超级考生™

2007
高考必备

备战高考
二轮复习
数学

武汉市教育科学研究院
教学研究室／领衔
荆州市教育科学研究院
黄冈市教育科学研究院
孝感市教育科学研究院
咸宁市教育科学研究院
十堰市教育科学研究院
黄石市教育研究中心
宜昌市教育研究中心
荆门市教学研究室
襄樊市教学研究室
鄂州市教学研究室
随州市教学研究室
天门市教学研究室
潜江市教学研究室
仙桃市教育科学研究院
联合打造

湖北长江出版集团
湖北教育出版社

超级考生™

备战高考

二轮复习

数学

本册主编： 孔　峰

副 主 编： 常晓兵　程金辉

编　　者： 王志成 王宝庆 刘友民 朱达坤
陈炯生 严冬兵 肖作武 杨建民
陈　冬 徐　惠 常晓兵 夏晓阳

湖北长江出版集团
湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

超级考生备战高考二轮复习. 数学/孔峰等编. —武汉:湖北教育出版社.
ISBN 7-5351-4370-9

Ⅰ.超…　Ⅱ.孔…　Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 137478 号

出版　发行:湖北教育出版社　　武汉市青年路 277 号
网　　址:http://www.hbedup.com　　邮编:430015　电话:027-83619605

经　销:新　华　书　店
印　刷:孝感市三环印务有限责任公司印刷 (432100·孝感市高新技术开发区东区工业园)
开　本:880mm×1230mm　1/16　　16.5 印张
版　次:2006 年 10 月第 2 版　　2006 年 10 月第 1 次印刷
字　数:493 千字　　印数:1-10 000

ISBN 7-5351-4370-9/G·3641　　定价:24.00 元

《超级考生·备战高考丛书》编写出版委员会

前 言

高考理论研究与实践表明,高考在测试考生的一般心理能力的基础上,着重考查考生的学科知识学习与掌握情况和继续学习的潜力(即学术倾向能力)。近几年高考已向社会昭示:高考命题已顺利从知识立意转向以能力立意,更多地在知识的交汇点处命题,尽可能地体现学科教育改革的成果,更好地反映课程改革的精神和要求。近几年高考命题的改革和变化,对高中教学工作尤其是高三备考提出了新的、更高的要求和挑战。如何加强教学研究,如何创新课堂教学设计,如何开展有效的针对性训练,如何进行及时反馈诊断和监控分析,如何培养学科思维能力,如何实施以人为本的具有实效性的心理调节和疏导等,已引起教学研究部门和高中学校的高度关注和重视。

为了加强高考复习的针对性,优化高三课堂教学,切实有效培养学生的学科思维能力和综合能力,也是为了提高学习效益,降低高三复习备考成本,我们会集名校名师之研究成果和成功经验,为广大高三师生编撰此套重视学科基础、突出学科主干知识和思想方法、凸显学科能力培养的备考方略丛书。该丛书立足学科基础,强化学科思想方法学习与训练,渗透创新意识和探究能力培养,体例科学实用,立意新颖,既体现了国家考试中心各科考试大纲的考查要求,又反映了湖北地区名校名师研究的最新成果。此套丛书由武汉市教育科学研究院牵头,资深学科教研员共同策划,湖北省各城市教研机构共同参与编写,是"湖北省城市间教学资源开发与共享联合体"在高中教学领域资源开发的一次新的探索和尝试。我们希望此套丛书能切实帮助广大师生解决"高考考什么,怎样复习好,如何去备考"的问题,正确引导广大师生备战高考,决胜高考。

超级考生·备战高考丛书编委会

编 写 说 明

数学高考第二轮复习重点是知识专题和方法专题复习，重在明确高考要求，建立完善的知识体系，了解命题规律，掌握解题技巧，提高解题能力，是一个深化提高过程，是高考获取高分的关键。为了更好地帮助考生进行数学第二轮复习，湖北省、武汉市重点中学教学一线的优秀特级、高级教师和高考研究专家精心编写了本书。书中内容反映了作者近年来高考辅导的成功经验和高考命题研究的最新成果，具有把握高考脉搏准确、信息及时全面、材料新颖、方法灵活、讲解透彻、点拨到位、注重分析、注重提高的特点。全书始终以提高能力和提高成绩为指导思想，一方面，立足基础，突出重点，注重分析，即在分析解题过程中，揭示题目的本质结构、解析难点、点拨疑点、举一反三、提升能力；另一方面，明确、细化、归纳高考知识点，分析命题趋势，有的放矢，提高成绩。本书的目的就是指导和帮助考生在有限的时间内以最高的效率复习，使考生在数学能力上有较大提升，在高考成绩上有较大突破。

本书共四大板块，第一个板块是知识专题。重点突出对章节知识的灵活运用和综合运用；第二个板块是数学思想方法专题，旨在渗透数学思想，培养数学的思维品质，提升数学能力；第三个板块是知识和方法交汇处综合专题。因为近几年的高考要求，强调在知识网络和方法网络交汇处来命制综合试题，所以专门设制此板块；第四个板块是应试方略专题，让考生掌握应考方法，提升解决问题的效率，成功获取高分。

在这些板块中贯穿了下面几条主线：(1)分析高考考点尤其是考生容易出错的考点及其对策；(2)揭示高考命题中的热点、难点和趋势；(3)注重基本数学思想方法的掌握和应用，如数学归纳法、反证法、换元法、待定系数法、配方法，以及函数与方程思想、数形结合思想、等价转换思想、分类讨论的思想等；(4)提高解题技巧和灵活应变能力。

为了学生和老师便于操作，我们将各专题分如下几个栏目：

考点精析：主要分析《考试大纲》对本章节知识点在考试中的要求，归纳本章节的重点知识，总结如何掌握好这些知识的主要方法，是对本章节的全局性的把握。

范例精讲：主要选取近几年全国各省市大型调考或联考的试题，同时兼顾经典的例题，体现了实用性和针对性，每个专题中综合 8 个例题，其中前 6 个例题只给题目，由教师讲解，而最后两个例题既给出题目的解答，又给出分析或点评，这主要是便于学生的阅读和教师的灵活处理，提高考试过程中书写的规范化程度。

考题精解：以 2004 年、2005 年、2006 年各独立命题省市命制的试题以及近几年国家考试中心命制的试题为主，精选例题四个左右，均给出详细答案及点评，让学生把握近几年的高考在本章节的命题特点及其走向，更好地体会考试的细致要求。

能力精练：针对数学能力不同的学生群体的要求，我们编写了两组练习题，其中 A 组练习题是 4＋2＋2 模式，主要目的是更进一步强调数学基本功的巩固；而 B 组练习题是 2＋2＋4 模式，对学生能力的提升将起十分关键的作用，学生可以根据自己的学习特点，选择其中一组作为练习。

我们本着对广大读者认真负责的态度和精益求精的精神，密切关注高考的新动向，紧密联系教学实际，尽力将本书编写得更好。尽管我们在写作过程中是非常严谨的，而且审订时层层把关，力求更完善，但书中仍难免有疏漏之处，敬请读者批评指正，愿本书得到更多读者的喜爱和欢迎。

目 录

参考答案

第一板块
知识专题

专题1 集合与简易逻辑

考点精析

集合与简易逻辑的高考考查要求为：①集合的概念及其特点；②子集、交集、并集、补集的有关概念及运算规律；③逻辑联结词"或""且""非"的应用；④复合命题的真假判断；⑤充分必要条件的判定.

主要方法要点：

1. 正确理解集合中元素的确定性、互异性和无序性，特别注意互异性的应用.

2. 会用集合的三种语言(文字语言，符号语言，图形语言)互译表示子集、交集、并集、全集与补集；并熟练掌握集合运算的性质及一些重要结论.

3. 逻辑联结词"或""且""非"分别与集合中的并集、交集、补集的关系，由简单命题构成的复合命题的真假，要掌握以下规律：①"非 p"形式的复合命题的真假与命题"p"的真假相反；②"p 或 q"形式的复合命题只有当命题"p"与命题"q"同时为假时才为假，否则为真；③"p 且 q"形式的复合命题只有当命题"p 与 q"同时为真时才为真，否则为假.

4. 用反证法证明命题的步骤为：①反设；②归谬；③结论.

5. 若 $p\Rightarrow q$，则 p 叫做 q 的充分条件，同时 q 叫做 p 的必要条件，故充分条件与必要条件是相互的；同样若 p 是 q 的充要条件，则 q 也是 p 的充要条件，它们之间是相互的.

范例精讲

例1(2006年北京海淀区统练题)　设全集 $I=R$，集合 $M=\{x|x>0\}$，$N=\{x|x^2>x\}$，则下列关系中正确的是(　　).

A. $M\cup N\in M$　　B. $M\cup N\subseteq M$

C. $M\cup N=R$　　D. $(\complement_u M)\cap N=\varnothing$

例2(2005年荆州模拟题)　如果命题"$\neg(p$ 或 $q)$"为假命题，则(　　).

A. p、q 均为真命题

B. p、q 均为假命题

C. p、q 中至少有一个为真命题

D. p、q 中至多有一个为真命题

例3(2006年武汉市2月调考题)　若 $\varnothing\subsetneqq\{x|x^2\leqslant a, a\in\mathbf{R}\}$，则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $(0,+\infty)$　　B. $[0,+\infty)$

C. $(-\infty,0)$　　D. $(-\infty,0)$

例4(2005年湖北高考题)　设 P、Q 为两个非空实数集合，定义集合 $P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$，若 $P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数是(　　).

A. 9　　B. 8

C. 7　　D. 6

例5(2006年北师大附中模拟试题)　已知关于 x 的不等式 $\dfrac{a(x-1)}{x-2}>2$ 的解集为 A，且 $3\notin A$.

1)求实数 a 的取值范围；　2)求集合 A.

例6(2005年天津4月模拟题)　设 $f(x)=x^2+px+q$，$A=\{x|x=f(x)\}$，$B=\{x|f[f(x)]=x\}$.

1)求证 $A\subseteq B$；　2)如果 $A=\{-1,3\}$，求 B.

例 7(2005 年江苏模拟题) 已知集合 $A=\{x|x^2+6x=0\}$, $B=\{x|x^2+3(a+1)x+a^2-1=0\}$, 且 $A\cup B=A$, 求实数 a 的值.

[分析] 本题考查分类讨论的思想和综合运用知识的能力.

解 $\because A=\{x|x^2+6x=0\}=\{0,-6\}$, 由 $A\cup B=A$,

$\therefore B\subseteq A$.

1)当 $B=\varnothing$ 时, $x^2+3(a+1)x+a^2-1=0$ 中 $\Delta<0$, 解得

$$-\frac{13}{5}<a<-1.$$

2)若 $B\neq\varnothing$ 时, ①$B=A$, 由根与系数的关系, 有

$\begin{cases}-3(a+1)=-6,\\ a^2-1=0,\end{cases}$ 解得 $a=1$, 符合 $A=B$.

②若 $B\subsetneqq A$, 则 $B=\{0\}$ 或 $\{-6\}$, 则 $x^2+3(a+1)x+a^2-1=0$ 中的 $\Delta=0$ 且有相等实根 0 或 -6.

由 $\Delta=0$ 得 $a=-1$ 或 $a=-\frac{13}{5}$. 当 $a=-1$ 时, $B=\{0\}$; 当 $a=-\frac{13}{5}$ 时, $B=\{\frac{12}{5}\}$ 不合题意.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $-\frac{13}{5}<a\leqslant-1$ 或 $a=1$.

[点评] 空集是容易疏忽的地方, 做完之后还要验证.

例 8(2005 年黄冈中学考题) 已知 p: $\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant2$, q: $x^2-2x+1-m^2\leqslant0(m>0)$, 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围.

[分析] 根据已知条件先求出 $\neg p$ 和 $\neg q$, 然后由 $\neg p\Rightarrow\neg q$ 但 $\neg q\nRightarrow\neg p$, 求得 m 的范围. 本题也可用 $\neg p\Rightarrow\neg q$ 的等价命题求解.

解 由 $\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant2$, 得 $-2\leqslant x\leqslant10$, 所以

$\neg p=\{x|x>10$ 或 $x<-2\}$.

由 $x^2-2x+1-m^2\leqslant0$, 得 $1-m\leqslant x\leqslant1+m(m>0)$,

$\therefore\neg q=\{x|x>1+m$ 或 $x<1-m, m>0\}$.

又 $\because\neg p\Rightarrow\neg q$, $\neg q\nRightarrow\neg p$,

$\therefore A\subsetneqq B$, 结合数轴有 $\begin{cases}m>0,\\1+m\leqslant10,\\1-m\geqslant-2.\end{cases}$

解得 $0<m\leqslant3$.

[点评] 本题对绝对值不等式、一元二次不等式的解法有较高要求.

考题精解

例 1(2006 年辽宁高考题) 设集合 $A=\{1,2\}$, 则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是( ).

A. 1　　B. 3

C. 4　　D. 8

[分析] 本小题主要考查集合与集合的关系, 集合的运算知识.

解 $\because A=\{1,2\}$, $A\cup B=\{1,2,3\}$ 得 B 集合必定含有 3, 且 1,2 两个元素至多含有两个, 则 B 集合为 $\{3\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$, 即为 4 个.

$\therefore$ 该题选(C).

例 2(2006 年高考全国卷 Ⅰ) 设集合 $M=\{x|x^2-x<0\}$, $N=\{x||x|<2\}$, 则( ).

A. $M\cap N=\varnothing$　　B. $M\cap N=M$

C. $M\cup N=M$　　D. $M\cup N=R$

[分析] 本题考查不等式的解法及集合的运算.

解 由 $x^2-x<0$ 得 $0<x<1$, 由 $|x|<2$ 得 $-2<x<2$, 经检验, 只有 $M\cap N=M$ 成立.

故选(B).

例 3(2006 年高考全国卷) 已知集合 $M=\{x|x<3\}$, $N=\{x|\log_2x>1\}$, 则 $M\cap N=$( ).

A. $\varnothing$　　B. $\{x|0<x<3\}$

C. $\{x|1<x<3\}$　　D. $\{x|2<x<3\}$

[分析] 本题考查简单对数不等式及集合的运算.

解 由 $\log_2x>1$ 得 $x>2$, 则 $M\cap N=\{x|x<3\}\cap\{x|x>2\}=\{x|2<x<3\}$.

例 4(2006 年北京高考题) 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 都是非零向量, 则"$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$"是"$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$"的( ).

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

[分析] 本题考查向量垂直的条件和充分、必要条件的知识.

解 $\because\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 都是非零向量, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,

$\therefore\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$　$\therefore\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$

$\because\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$　$\therefore\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$

$\therefore$"$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$"是"$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$"的充分必要条件.

故此题选(C).

能力精练

A 组

一、选择题

1. (2006 年北京西城区 4 月抽样题)设全集 $U=z$, $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4,5\}$, 则 $B\cap(\complement_uA)$ 等于( ).

A. $\{0,4,5\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{4,5\}$　　D. $\{2,3\}$

2. (2006 年湖北部分重点中学联考题)已知集合 $P=\{0,b\}$, $Q=\{x|x^2-3x<0, x\in\mathbf{Z}\}$, 若 $P\cap Q\neq\varnothing$, 则 b 等于( ).

A. 1　　B. 2

C. 1 或 2　　D. 8

3. (2006 年济南高三统考题)若 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 均为非零向量, 则"$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$"是"$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$"的( ).

A. 充要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分不必要条件

D. 既不充分也不必要条件

4.(2005 年湖南高考模拟试题)设全集 $U=R, A=\{x|x^2>4\}, B=\{x|\log_x 7>\log_3 7\}$，则 $A\cap(\complement_U B)$ 是(　　).

A. $\{x|x<-2\}$　　B. $\{x|x<-2$ 或 $x\geqslant 3\}$

C. $\{x|x\geqslant 3\}$　　D. $\{x|-2\leqslant x<3\}$

二、填空题

5.(2005 年重庆高考试题)连接抛物线上任意四点组成的四边形可能是________(填写所有正确选项的序号).

①菱形　②有三条边相等的四边形　③梯形　④平行四边形　⑤有一组对边相等的四边形

6.(2005 年广州高考模拟试题)设 A、B 是两个集合，定义 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$，若 $M=\{x||x+1|\leqslant 2\}, N=\{x|x=|\sin\alpha|, \alpha\in\mathbf{R}\}$，则 $M-N=$________.

三、解答题

7.(2005 年江苏高考模拟试题)设集合 $M=\{x|x-m\leqslant 0\}, N=\{y|y=2^x-1, x\in\mathbf{R}\}$，若 $M\cap N=\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

8.(2004 年株州高考模拟试题)已知关于 x 的方程 $(1-a)x^2+(a+2)x-4=0, a\in\mathbf{R}$，求：

(1)方程有两个正根的充要条件；

(2)方程至少有一个正根的充要条件.

B 组

一、选择题

1.(2006 年苏、锡、常、镇四市高三调考题)已知集合 $M=\{(x,y)|x+y=2\}, N=\{(x,y)|x-y=4\}$，则 $M\cap N=$(　　).

A. $\{x=3, y=-1\}$　　B. $(+3,-1)$

C. $\{3,-1\}$　　D. $\{(3,-1)\}$

2.(2006 年广州综合测试卷)设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{4,5\}, B=\{3,4,5\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$(　　).

A. $\{3,4,5\}$　　B. $\{1,2,3,4,6\}$

C. $\{1,2,6\}$　　D. $\{1,2,3,5,6\}$

3.(2006 年陕西高三数学质检题)已知集合 $A\subsetneqq\{0,1,2\}$，且 A 中至少含有一个奇数，则这样的集合 A 有(　　).

A. 3 个　　B. 4 个

C. 5 个　　D. 6 个

4.(2006 年上海奉贤区模拟试题)设 p, q 均为实数，则"$q<0$"是"方程 $x^2+px+q=0$ 有一个正实根和一个负实根"的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

5.(2005 年深圳模拟试题)设 $S=\{x|x=\sqrt{3k+1}, k\in N\}, T=\{1,2,3,4\}$，则 $S\cap T=$________.

6.(2005 年广州模拟试题)设有两个命题：①关于 x 的不等式 $mx^2+1>0$ 的解集是 R；②函数 $f(x)=\log_m x$ 是减函数. 如果这两个命题中有且只有一个真命题，则实数 m 的取值范围是________.

三、解答题

7.(2005 年北京高考试题)设函数 $f(x)=\lg(2x-3)$ 的定义域为集合 M，函数 $g(x)=\sqrt{1-\frac{2}{x-1}}$ 的定义域为集合 N. 求

(1)集合 M, N；(2)集合 $M\cap N, M\cup N$.

8.(2006 年开封模拟试题)已知函数 $f(x)=4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-2\sqrt{3}\cos 2x-1$ 且给定条件 $p: \frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

(1)求 $f(x)$ 的最大值及最小值；

(2)若又给条件 $q: |f(x)-m|<2$，且 p 是 q 的充分条件，求实数 m 的取值范围.

专题 2　函数

2.1　函数的图象和性质

考点精析

函数是高中教学内容的知识主干，是高考考查的重点. 其考查要求为：①了解映射的概念，理解函数的概念；②了解函数单调性、奇偶性的概念，掌握判断一些简单函数的单调性、奇偶性的方法；③了解函数的图象，能根据函数的图象叙述函数的初等性质；④了解反函数的概念及互为反函数的函数图象间的关系，会求一些简单函数的反函数；⑤能根据条件求解函数的图象和性质.

主要方法要点：

1. 求函数定义域的方法：

(1)已知函数的解析式求其定义域，只要解析式有意义即可；

(2)求一个复合函数的定义域，只要内层函数的值域为外层函数的定义域或定义域的子域即可；

(3)若是实际问题除应考虑解析式本身有意义外，还应考虑实际问题的背景；

(4)对含有字母参数的函数，求其定义域时应对字母参数的一切允许值分类讨论.

2. 求函数值域(最值)的方法：

(1)配方法：配方法是求"二次函数类"值域的基本方法，形如 $F(x)=af^2(x)+bf(x)+c$ 类的函数的值域问题，均可使用配方法；

(2)反函数法：如果一个函数存在反函数，则其反函数的定义域就是该函数的值域；

(3)判别式法：把函数转化成关于 x 的二次方程 $F(x,y)=0$，通过方程在某实数范围(即函数的定义域)内有实数解，判别式 $\Delta\geqslant 0$，从而求得函数的值域；

(4)单调性法：确定函数在定义域上的单调性求出函数的值域；

(5)换元法：运用代数或三角换元，将所给函数转化成值域容易求解的函数；

(6)数形结合法：利用函数所表示的几何意义，借助于几何方法求出函数的值域；

(7)不等式法：利用基本不等式：$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$(a、b 为正数)求函数的值域. 用不等式求值域时，要注意条件"一正二定三相等".

3. 描绘函数图象的方法：

(1)描点法：通过列表、描点、连结三步，画出函数的图象. 有时需利用函数的性质(如奇偶性、单调性与周期性)，以便于更简捷地画出函数的图象；

(2)图象变换法：利用基本初等函数的图象，经过平移变换、伸缩变换或对称变换作一些较为复杂函数的图象；

(3)解析几何法：利用解析几何中常见的方程曲线作某些无理函数的图象.

4. 判定函数单调性的方法：

(1)定义法与图象法：利用函数单调性定义及其图象特征；

(2)利用复合函数的单调性定理及单调函数的运算；

(3)利用函数的导数判定函数的单调性.

5. 判定函数奇偶性的方法：

(1)定义法与图象法：利用函数奇偶性定义及其图象特征；

(2)利用复合函数的奇偶性定理及奇偶函数的运算.

6. 求函数 $y=f(x)$ 的反函数的步骤：

(1)从 $y=f(x)$ 中求出 x；

(2)交换 x,y 的位置；

(3)确定 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域.

范例精讲

例 1(2006 年潍坊高三统考题)　已知奇函数

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ x^2+mx & (x<0)\end{cases}.$$

(1)求实数 m 的值；

(2)若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,|a|-2]$ 上单调递增，试确定实数 a 的取值范围.

例 2　已知函数 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=\log_2\dfrac{1+x}{1-x}$.

(1)判断 $f^{-1}(x)$ 的奇偶性；

(2)求 $f(x)$ 的解析式.

例 3(2004 年北京西城区试卷)　设函数 $f(x)=\log_a(1-ax)$，其中 $0<a<1$.

(1)证明 $f(x)$ 是 $(-\infty,\dfrac{1}{a})$ 上的增函数；

(2)解不等式 $f(x)>1$.

例 4(2004 年成都试卷)　已知向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$及实数x、y，且$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(x^2-3)\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=-y\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}$. 若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$，且$|\boldsymbol{c}|\leqslant\sqrt{10}$.

(1)求y关于x的函数关系$y=f(x)$及定义域；

(2)求函数$f(x)$的单调区间.

例 5(2004 年湖北重点中学联考题)　已知函数$f(x)=x^4-4x^3+ax^2-1$在区间$[0,1]$上单调递增，在区间$[1,2]$上单调递减.

(1)求a的值；

(2)设$g(x)=bx^2-1$，若方程$f(x)=g(x)$的解集恰好有3个元素，求b的取值范围；

(3)在(2)的条件下，是否存在实数对(m,n)，使$f(x-m)+g(x-n)$为偶函数？如存在，求出m、n；如不存在，说明理由.

例 6(2004 年南昌调考题)　已知奇函数$f(x)$、偶函数$g(x)$满足$f(x)+g(x)=a^x(a>0$且$a\neq1)$.

(1)求证：$f(2x)=2f(x)\cdot g(x)$；

(2)设$f(x)$的反函数为$f^{-1}(x)$，当$a=\sqrt{2}-1$时，试比较$f^{-1}[g(x)]$与-1的大小，并证明你的结论；

(3)若$a>1$，$n\in\mathbf{N}^*$，且$n\geqslant2$，比较$f(n)$与$nf(1)$的大小，并证明你的结论.

例 7(2005 年全国高考理科卷)　已知函数$f(x)=\dfrac{4x^2-7}{2-x}$，$x\in[0,1]$.

(1)求$f(x)$的单调区间和值域；

(2)设$a\geqslant1$，函数$g(x)=x^3-3a^2x-2a$，$x\in[0,1]$，若对于任意$x_1\in[0,1]$，总存在$x_0\in[0,1]$，使得$g(x_0)=f(x_1)$成立，求a的取值范围.

[分析]　由函数$f(x)$的解析式特点：分子是x的二次函数，分母是x的一次函数，联想到双勾函数$h(x)=ax+\dfrac{b}{x}=\dfrac{ax^2+b}{x}$的模型. 所以可利用双勾函数的性质求解. 对于(2)小题，因为对于任意的$x_1\in[0,1]$，总存在$x_0\in[0,1]$，使得$g(x_0)=f(x_1)$成立，所以只需要$f(x)$的值域为$g(x)$的值域的子域即可.

解　(1)**解法 1**

$\because f(x)=\dfrac{4x^2-7}{2-x}=-[\dfrac{4(x^2-4)}{x-2}+\dfrac{9}{x-2}]$

$=-[4(x-2)+\dfrac{9}{x-2}+16]$，

设$t=x-2$，则$f(x)=\varphi(t)=-(4t+\dfrac{9}{t}+16)$.

$\because x\in[0,1]$，

$\therefore t\in[-2,-1]$，$\varphi(t)$在$(-2,-\dfrac{3}{2})$为增函数，在$(-\dfrac{3}{2},-1)$为减函数.

又$\varphi(-2)=-\dfrac{7}{2}$，$\varphi(-\dfrac{3}{2})=-4$，$\varphi(-1)=-3$.

故函数$f(x)$在$(0,\dfrac{1}{2})$内为减函数；在$(\dfrac{1}{2},1)$内为增函数.

函数$f(x)$的值域为$[-4,-3]$.

解法 2　对函数$f(x)$求导，得

$f'(x)=\dfrac{-4x^2+16x-7}{(2-x)^2}=-\dfrac{(2x-1)(2x-7)}{(2-x)^2}$.

令$f'(x)=0$，解得$x=\dfrac{1}{2}$或$x=\dfrac{7}{2}$.

当x变化时，$f'(x)$、$f(x)$的变化情况如下表：

x	0	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},1)$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{7}{2}$	↘	-4	↗	-3

所以，当$x\in(0,\dfrac{1}{2})$，$f(x)$是减函数；当$x\in(\dfrac{1}{2},1)$时，$f(x)$是增函数.

当$x\in[0,1]$时，$f(x)$的值域为$[-4,-3]$.

(2)**解法 1**　依题意只需函数$f(x)$的值域为函数$g(x)$的值域的子域即可.

设$0<x_2<x_3<1$，则

$g(x_2)-g(x_3)=(x_2^3-3a^2x_2-2a)-(x_3^3-3a^2x_3-2a)$

$=(x_2-x_3)(x_2^2+x_2x_3+x_3^2-3a^2)$

$=(x_2-x_3)[(x_2^2-a^2)+(x_2x_3-a^2)+(x_3^2-a^2)]>0.$

即　$g(x_2)>g(x_3)$.

所以,函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内为减函数.

又 $g(0)=-2a$, $g(1)=1-2a-3a^2$,

故函数 $g(x)$ 的值域为 $[1-2a-3a^2,-2a]$.

令 $\begin{cases}1-2a-3a^2\leqslant-4, & ①\\ -2a\geqslant-3, & ②\end{cases}$

解①式得 $a\geqslant1$ 或 $a\leqslant-\frac{5}{3}$;

解②式得 $a\leqslant\frac{3}{2}$.

又 $a\geqslant1$,故 a 的取值范围是 $1\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$.

解法 2　对函数 $g(x)$ 求导,得

$g'(x)=3(x^2-a^2)$.

因为 $a\geqslant1$,当 $x\in(0,1)$ 时,$g'(x)<3(1-a^2)\leqslant0$,

因此当 $x\in(0,1)$ 时,$g(x)$ 为减函数,从而 $x\in[0,1]$ 时有 $g(x)\in[g(1),g(0)]$.

又 $g(1)=1-2a-3a^2$, $g(0)=-2a$,即当 $x\in[0,1]$ 时有 $g(x)\in[1-2a-3a^2,-2a]$.

任给 $x_1\in[0,1]$, $f(x_1)\in[-4,-3]$,存在 $x_0\in[0,1]$ 使得 $g(x_0)=f(x_1)$,则

$[1-2a-3a^2,-2a]\supset[-4,-3]$.

以下同解法 1.

[分析]　本题通过函数的值域与函数的单调性之间的关系求解.对于函数的单调性讨论本题提供了两种方法,通常证明函数的单调性用定义法,判断函数的单调性用导数方法.双勾函数 $f(x)=ax+\frac{b}{x}(a>0,b>0)$ 的单调性讨论一般需要写出过程,(1)题只引用了结论.

例 8(2004 年北京朝阳区第一次统考卷)　已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数,且它的图象关于直线 $x=1$ 对称.

(1)求 $f(0)$ 的值;

(2)证明函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数;

(3)若 $f(x)=x(0<x\leqslant1)$,求 $x\in[-1,3]$ 时,函数 $f(x)$ 的解析式,求 $x\in\mathbf{R}$ 时,函数 $f(x)$ 的解析式,并画出满足条件的函数 $f(x)$ 至少一个周期的图象.

[分析]　由奇函数的定义知 $f(-x)=-f(x)$,而 $-0=0$,所以要求 $f(0)$ 的值,只需在等式中令 $x=0$ 即可.因为函数有对称中心 $(0,0)$,又有对称轴 $x=1$,故只需应用 $f(-x)=-f(x)$ 及 $f(1+x)=f(1-x)$ 条件便可证明 $f(x+4)=f(x)$.对于第(3)小题,只要借助图象便能写出函数的解析式.

解　(1)∵函数 $f(x)$ 是奇函数,

∴$f(-x)=-f(x)$.

令 $x=0$,得 $f(-0)=-f(0)$, $2f(0)=0$,

∴$f(0)=0$.

(2)证明:∵函数 $f(x)$ 是奇函数,

∴$f(-x)=-f(x)$.

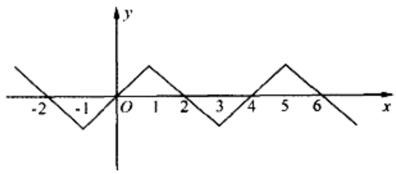
又 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称,

∴$f(2+x)=f(-x)=-f(x)$.

$f(x+4)=f[(x+2)+2]=-f(x+2)$

$=-\{-[f(x)]\}=f(x)$.

∴$f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数.



(3)∵当 $0<x\leqslant1$ 时,$f(x)=x$,

∴当 $x\in[-1,3]$ 时,$f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant1,\\ -x+2, & 1<x\leqslant3.\end{cases}$

∵函数 $f(x)$ 的周期为 4,

∴当 $x\in\mathbf{R}$ 时,

$f(x)=\begin{cases}x-4k, & 4k-1\leqslant x\leqslant4k+1,\\ -x+2+4k, & 4k+1<x\leqslant4k+3,\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$.

[点评]　正确理解函数的奇偶性、周期性是求解本题的关键.在判断函数的奇偶性时,注意 $f(-x)$ 与 $\pm f(x)$ 的关系的其他形式,如 $f(-x)\pm f(x)=0$, $\frac{f(-x)}{f(x)}=\pm1$ 等.

考 题 精 解

例 1(2005 年上海高考理科卷)　对定义域分别为 D_f、D_g 的函数 $y=f(x)$、$y=g(x)$,规定函数

$$h(x)=\begin{cases}f(x)\cdot g(x), & 当\ x\in D_f\ 且\ x\in D_g,\\ f(x), & 当\ x\in D_f\ 且\ x\notin D_g,\\ g(x), & 当\ x\notin D_f\ 且\ x\in D_g.\end{cases}$$

(1)若函数 $f(x)=\frac{1}{x-1}$, $g(x)=x^2$,写出 $h(x)$ 的解析式;

(2)求问题(1)中函数 $h(x)$ 的值域;

(3)若 $g(x)=f(x+\alpha)$,其中 α 是常数,且 $\alpha\in[0,\pi]$,请设计一个定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=f(x)$,及一个 α 的值,使得 $h(x)=\cos4x$,并予以证明.

解　(1)$h(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{x-1}, & x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty),\\ 1, & x=1.\end{cases}$

(2)当 $x\neq1$ 时,$h(x)=\frac{x^2}{x-1}=(x-1)+\frac{1}{x-1}+2$,

若 $x>1$,则 $h(x)\geqslant4$,其中等号当 $x=2$ 时成立,

若 $x<1$,则 $h(x)\leqslant0$,其中等号当 $x=0$ 时成立,

∴函数 $h(x)$ 的值域是 $(-\infty,0]\cup\{1\}\cup[4,+\infty)$

(3)**解法 1**　令 $f(x)=\sin2x+\cos2x$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$,

则 $g(x)=f(x+\alpha)=\sin2(x+\frac{\pi}{4})+\cos2(x+\frac{\pi}{4})$

$=\cos2x-\sin2x$.

于是 $h(x)=f(x)\cdot f(x+\alpha)=(\sin2x+\cos2x)(\cos2x-\sin2x)=\cos4x$.

解法 2　令 $f(x)=1+\sqrt{2}\sin2x$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$,

则 $g(x)=f(x+\alpha)=1+\sqrt{2}\sin2(x+\frac{\pi}{2})$

$=1-\sqrt{2}\sin 2x$,

于是 $h(x)=f(x)\cdot f(x+\alpha)$

$=(1+\sqrt{2}\sin 2x)(1-\sqrt{2}\sin 2x)$

$=1-2\sin^2 2x=\cos 4x$.

[点评] 解(1)题的关键在于正确理解函数 $h(x)$ 的定义，即确定函数 $h(x)$ 的法则；求(2)中函数 $h(x)$ 的值域既可利用双勾函数的性质，也可应用均值不等式或者导数；(3)题主要考查三角函数的倍角公式，将 $h(x)$ 变形，即 $h(x)=\cos 4x=\cos^2 2x-\sin^2 2x=(\cos 2x+\sin 2x)(\cos 2x-\sin 2x)$ 或 $h(x)=\cos 4x=1-2\sin^2 2x=(1+\sqrt{2}\sin 2x)(1-\sqrt{2}\sin 2x)$ 就可以得到上面的两种解法. 读者不妨将 $h(x)$ 变形为 $h(x)=\cos 4x=\sin(\frac{\pi}{2}-4x)=2\sin(\frac{\pi}{4}-2x)\cos(\frac{\pi}{4}-2x)$ 尝试一下.

例 2(2005 年江西高考卷) 已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{ax+b}$(a、b 为常数)，且方程 $f(x)-x+12=0$ 有两个实根为 $x_1=3$，$x_2=4$.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)设 $k>1$，解关于 x 的不等式：$f(x)<\frac{(k+1)x-k}{2-x}$.

解 (1)将 $x_1=3$，$x_2=4$ 分别代入方程 $\frac{x^2}{ax+b}-x+12=0$ 得

$$\begin{cases}\frac{9}{3a+b}=-9,\\ \frac{16}{4a+b}=-8,\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=-1,\\ b=2,\end{cases}$$

所以 $f(x)=\frac{x^2}{2-x}(x\neq 2)$.

(2)不等式即为 $\frac{x^2}{2-x}<\frac{(k+1)x-k}{2-x}$，此不等式可化为

$\frac{(x-1)(x-k)}{2-x}<0$，即

$(x-1)(x-2)(x-k)>0$.

①当 $1<k<2$ 时，解集为 $(1,k)\cup(2,+\infty)$；

②当 $k=2$ 时，不等式为 $(x-2)^2(x-1)>0$，解集为 $(1,2)\cup(2,+\infty)$；

③当 $k>2$ 时，解集为 $(1,2)\cup(k,+\infty)$.

故当 $1<k<2$ 时，不等式的解集为 $(1,k)\cup(2,+\infty)$；

当 $k\geqslant 2$ 时，不等式的解集为 $(1,2)\cup(k,+\infty)$.

[点评] 如果知道一个函数的类型，则求此函数的解析式通常用待定系数法；对含字母参数的问题，要注意对参数的取值情况进行讨论.

例 3(2006 年重庆高考试题) 已知函数 $f(x)=(x^2+bx+c)e^x$，其中 $b,c\in\mathbf{R}$ 为常数.

(1)若 $b^2>4(c-1)$，讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $b^2\leqslant 4(c-1)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-c}{x}=4$，试证：$-6\leqslant b\leqslant 2$.

[分析] 本题主要考查函数求导法和利用导数求函数的单调区间，同时考查函数的导数，函数极限，不等式综合应用的能力. 先求 $f'(x)$，并求 $f'(x)=0$ 的根，利用 $b^2>4(c-1)$ 的条件解不等式 $f'(x)>0$ 和 $f'(x)<0$. 求出单调区间；将 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-c}{x}$ 转化为 $f'(0)$，得到关于 b 与 c 的等式，再由所给不等式得到关于 b 的不等式求解.

解 (1)求导得 $f'(x)=[x^2+(b+2)x+b+c]e^x$.

因 $b^2>4(c-1)$，故方程 $f'(x)=0$ 即 $x^2+(b+2)x+b+c=0$ 有两根：

$x_1=-\frac{b+2}{2}-\frac{\sqrt{b^2-4(c-1)}}{2}$

$x_2=\frac{b+2}{2}+\frac{\sqrt{b^2-4(c-1)}}{2}$. 且 $x_1<x_2$

令 $f'(x)>0$，解得 $x<x_1$ 或 $x>x_2$；

又令 $f'(x)<0$，解得 $x_1<x<x_2$.

故当 $x\in(-\infty,x_1)$ 时，$f(x)$ 是增函数；

当 $x\in(x_2+\infty)$ 时，$f(x)$ 也是增函数；但当 $x\in[x_1,x_2]$ 时，$f(x)$ 是减函数.

(2)易知 $f(0)=c$，$f'(0)=b+c$. 因此

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-c}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=b+c$.

$\therefore$ 由已知条件得 $\begin{cases}b+c=4,\\ b^2\leqslant 4(c-1),\end{cases}$

因此 $b^2+4b-12\leqslant 0$. 解得 $-6\leqslant b\leqslant 2$.

例 4(2006 年安徽高考试题) 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义，对任意实数 $a>0$ 和任意实数 x，都有 $f(ax)=af(x)$.

(1)证明 $f(0)=0$；

(2)证明 $f(x)=\begin{cases}kx, x\geqslant 0\\ hx, x<0\end{cases}$，其中 k 和 h 均为常数；

(3)当(2)中 $k>0$，设 $g(x)=\frac{1}{f(x)}+f(x)(x>0)$，讨论 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的单调性并求极值.

[分析] (1)利用赋值法，令 $a=2$，$x=0$，可得出 $f(0)=0$.

(2)利用已知条件 $f(ax)=af(x)$.

证明：$f(x)=f(x\cdot 1)=xf(1)$

$f(-x)=f[(-x)\cdot(1)]=(-x)f(1)$

$=-f(1)\cdot x$

令 $k=f(1)$，$h=-f(1)$. 从而证明：$f(x)=\begin{cases}kx, x\geqslant 0\\ hx, x<0\end{cases}$.

(3)方法 1：利用导数求单调区间.

方法 2：利用单调性定义证明单调性，求单调区间和极值. 本题利用导数做更好一点.

解 (1)证明：对于任意的 $a>0$，$x\in\mathbf{R}$，均有

$$f(ax)=af(x).\qquad ①$$

在①中取 $a=2$，$x=0$，即得 $f(0)=2f(0)$.

$$f(0)=0.\qquad ②$$

(2)证明：当 $x>0$ 时，由①得

$$f(x)=f(x\cdot 1)=xf(1)$$

取 $k=f(1)$，则有

$$f(x)=kx;\qquad ③$$

当 $x<0$ 时，由①得

$$f(x)=f[(-x)\cdot(-1)]=-f(-1)\cdot x$$

取 $h=-f(-1)$，则有

$$f(x)=hx. \quad ④$$

综合②、③、④得

$$f(x)=\begin{cases}kx, x\geqslant 0,\\ hx, x<0.\end{cases}$$

(3)解法 1 由(2)中的③知，当 $x>0$ 时，$g(x)=\frac{1}{kx}+kx$.

从而 $g'(x)=-\frac{1}{kx^2}+k=\frac{k^2x^2-1}{kx^2}, x>0$.

又因为 $k>0$，由此可得

x	$\left(0,\frac{1}{k}\right)$	$\frac{1}{k}$	$\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值 2	↗

所以 $g(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{k}\right)$ 内单调递减，在区间 $\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$ 内单调递增，在 $x=\frac{1}{k}$ 处取得极小值 2.

解法 2 由(2)中的③知，当 $x>0$ 时，$g(x)=\frac{1}{kx}+kx$.

设 $x_1, x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$g(x_2)-g(x_1)=\frac{1}{kx_2}+kx_2-\left(\frac{1}{kx_1}+kx_1\right)=$

$\frac{1}{k}\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}+k(x_2-x_1)=\frac{(x_2-x_1)}{kx_1x_2}(k^2x_1x_2-1)$.

又因为 $k>0$，所以

(1)当 $0<x_1<x_2<\frac{1}{k}$ 时，$g(x_2)<g(x_1)$；

(2)当 $0<\frac{1}{k}<x_1<x_2$ 时，$g(x_2)>g(x_1)$.

所以 $g(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{k}\right)$ 内单调递减，在区间 $\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$ 内单调递增，在 $x=\frac{1}{k}$ 处取得极小值 2.

[点评] 本小题主要考查函数的概念、导数运用、函数的单调区间和极值等知识，考查运用数学知识解决问题及推理的能力.

例 5(2005 年北京高考理科卷) 设 $f(x)$是定义在$[0,1]$上的函数，若存在 $x^*\in(0,1)$，使得 $f(x)$在$[0,x^*]$上单调递增，在$[x^*,1]$上单调递减，则称 $f(x)$为$[0,1]$上的单峰函数，x^*为峰点，包含峰点的区间为含峰区间.

对任意的$[0,1]$上的单峰函数 $f(x)$，下面研究缩短其含峰区间长度的方法.

(1)证明：对任意的 x_1、$x_2\in(0,1)$，$x_1<x_2$，若 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则$(0,x_2)$为含峰区间；若 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则$(x_1,1)$为含峰区间；

(2)对给定的 $r(0<r<0.5)$，证明：存在 $x_1, x_2\in(0,1)$，满足 $x_2-x_1\geqslant 2r$，使得由(1)所确定的含峰区间的长度不大于 $0.5+r$；

(3)选取 x_1、$x_2\in(0,1)$，$x_1<x_2$，由(1)可确定含峰区间为$(0,x_2)$或$(x_1,1)$，在所得的含峰区间内选取 x_3，由 x_3 与 x_1 或 x_3 与 x_2 类似地可确定一个新的含峰区间. 在第一次确定的含峰区间为$(0,x_2)$的情况下，试确定 x_1、x_2、x_3 的值，满足两两之差的绝对值不小于 0.02，且使得新的含峰区间的长度缩短到 0.34(区间长度等于区间的右端点与左端点之差).

证明 (1)设 x^* 为 $f(x)$的峰点，则由单峰函数定义可知，$f(x)$在$[0,x^*]$上单调递增，在$[x^*,1]$上单调递减.

当 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$时，假设 $x^*\notin(0,x_2)$，则 $x_1<x_2\leqslant x^*$，从而 $f(x^*)\geqslant f(x_2)>f(x_1)$，这与 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$矛盾，所以 $x^*\in(0,x_2)$，即$(0,x_2)$是含峰区间.

当 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$时，假设 $x^*\notin(x_1,1)$，则 $x^*\leqslant x_1<x_2$，从而 $f(x^*)\geqslant f(x_1)>f(x_2)$，这与 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$矛盾，所以 $x^*\in(x_1,1)$，即$(x_1,1)$是含峰区间.

(2)由(1)的结论可知：

当 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$时，含峰区间的长度为 $l_1=x_2$；

当 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$时，含峰区间的长度为 $l_2=1-x_1$.

对于上述两种情况，由题意得

$$\begin{cases}x_2\leqslant 0.5+r,\\ 1-x_1\leqslant 0.5+r.\end{cases} \quad ①$$

由①得 $1+x_2-x_1\leqslant 1+2r$，即 $x_2-x_1\leqslant 2r$.

又因为 $x_2-x_1\geqslant 2r$，所以

$$x_2-x_1=2r. \quad ②$$

将②代入①得

$$x_1\leqslant 0.5-r, x_2\geqslant 0.5+r. \quad ③$$

由①和③解得 $x_1=0.5-r, x_2=0.5+r$.

所以这时含峰区间的长度 $l_1<l_2=0.5+r$，即存在 x_1、x_2 使得所确定的含峰区间的长度不大于 $0.5+r$.

(3)对先选择的 x_1、x_2，$x_1<x_2$，由(2)可知

$$x_1+x_2=1. \quad ④$$

在第一次确定的含峰区间为$(0,x_2)$的情况下，x_3 的取值应满足 $x_3+x_1=x_2$. ⑤

由④与⑤可得 $\begin{cases}x_2=1-x_1,\\ x_3=1-2x_1.\end{cases}$

当 $x_1>x_3$ 时，含峰区间的长度为 x_1.

由条件 $x_1-x_3\geqslant 0.02$ 得 $x_1-(1-2x_1)\geqslant 0.02$，

从而 $x_1\geqslant 0.34$.

因此，为了将含峰区间的长度缩短到 0.34，只要取 $x_1=0.34, x_2=0.66, x_3=0.32$.

[点评] 对于新的数学定义、法则的深刻理解是解本题的关键，而深刻理解此题中新的数学定义、法则的方法是数形结合方法.

能力精练

A 组

1.(2006 年全国高考卷Ⅱ)函数 $y=f(x)$的图象与函数 $g(x)=\log_2 x(x>0)$的图象关于原点对称，则 $f(x)$的表达式为(　　).

A. $f(x)=\frac{1}{\log_2 x}(x>0)$　　B. $f(x)=\frac{1}{\log_2(-x)}(x<0)$

C. $f(x)=-\log_2 x(x>0)$　D. $f(x)=-\log_2(-x)(x<0)$

2.(2005年北京高考文科卷)为了得到函数 $y=2^{x-3}-1$ 的图象,只需把函数 $y=2^x$ 的图象上所有的点(　　).

A.向右平移3个单位长度,再向下平移1个单位长度

B.向左平移3个单位长度,再向下平移1个单位长度

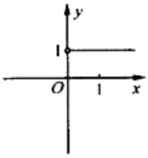
C.向右平移3个单位长度,再向上平移1个单位长度

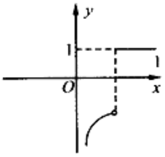
D.向左平移3个单位长度,再向上平移1个单位长度

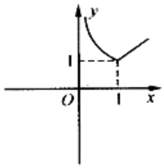
3.(2006年山东高考理科试题)已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$,则 $f(6)$ 的值为(　　).

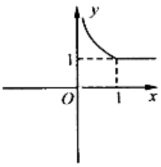
A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

4.(2005年湖北高考文理卷)函数 $y=e^{|\ln x|}-|x-1|$ 的图象大致是(　　).


A


B


C


D

5.(2005年湖北高考文科卷)函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x-3}\lg\sqrt{4-x}$ 的定义域是__________.

6.(2005年湖南高考文理卷)设函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,2)$ 对称,且存在反函数 $f^{-1}(x)$,$f(4)=0$,则 $f^{-1}(4)=$__________.

7.(2004年辽宁实验中学模拟卷)已知函数 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})(a>0,a\neq1)$ 的反函数为 $f(x)$.

(1)求 $f(x)$ 的解析式并判断 $f(x)$ 的奇偶性;

(2)若 $f(x)<f(1)$,求满足条件的 x 的范围.

8.已知函数 $f(x)=\frac{ax^2+1}{bx+c}(a,b,c\in\mathbf{R})$ 是奇函数,$2f(1)=2$,$f(2)=3$.

(1)求 a,b,c 的值;

(2)当 $x>0$ 时,讨论函数 $f(x)$ 的单调性,并写出证明过程.

B组

1.(2006年安徽高考试题)函数 $y=\begin{cases}2x, & x\geqslant0\\ -x^2, & x<0\end{cases}$ 的反函数是(　　).

A. $y=\begin{cases}\frac{x}{2}, & x\geqslant0\\ \sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$　　B. $y=\begin{cases}2x, & x\geqslant0\\ \sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$

C. $y=\begin{cases}\frac{x}{2}, & x\geqslant0\\ -\sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$　　D. $y=\begin{cases}2x, & x\geqslant0\\ -\sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$

2.(2006年北京高考试题)已知 $f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a, & x<1\\ \log_a x, & x\geqslant1\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的减函数,那么 a 的取值范围是(　　).

A. $(0,1)$　　B. $(0,\frac{1}{3})$

C. $[\frac{1}{7},\frac{1}{3})$　　D. $[\frac{1}{7},1)$

3.(2006年辽宁高考试题)设 $g(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant0\\ \ln x, & x>0\end{cases}$,则 $g(g(\frac{1}{2}))=$________.

4.(2006年江西高考试题)设 $f(x)=\log_3(x+6)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$,若 $[f^{-1}(m)+6]\cdot[f^{-1}(n)+6]=27$,则 $f(m+n)=$________.

5.(2005年黄冈模拟试题)已知函数 $f(x)=2^x$,$g(x)=\frac{x-2}{x+1}$.

(1)证明:函数 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数;

(2)用反证法证明方程 $f(x)+g(x)=0$ 没有负数根.

6.(2002年上海春季招生卷)对于函数 $f(x)$,若存在 $x_0\in\mathbf{R}$,使 $f(x_0)=x_0$ 成立,则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点,已知函数 $f(x)=ax^2+(b+1)x+(b-1)(a\neq0)$.

(1)当 $a=1,b=-2$ 时,求函数 $f(x)$ 的不动点;

(2)对于任意实数 b,函数 $f(x)$ 恒有两个相异的不动点,求 a 的取值范围;

(3)在(2)的条件下,若 $y=f(x)$ 的图象上 A、B 两点的横坐标是函数 $f(x)$ 的不动点,且 A、B 两点关于直线 $y=kx+\frac{1}{2a^2+1}$ 对称,求 b 的最小值.

7.(2005年上海高考文科卷)对定义域分别是 D_f、D_g 的函数 $y=f(x)$、$y=g(x)$,规定:

函数 $h(x)=\begin{cases}f(x)\cdot g(x) & 当\ x\in D_f\ 且\ x\in D_g\\ f(x) & 当\ x\in D_f\ 且\ x\notin D_g\\ g(x) & 当\ x\notin D_f\ 且\ x\in D_g\end{cases}$.

(1)若函数 $f(x)=2x+3,x\geqslant1$;$g(x)=x-2,x\in\mathbf{R}$,写出函数 $h(x)$ 的解析式;

(2)求问题(1)中函数 $h(x)$ 的最大值;

(3)若 $g(x)=f(x+\alpha)$,其中 α 是常数,且 $\alpha\in[0,\pi]$,请设计一个定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=f(x)$,及一个 α 的值,使得 $h(x)=\cos2x$,并予以证明.

8.已知函数 $f(x)=x^2-1(x\geqslant1)$ 的图象为 c_1,曲线 c_2 与 c_1 关于直线 $y=x$ 对称.

(1)求曲线 c_2 的方程 $y=g(x)$;

(2)设函数 $y=g(x)$ 的定义域为 M,$x_1,x_2\in M$ 且 $x_1\neq x_2$,求证:$|g(x_1)-g(x_2)|<|x_1-x_2|$;

(3)设 A、B 为曲线 c_2 上任意不同两点,证明直线 AB 与直线 $y=x$ 必相交.