21世纪数学系列教材

数值分析

（第4版）

获教育部高等学校优秀教材二等奖

获全国优秀畅销书奖

李庆扬 王能超 易大义 编

华中科技大学出版社

http:// www.hustp.com

- 强调基本原理、基本理论，夯实基本素质
- 注重基本方法和技巧，提高应用能力
- 阐述严谨，脉络分明，深入浅出
- 反复锤炼，长销20余年

21 世纪数学系列教材

数值分析

（第 4 版）

李庆扬　王能超　易大义　编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数值分析(第 4 版)/李庆扬　王能超　易大义　编
武汉:华中科技大学出版社,2006 年 7 月
ISBN 7-5609-3742-X

Ⅰ.数…
Ⅱ.①李…　②王…　③易
Ⅲ.数值分析
Ⅳ.O241

数值分析(第 4 版)　　李庆扬　王能超　易大义　编

责任编辑:徐正达　李立鹏　　封面设计:刘　卉
责任校对:朱　霞　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉佳年华科技有限公司
印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:787×960　1/16　印张:16.25　字数:290 000
版次:2006 年 7 月第 4 版　印次:2006 年 7 月第 37 次印刷　定价:21.50 元
ISBN 7-5609-3742-X/O・391

内 容 提 要

本书是为理工科院校各专业普遍开设的“数值分析”课程编写的教材. 其内容包括插值与逼近、数值积分与数值微分、常微分方程与线性方程组的数值解法、矩阵的特征值与特征向量计算等. 每章附有习题并在书末有部分答案. 全书阐述严谨,脉络分明,深入浅出,便于教学.

本书可作为理工科院校应用数学、力学、物理、计算机等专业的教材,也可供从事科学计算的科技工作者参考.

前　言

1980 年 7 月在大连召开的工科院校“应用数学专业教学学术会议”，根据教育部直属工科院校“应用数学专业教学计划”制定了“数值分析”课大纲，并决定由清华大学、华中工学院、浙江大学合编试用教材. 本书就是根据这次会议的决定编写的. 全书共分 9 章，第 1～3 章由李庆扬编写，第 4～6 章由王能超编写，第 7～9 章由易大义编写. 教材初稿于 1980 年 12 月投交华中工学院出版社.

1981 年元月在杭州召开的工科院校计算数学第一次教材审稿会，对本书初稿进行了审查，1982 年元月在上海交通大学召开的第二次计算数学教材审稿会，又对本书第 1 版提出了修改意见. 会议考虑到理工科院校各专业普遍开设“数值分析”课的情况，重新修订了大纲(72 学时). 本书第 2 版就是根据新大纲的要求修改的，它保持了 第 1 版的主要内容及特点，但选材更注意基本要求，减少了部分内容，增加了部分习题答案. 本书可作为理工科院校应用数学、力学、物理、计算机软件等专业大学生及其他专业研究生“数值分析”(或“计算方法”)课的教材，也可供学习“计算方法”的科技工作者参考.

我们对参加两次审稿会的同志表示衷心感谢，他们以认真负责的态度对本书提出了许多宝贵意见，对提高教材质量起了很大作用.

编　者

1982 年 7 月

第 4 版说明

本书第 4 版是应新时期数值分析理论和实践发展的需要在第 3 版基础上修订而成的. 在保留本书原有风格和基本内容的前提下,修订主要集中在如下三个方面:

(1) 精简了一些内容,删减了一些目前很少使用的算法,如求解特征值与特征向量的 Jacobi 方法;

(2) 用新鲜的词汇代替了原版中一些过时的说法,并对版式记号重新进行了统一,使之更符合读者的阅读习惯;

(3) 修正了原版中残存的某些印刷上的疏漏和错误,消除了一些前后文字符号不协调的现象.

经过修订,新版的质量相信会有显著的提高. 在重版期间,华中科技大学出版社的同志们提出了许多宝贵意见,鲁建华、鲁晓磊两位同志参与修订工作,付出了辛勤劳动,在此特向他们表示感谢.

编　者

2006 年 3 月

第3版说明

本书自1981年问世以来，为许多工科院校所采用，已先后出过两版，总发行量达四万余册. 1985年5月召开的工科院校计算数学教材评议会(南北会议)确认本书“基本符合应用数学专业的要求，可作为数值分析课程的教材，建议作者加以修改后重新出版”. 我们遵照这次会议的建议和要求再次进行了修订. 新书在出版质量上有了显著的提高. 编者诚挚地感谢华中工学院出版社的同志们为本书的重版付出了辛勤的劳动.

编　者

1986年12月

目　录

第1章　绪　　论

1.1　数值分析研究的对象与特点

数值分析是研究各种数学问题求解的数值计算方法. 在电子计算机成为数值计算的主要工具以后,人们迫切要求研究适合于计算机使用的数值计算方法. 为了更具体地说明数值分析的研究对象,我们来考察用计算机解决科学计算问题时所经历的过程(见图1.1).

$$\boxed{\text{实际问题}} \to \boxed{\text{数学模型}} \to \boxed{\text{数值计算方法}} \to \boxed{\text{程序设计}} \to \boxed{\text{上机计算求得结果}}$$

图1.1

由实际问题的提出到上机计算求得结果,整个过程都可看做应用数学的研究对象. 如果细分的话,针对实际问题应用有关科学知识和数学理论建立数学模型这一过程,通常作为应用数学的研究对象,而根据数学模型提出求解的数值计算方法直到编出程序上机算出结果这一过程,则是计算数学的研究对象,也是数值分析的研究对象. 因此,数值分析就是研究用计算机解决数学问题的数值方法及其理论,它的内容包括函数的数值逼近、数值微分与数值积分、非线性方程数值解、数值线性代数、微分方程数值解等,它们都是以数学问题为研究对象的. 因此,数值分析是数学的一个分支,只是它不像纯数学那样只研究数学本身的理论,而是把理论与计算紧密结合起来,着重研究数学问题的数值方法及其理论.

数值分析也称为计算方法,但不应片面地将它理解为各种数值方法的简单罗列和堆积. 同数学分析一样,它内容丰富,研究方法深刻,有自身理论体系的课程,既有纯数学的高度抽象性与严密科学性的特点,又有应用的广泛性与实际试验的高度技术性的特点,是一门与计算机使用密切结合的、实用性很强的数学课程. 它与纯数学课程不同,例如,在考虑线性方程组数值解时,“线性代数”中只介绍解存在的唯一性及有关理论和精确解法,运用这些理论和方法,无法在计算机上求解上百个未知数的方程组,更不用说求解十几万个未知数的方程组了. 求解这类问题还应根据方程特点,研究适合计算机使用的、满足精度要求的、计算省时间的有效算法及其相关的理论;在实现这些算法时往往还要根据计算机容量、字长、速度等指标,研究具体求解步骤和程序设计技巧;有的方法在理论上虽不够严格,但通过实际计算、对比分析等手

段,只要能证明它们是行之有效的方法,也应采用.这些就是数值分析具有的特点,概括起来有四点.

第一,面向计算机,要根据计算机特点提供实际可行的有效算法,即算法只能包括加、减、乘、除运算和逻辑运算,它们都是计算机能直接处理的.

第二,有可靠的理论分析,能任意逼近并达到精度要求,对近似算法要保证收敛性和数值稳定性,还要对误差进行分析.这些都要建立在相应数学理论的基础上.

第三,有好的计算复杂性.时间复杂性好是指节省时间,空间复杂性好是指节省存储量,这也是建立算法要研究的问题,它关系到算法能否在计算机上实现.

第四,有数值实验.任何一个算法,除了从理论上要满足上述三点外,还要通过数值实验证明它是行之有效的.

根据"数值分析"的特点,学习时首先要注意掌握方法的基本原理和思想,要注意方法处理的技巧及其与计算机的结合,要重视误差分析、收敛性及稳定性的基本理论;其次,要通过例子,学习使用各种数值方法解决实际计算问题;最后,为了掌握本课的内容,还应做一定数量的理论分析与计算练习.由于本课内容包括了微积分、代数、常微分方程的数值方法,读者必须掌握这几门课的基本内容才能学好这一课程.

1.2 误差来源与误差分析的重要性

用计算机解决科学计算问题首先要建立数学模型,它是对被描述的实际问题进行抽象、简化而得到的,因而是近似的.我们把数学模型与实际问题之间出现的这种误差称为**模型误差**.只有实际问题提法正确,建立数学模型时又抽象、简化得合理,才能得到好的结果.由于这种误差难以用数量表示,通常都假定数学模型是合理的,这种误差可忽略不计,在"数值分析"中不予讨论.在数学模型中往往还有一些根据观测得到的物理量,如温度、长度、电压等,这些参量显然也包含误差.这种由观测产生的误差称为**观测误差**,在"数值分析"中也不讨论这种误差.数值分析只研究用数值方法求解数学模型产生的误差.

当数学模型不能得到精确解时,通常要用数值方法求它的近似解,其近似解与精确解之间的误差称为**截断误差**或**方法误差**.例如,当函数 $f(x)$ 用 Taylor 多项式

$$P_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

近似代替时,数值方法的截断误差是

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},\quad \xi\text{ 在 }x\text{ 与 }0\text{ 之间}.$$

有了求解数学问题的计算公式以后,用计算机进行数值计算时,由于计算机的字

长有限,原始数据在计算机上表示会产生误差,计算过程又可能产生新的误差,这种误差称为**舍入误差**,例如,用3.141 59近似代替π,产生的误差

$$R=\pi-3.141\,59=0.000\,002\,6\cdots$$

就是舍入误差.

在"数值分析"中除了研究数学问题的算法外,还要研究计算结果的误差是否满足精度要求,这就是误差估计问题.本书主要讨论算法的截断误差与舍入误差,对舍入误差通常只作一些定性分析.下面举例说明误差分析的重要性.

例1.1 计算$I_n=\mathrm{e}^{-1}\int_0^1 x^n\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\ (n=0,1,\cdots)$并估计误差.

由分部积分可得计算I_n的递推公式

$$I_n=1-nI_{n-1}\quad(n=1,2,\cdots),\tag{1.2.1}$$

$$I_0=\mathrm{e}^{-1}\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-1}.$$

若计算出I_0,代入式(1.2.1),可逐次求出$I_1,I_2,\cdots$的值.要算出I_0就要先计算e^{-1},若用Taylor多项式展开部分和

$$\mathrm{e}^{-1}\approx 1+(-1)+\frac{(-1)^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^k}{k!},$$

并取$k=7$,用四位小数计算,则得$\mathrm{e}^{-1}\approx0.367\,9$,截断误差

$$R_7=|\mathrm{e}^{-1}-0.367\,9|\leqslant\frac{1}{8!}<\frac{1}{4}\times10^{-4}.$$

计算过程中小数点后第五位的数字按四舍五入原则舍入,由此产生的舍入误差这里先不讨论.当初值取为$I_0\approx0.632\,1=\tilde{I}_0$时,用式(1.2.1)递推的计算公式为

方案(A) $$\begin{cases}\tilde{I}_0=0.632\,1,\\ \tilde{I}_n=1-n\tilde{I}_{n-1}\quad(n=1,2,\cdots),\end{cases}$$

计算结果如表1.1的$\tilde{I}_n$列所示.用$\tilde{I}_0$近似I_0产生的误差$E_0=I_0-\tilde{I}_0$就是初值误差,它对后面计算结果是有影响的.

表1.1

n	$\tilde{I}_n$(用方案(A)计算)	I_n^*(用方案(B)计算)	n	$\tilde{I}_n$(用方案(A)计算)	I_n^*(用方案(B)计算)
0	0.632 1	0.632 1	5	0.148 0	0.145 5
1	0.367 9	0.367 9	6	0.112 0	0.126 8
2	0.264 2	0.264 3	7	0.216 0	0.112 1
3	0.207 4	0.207 3	8	−0.728	0.103 5
4	0.170 4	0.170 8	9	7.552	0.068 4

从表1.1可以看到,$\tilde{I}_8$出现负值,这与一切$I_n>0$相矛盾.实际上,由积分估值得

$$\frac{e^{-1}}{n+1}=e^{-1}\left(\min_{0\leqslant x\leqslant 1}e^x\right)\int_0^1 x^n dx<I_n<e^{-1}\left(\max_{0\leqslant x\leqslant 1}e^x\right)\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}. \qquad (1.2.2)$$

因此,当n较大时,用$\tilde{I}_n$近似I_n显然是不正确的.这里,计算公式与每步计算都是正确的,那么,什么原因使计算结果错误呢?主要就是初值$\tilde{I}_0$有误差$E_0=I_0-\tilde{I}_0$,由此引起以后各步计算的误差$E_n=I_n-\tilde{I}_n$满足关系$E_n=-nE_{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$.容易推得

$$E_n=(-1)^n n!E_0,$$

这说明$\tilde{I}_0$有误差E_0,则$\tilde{I}_n$就是E_0的$n!$倍误差.例如,$n=8$,若$|E_0|=\frac{1}{2}\times 10^{-4}$,则$|E_8|=8!\times|E_0|>2$.这就说明$\tilde{I}_8$完全不能近似$I_8$了.

我们现在换一种计算方案.由式(1.2.2)取$n=9$,得

$$\frac{e^{-1}}{10}<I_9<\frac{1}{10},$$

粗略取
$$I_9\approx\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}+\frac{e^{-1}}{10}\right)=0.068\,4=I_9^*,$$

然后将式(1.2.1)倒过来算,即由I_9^*算出$I_8^*,I_7^*,\cdots,I_1^*$,公式为

方案(B)
$$\begin{cases} I_9^*=0.068\,4, \\ I_{n-1}^*=\dfrac{1}{n}(1-I_n^*) \quad (n=9,8,\cdots,1). \end{cases}$$

计算结果如表1.1的I_n^*列所示.可以发现,I_0^*与I_0的误差不超过10^{-4}.由于$|E_0^*|=\frac{1}{n!}|E_n^*|$,$E_0^*$比$E_n^*$缩小了$n!$倍,因此,尽管$E_9^*$较大,但由于误差逐步缩小,故可用$I_n^*$近似$I_n$.反之,当用方案(A)计算时,尽管初值$\tilde{I}_0$相当准确,但由于误差传播是逐步扩大的,因而计算结果不可靠.此例说明,在数值计算中如不注意误差分析,用了类似于方案(A)的计算公式,就会出现"差之毫厘,失之千里"的错误结果.尽管数值计算中估计误差比较困难,但仍应重视计算过程中的误差分析.

1.3 误差的基本概念

1.3.1 误差与误差限

定义 1.1 设x为准确值,x^*为x的一个近似值,称$e^*=x^*-x$为近似值的绝对误差,简称误差.

注意,这样定义的误差e^*可正可负,当绝对误差为正时近似值偏大,叫做**强近似值**;当绝对误差为负时近似值偏小,叫做**弱近似值**.

通常，我们不能算出准确值 x，也不能算出误差 e^* 的准确值，只能根据测量工具或计算情况估计出误差的绝对值不超过某正数 ε^*，也就是误差绝对值的一个上界. ε^* 叫做近似值的**误差限**，它总是正数. 例如，用毫米刻度的米尺测量一长度 x（单位：mm，下同），读出和该长度接近的刻度 x^*，x^* 是 x 的近似值，它的误差限是 0.5，于是 $|x^*-x|\leqslant 0.5$；如读出的长度为765，则有 $|765-x|\leqslant 0.5$. 从这不等式仍不知道准确的 x 是多少，但知道 $764.5\leqslant x\leqslant 765.5$，说明 x 在区间[764.5,765.5]上.

对于一般情形，$|x^*-x|\leqslant\varepsilon^*$，即 $x^*-\varepsilon^*\leqslant x\leqslant x^*+\varepsilon^*$，这个不等式有时也表示为

$$x=x^*\pm\varepsilon^*.$$

1.3.2 相对误差与相对误差限

误差限的大小还不能完全表示近似值的好坏. 例如，有两个量 $x=10\pm 1$，$y=1\,000\pm 5$，则

$$x^*=10,\quad \varepsilon_x^*=1,\quad y^*=1\,000,\quad \varepsilon_y^*=5.$$

虽然 ε_y^* 比 ε_x^* 大4倍，但 $\dfrac{\varepsilon_y^*}{y^*}=\dfrac{5}{1\,000}=0.5\%$ 比 $\dfrac{\varepsilon_x^*}{x^*}=\dfrac{1}{10}=10\%$ 要小得多，这说明 y^* 近似 y 的程度比 x^* 近似 x 的程度要好得多. 所以，除考虑误差的大小外，还应考虑准确值 x 本身的大小. 近似值的误差 e^* 与准确值 x 的比值

$$\frac{e^*}{x}=\frac{x^*-x}{x}$$

称为近似值 x^* 的**相对误差**，记作 e_r^*.

在实际计算中，由于真值 x 总是不知道的，通常取

$$e_r^*=\frac{e^*}{x^*}=\frac{x^*-x}{x^*}$$

作为 x^* 的相对误差，条件是 $e_r^*=\dfrac{e^*}{x^*}$ 较小，此时

$$\frac{e^*}{x}-\frac{e^*}{x^*}=\frac{e^*(x^*-x)}{x^*x}=\frac{(e^*)^2}{x^*(x^*-e^*)}=\frac{(e^*/x^*)^2}{1-(e^*/x^*)}$$

是 e_r^* 的二次方项级，故可忽略不计.

相对误差也可正可负，它的绝对值上界叫做**相对误差限**，记作 ε_r^*，$\varepsilon_r^*=\dfrac{\varepsilon^*}{|x^*|}$.

根据定义，$\dfrac{\varepsilon_x^*}{|x^*|}=10\%$ 与 $\dfrac{\varepsilon_y^*}{|y^*|}=0.5\%$ 分别为 x 与 y 的相对误差限，可见 y^* 近似 y 的程度比 x^* 近似 x 的程度好.

1.3.3 有效数字

当准确值 x 有多位数时，常常按四舍五入的原则得到 x 的前几位近似值 x^*. 例如

$$x=\pi=3.141\,592\,65\cdots,$$

取前三位,$x_3^*=3.14$,$\varepsilon_3^*\leqslant 0.002$;取前五位,$x_5^*=3.141\,6$,$\varepsilon_5^*\leqslant 0.000\,008$:它们的误差都不超过末位数字的半个单位,即

$$|\pi-3.14|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-2},\quad |\pi-3.141\,6|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-4}.$$

若近似值x^*的误差限是某一位的半个单位,该位到x^*的第一位非零数字共有n位,就说x^*有n位**有效数字**.如取$x^*=3.14$作π的近似值,x^*就有三位有效数字;取$x^*=3.141\,6$作π的近似值,x^*就有五位有效数字.x^*有n位有效数字可写成标准形式

$$x^*=\pm 10^m\times(a_1+a_2\times 10^{-1}+\cdots+a_n\times 10^{-(n-1)}),\tag{1.3.1}$$

其中,a_1是1到9中的一个数字;$a_2,\cdots,a_n$是0到9中的一个数字;m为整数,且

$$|x-x^*|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{m-n+1}.\tag{1.3.2}$$

例1.2 按四舍五入原则写出下列各数具有五位有效数字的近似数:

187.932 5, 0.037 855 51, 8.000 033, 2.718 281 8.

按定义,上述各数具有五位有效数字的近似数分别是

187.93, 0.037 856, 8.000 0, 2.718 3.

注意,$x=8.000\,033$的五位有效数字近似数是8.000 0而不是8,因为8只有一位有效数字.

例1.3 重力常数g,如果以m/s^{2}为单位,$g\approx 9.80$ m/s^2;若以km/s^{2}为单位,$g\approx 0.009\,80$ km/s^2,它们都具有三位有效数字.按第一种写法,有

$$|g-9.80|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-2},$$

据式(1.3.1),这里$m=0,n=3$;按第二种写法,有

$$|g-0.009\,80|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-5},$$

这里$m=-3,n=3$.它们虽然写法不同,但都具有三位有效数字.至于绝对误差限,由于单位不同,结果也不同,$\varepsilon_1^*=\frac{1}{2}\times 10^{-2}$ m/s^2,$\varepsilon_2^*=\frac{1}{2}\times 10^{-5}$ km/s^2,而相对误差都是

$$\varepsilon_r^*=0.005/9.80=0.000\,005/0.009\,80.$$

注意,相对误差与相对误差限是无量纲的,而绝对误差与误差限是有量纲的.

例1.3说明有效位数与小数点后有多少位数无关.然而,从式(1.3.2)可得到具有n位有效数字的近似数x^*,其绝对误差限为

$$\varepsilon^*=\frac{1}{2}\times 10^{m-n+1},$$

在m相同的情况下,n越大,10^{m-n+1}越小,故有效位数越多,绝对误差限越小.

关于有效数字与相对误差限的关系,有如下定理.

定理1.1 对于用式(1.3.1)表示的近似数x^*,若x^*具有n位有效数字,则其相