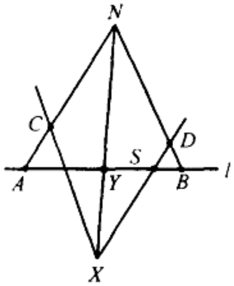
（第 15 题）

15. 如图，菱形 $ABCD$ 的内切圆 Γ 切 AB 于 T，圆 Γ 的一条切线交 AB，AD 于 P，S，PS 交 BC，CD 于 Q，R.

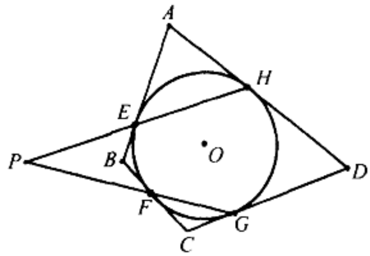
求证：(a) $\frac{1}{PQ}+\frac{1}{RS}=\frac{1}{BT}$；(b) $\frac{1}{PS}-\frac{1}{QR}=\frac{1}{AT}$.

1.5 反演与配极

1. 如图，N 与 S 为圆 ω 的一组对径点，l 为 ω 在 S 点上的切线，NA 与 l 交于 A，与 ω 交于 C，NB 与 l 交于 B，与 ω 交于 D. ω 在 C 点及 D 点上的两条切线交于 X. NX 交 l 于 Y. 求证：$AY=YB$.



（第 1 题）

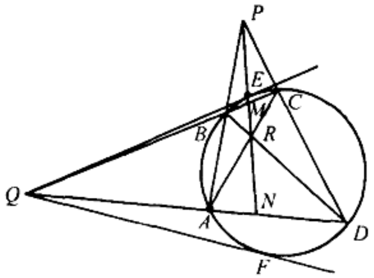


（第 2 题）

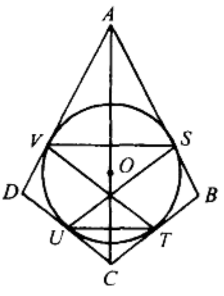
2. 凸四边形 $ABCD$ 外切于⊙O，AB，BC，CD，DA 上的切点分别是 E，F，G，H，直线 HE 与 FC 相交于点 P，求证：$OP\perp AC$.

3. 四边形 $ABCD$ 内接于圆，其边 AB 与 DC 的延长线交于点 P，AD 和 BC 的延长线交于 Q，过 Q 作该圆的两条切线，切点分别为 E，F，求证：P，E，F 三点共线.

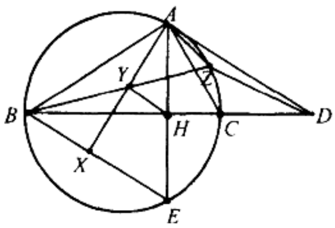
4. 凸四边形 $ABCD$ 外切于⊙O，AB，BC，CD，DA 边上的切点分别为 S，T，U，V. 求证：AC，BD，SU，TV 共点.



（第 3 题）



（第 4 题）

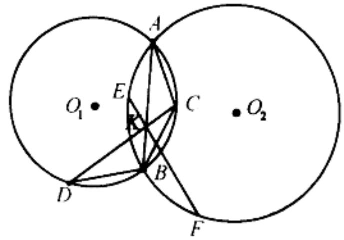


（第 5 题）

5. 三角形 ABC 中，$\angle A=90°$，且 $\angle B<\angle C$. 过 A 作△ABC 外接圆 W 的切线和 BC 相交于 D，E 是 A 点关于 BC 的对称点，X 是 A 到 BE 上的垂足，Y 是 AX 中点，直线 BY 与 W 再相

交于 Z. 求证：BD 与 $\triangle ADZ$ 外接圆相切.

6. 两个半径不相等的圆 $\odot O_1$，$\odot O_2$ 相交于 A，B，以 B 为圆心作一圆，交 $\odot O_1$ 于 CD，交 $\odot O_2$ 于 EF，直线 DE，CF 相交于 M，直线 DF，CE 相交于 N. 证明：MAN 共线.



（第6题）

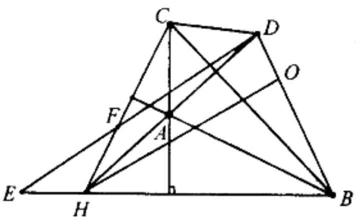
1.6　共点线与共线点

1. 以 $\triangle ABC$ 的两边 AB，AC 向外作正方形 $ABED$，$ACFG$，$\triangle ABC$ 的高为 AH，求证：AH，BF，CE 交于一点.

2. 设 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，三条直线 LA，LB，LC 分别通过顶点 A，B，C，并以下述方式作出：设 H 是由 A 向 BC 所作垂线的垂足，S_A 是以 AH 为直径的圆，S_A 与边 AB，AC 分别交于点 M，N（M，N 异于 A），LA 为过 A 点与 MN 垂直的直线，直线 LB，LC 类似作出，证明：LA，LB，LC 共点.

3. 锐角 $\triangle ABC$ 中，过 B，C 的圆 W 交 AB，AC 于 C'，B'，记 $\triangle AB'C'$，$\triangle ABC$ 的垂心分别为 H'，H. 证明：BB'，CC'，HH' 共点.

4. H 是三角形 ABC 的垂心，O 是外心，R 是外接圆半径. D 是 A 点关于 BC 的对称点，E 是 B 点关于 CA 的对称点，F 是 C 点关于 AB 的对称点. 求证：$OH=2R$ 是 D，E 和 F 共线的充要条件.



（第4题）

5. 在三角形 ABC 的边 BC 的延长线上取一点 D，使 $CD=AC$. 三角形 ACD 的外接圆和以 BC 为直径的圆再相交于 P，BP 和 AC 相交于 E，CP 和 AB 相交于 F. 求证：D，E 和 F 共线.

6. 已知 $\triangle ABC$ 的内切圆切 AB，AC，BC 于 P，Q，R，PQ 与 AB 边上的中位线交于点 X，RQ 与 BC 边上的中位线交于点 Y，求证：B，X，Y 三点共线.

1.7　立体几何

1. 四面体的内切球与一个面的切点恰为该面的内心，与另一个面的切点恰为其垂心，与第三个面的切点恰为其重心. 证明：该四面体是正四面体.

2. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是边长为 a 的正方形，过下底 $ABCD$ 的对角线 AC 引与上底 $A_1B_1C_1D_1$ 相交的平面，分别以 B，D_1 为顶点的三面角的内切球与该平面相切，内切球的半径 $r=\dfrac{1}{5}a$ 及 $R=\dfrac{1}{4}a$，求长方体的高度.

3. 有一个用柔软而坚韧的材料做成的薄壁圆柱（例如一根喝汽水的吸管），其内直径为 d，试问：可以通过这个圆柱筒内部的最大正四面体的棱长是多少？

4. 我们把棱锥体的顶点处称为多面角. 试问：是否存在一个四面体和一个 n 棱锥（$n\geqslant 4$），使得该 n 棱锥中有 4 个三面角分别对应相等于四面体的 4 个三面角？