应用高等数学

（上）

王玉清
李燕丽　主编
吕瑞峰

中国科学技术出版社

应 用 高 等 数 学

(上)

王玉清
李燕丽　主编
吕瑞峰

中国科学技术出版社
· 北　京 ·

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学. 上/王玉清，李燕丽，吕瑞峰主编.
—北京：中国科学技术出版社，2006.8
ISBN 7-5046-4428-5

Ⅰ.应… Ⅱ.①王… ②李… ③吕… Ⅲ.高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 077569 号

责任编辑：李　珩　杨朝旭
封面设计：李　珩
责任校对：凌红霞
责任印制：安利平

中国科学技术出版社出版
北京市海淀区中关村南大街 16 号　邮政编码：100081
电话：010-62103189　　传真：010-62183872
http://www.kjpbooks.com.cn
科学普及出版社发行部发行
北京市迪鑫印刷厂印刷
*
开本：787 毫米×1092 毫米　1/16　印张：23.75　字数：570 千字
2006 年 8 月第 1 版　　2006 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—2000册　定价：36.00元

内容提要

本书是编者根据多年的教学实践，按照新形势下教材改革的精神编写而成的．它面向高等职业技术学院，也可作为高等工程专科学校的教材和同级同类成人学校及函授教材．

本书分上、下两册出版．上册内容为函数与极限、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、微分方程、空间向量与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、多元函数积分学及其应用、无穷级数等八章．书中标有*号的内容可不作教学要求．书末还附有代数、三角函数、初等几何、几种常用的曲线、积分表、习题答案与提示等．

前 言

本书是一本面向高等职业技术学院的改革教材，在编写过程中力求贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”和“少而精”的原则，在保证科学性的基础上，注意讲清概念，不追求严格的论证推导，注意学生基本运算能力及分析问题、解决问题能力的培养，特别注重理论联系实际，增加了许多应用型知识，内容通俗易懂，努力体现高等职业教育特色，与现行同类教材相比，本书有以下几个特点:

1. 在课程内容上，我们尽力处理好知识与能力的关系，突出数学思想和数学方法的教育；针对重要的数学思想和方法，在不同的知识层面上反复循环，以使学生真正掌握；尽力突出学习的方法和自学能力的培养，突出计算能力和数学建模能力的培养；贯彻以学生为本，从学生的实际水平出发，以分层次逐步培养学生的能力为主线，以保持与专业课程同步设置为原则，精心设计、认真编排.

2. 在内容的表述上，我们采用“数形结合”的手段，以定性为主，定量为辅，广泛采用通俗易懂的语言，在知识内容、编写体例及能力训练等方面，注意到与高中阶段的衔接.

3. 为了更好地帮助学生学好每章的内容，本书在各章末，都配备了本章学习指导和总习题. 每章学习指导包括知识提要、重点与难点解析、典型例题解析等三部分；总习题包括填空题、选择题、计算题、应用题与证明题等，这一部分是对本章所学内容的总复习，便于学生“专升本”学习的需要.

全书共分十七章，内容主要包括一元（多元）函数微积分学、无穷级数、微分方程、行列式与矩阵理论、线性方程组、概率论与数学实验等. 书中标有 * 号的内容可不作教学要求.

本书由太原理工大学阳泉学院王玉清、李燕丽、吕瑞峰任主编，刘桃凤、王爱武任副主编，其中王玉清编写第一章，李燕丽编写第二章，吕瑞峰编写第五章、第六章，刘桃凤编写第十一章、第十二章，王爱武编写第三章、第十三章. 参加本书编写工作的还有太原理工大学阳泉学院王端（编写第九章），吕慧莲（编写第七章、第八章），李瑞军（编写第十四章、第十六章），周志海（编写第十五章），付焕香（编写第十七章），阳泉职业技术学院师范分院赵素英（编写第四章、第十章）.

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正.

编　者

2006 年 3 月

目　　录

第一章　函数与极限

初等数学研究的对象基本上是不变的量，而高等数学则是以变量作为研究对象．研究变量时，着重考察变量之间的相互依赖关系（即所谓的函数关系），并讨论当某个变量变化时，与它相关的变量的变化情况．这种研究方法就是所谓的极限方法．本章将介绍函数、极限和函数连续性等基本概念以及它们的一些性质，为以后的学习奠定必要的基础．

§1-1　函数

一、函数的概念与分类

1．函数的概念

在同一自然现象或技术问题中，同时有几个变量在变化着，这些变量并不是孤立地变化，而是按照一定的规律相互联系、相互依赖着．下面我们举几个实际的例子．

例1　考虑圆的周长 s 与半径 r 之间的依赖关系，我们知道，它们之间的关系可由公式

$$s = 2\pi r$$

表示．当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任取一个数值时，由上式就可以确定圆周长 s 的相应数值．

例2　在本市内投寄平信，每封信不超过 20g 时，应付邮费 0.60 元；超过 20g 而不超过 40g 时，应付邮费 1.20 元；依此类推，每封信的重量不得超过 60g，则邮费 y（单位：元）与每封信的重量（单位：g）之间的关系可用式子

$$y=\begin{cases}0.60, & 0<x\leqslant 20\\ 1.20, & 20<x\leqslant 40\\ 1.80, & 40<x\leqslant 60\end{cases}$$

表示．当 x 在区间 $(0,60]$ 内任取一个数值时，由上式就可以确定 y 的相应数值．

上面两个例子虽然是不同的问题，但具有共同的特性．即在每一个问题中都包含两个变量，它们之间相互依赖，且存在确定的对应规律．根据这个规律，只要其中一个变量在某个范围内取定一个值时，另一个变量就有确定的值与之对应．类似这种变量间的依赖关系的例子是很多的，概括其共同特性，有如下定义：

定义1　设 x 和 y 是两个变量，D 是实数集 R 的某个非空子集．如果按照某个对应法则 f，使得对任意的 $x\in D$，变量 y 总有确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，其中 x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**，实数集 D 称为函数 $y=f(x)$ 的**定义域**．

当 $x=x_0$ 时，与之对应的 y 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$．

当 x 取遍 D 内所有数值时，与之对应的 y 值的集合叫做函数 $y=f(x)$ 的**值域**，记作 R_f，即 $R_f=\{y|y=f(x),x\in D\}$．

对于函数定义，应注意下面几点：

（1）此处给出的函数定义包含了单值函数与多值函数两种．如果对于自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总只有一个，这种函数叫**单值函数**；否则称为**多值函数**．例如，由方程 $x^2+y^2=a^2$ 所确定的函数就是一个多值函数．以后如不特别说明，我们所讨论的函数都是单值函数．

（2）函数定义中有两个要素．第一个要素是函数的定义域，所谓函数的定义域是指自变量的允许取值范围，即函数的存在范围．只有自变量在定义域中取值时，函数才有意义．在

实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的．如例 1 中，定义域$D\in(0,+\infty)$；在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数，这时，我们约定：函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数所组成的集合（这样约定的定义域有时也称为函数的**自然定义域**）．例如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间$[-1,1]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间$(-1,1)$．函数概念的第二个要素是自变量与因变量的对应法则，就是函数记号中的“f”，它指明了如何由自变量的值去寻求因变量的对应值．因此，如果两个函数的定义域相同，且对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的．

（3）关于函数记号$f(x)$，它是一种抽象的函数关系符号，可表示各种各样的具体函数，如$f(x)=x^2-1, f(x)=\sin x, f(x)=\arctan\dfrac{1}{x^2}$等．

下面举几个关于函数的例子．

例 3　判定函数$f(x)=\lg x^2$与$g(x)=2\lg x$是否为同一函数．

解　因为函数$f(x)$的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而函数$g(x)$的定义域是$(0,+\infty)$，所以$f(x)=\lg x^2$与$g(x)=2\lg x$不是同一函数．如果将$f(x)$的定义域限制在$(0,+\infty)$内，则$f(x)$与$g(x)$为同一函数．

例 4　设函数$f(x)=2x-3$，求$f(a^2)$，$f[f(a)]$，$[f(a)]^2$．

解　$f(a^2)=2a^2-3$，

$f[f(a)]=f(2a-3)=2(2a-3)-3=4a-9$，

$[f(a)]^2=(2a-3)^2=4a^2-12a+9$．

例 5　求函数$f(x)=\sqrt{4-x^2}+\lg\dfrac{1}{x-1}$的定义域．

解　要使函数有意义，自变量x必须同时满足以下条件

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ \dfrac{1}{x-1}>0\\ x-1\neq 0\end{cases}，\quad 即\quad \begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ x>1\\ x\neq 1\end{cases}，$$

解上述不等式组得 $1<x\leqslant 2$，所以函数的定义域为$D=(1,2]$．

2. **函数的分类**

函数的对应法则f是连接x与y的纽带，依据函数对应法则的不同，可以把函数分成不同的类别．

（1）若对于任意的$x\in D$，因变量y恒为一常数，这种函数叫做**常数函数**，记作$y=c$（c为任意常数）．

（2）当函数的对应法则是由一个解析式表达时，这种函数叫做**显函数**，记作$y=f(x)$．例如，$y=2x^2+1$，$y=\sin x$等．

（3）当函数的对应法则是由方程$F(x,y)=0$所确定时，这种函数叫做**隐函数**．例如，$e^{xy}-y=0$，$2xy=\ln y$等．

（4）当函数的对应法则是由几个不同的解析式表达时，这种函数叫做**分段函数**．例如

$$f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1. \\ x^2, & x>1 \end{cases}$$

注意：上面的分段函数不能说成是“三个函数”，它表示一个函数．它表示当自变量x在定义域D的不同范围内取值时，因变量y与之对应的规则不同．在实际应用中常常用到这种表示形式．

（5）当函数的对应法则是由图像或表格来表示时，这种表示函数的方法叫做**图像法**或**表格法**．例如，中学里学过的数学用表就是用表格法来表示函数的例子．

（6）当x与y之间是通过第三个变量来建立对应法则时，这种函数叫做由**参数方程表示的函数**，或称**参数式函数**，其中第三个变量叫做**参变量**．例如，$\begin{cases} x=t \\ y=t^2+1 \end{cases}$（$t$为参变量）就是由参数方程所表示的函数．

二、函数的几种特性

1．函数的有界性

设函数$y=f(x)$的定义域为D，数集$X\subset D$，若存在$M>0$，使得对于任意的$x\in X$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数$y=f(x)$在数集X上**有界**，或称函数$y=f(x)$是数集X上的**有界函数**；若这样的正数M不存在，则称函数$y=f(x)$在数集X上**无界**，或称函数$y=f(x)$是数集X上的**无界函数**．

例如，函数$y=\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内有界，因为取$M=1$，不论x取何值，总有$|\cos x|\leqslant 1$成立．又如，函数$y=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,+\infty)$内是无界的，但该函数在区间$(1,2)$内是有界的，例如可取$M=1$而使$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$对于一切$x\in(1,2)$都成立．

由此可见，函数的有界性不但与函数本身有关，还要取决于自变量的取值范围．

2．函数的单调性

设函数$y=f(x)$的定义域为D，区间$I\subset D$．如果对于任意的$x_1,x_2\in I$，当$x_1<x_2$时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数$y=f(x)$在区间I上是**单调增加**的；如果对于任意的$x_1,x_2\in I$，当$x_1<x_2$时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数$y=f(x)$在区间I上是**单调减少**的．单调增加或单调减少的函数统称为**单调函数**，使函数保持单调增加或单调减少的区间称为函数$y=f(x)$的**单调区间**．

例如，函数$f(x)=x^3$在区间$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的；函数$f(x)=x^2$在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的，在区间$(-\infty,0]$上是单调减少的；在区间$(-\infty,+\infty)$上函数$f(x)=x^2$不是单调函数．

3. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$)，如果对于任意的 $x\in D$，等式

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**，其图像关于 y 轴对称．如果对于任意的 $x\in D$，等式

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**，其图像关于原点对称．

例如，$y=x, y=\sin x$ 均为 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇函数；$y=x^2, y=\cos x$ 均为 $(-\infty,+\infty)$ 内的偶函数；$y=\sin x+\cos x$ 为非奇非偶函数．

例 6 讨论下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$；　　（2）$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$．

解 （1）因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$，所以 $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ 为偶函数．

（2）因为 $f(-x)=\ln\left[-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right]=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})$

$$=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数．

4. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在正数 T，使得对于任意的 $x\in D$，有 $(x\pm T)\in D$，且恒有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $y=f(x)$ 是**以 T 为周期的周期函数**．显然，若 T 是 $f(x)$ 的周期，则 kT 也是 $f(x)$ 的周期，$(k=1,2,\ldots)$．通常我们所说的周期函数的周期都是指**最小正周期**．

例如，我们所熟知的三角函数 $y=\sin x, y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x, y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数．

周期函数的图形呈周期性重复，只要知道它在任一周期上的图形，就可以得到函数的全部图形．

例 7 求函数 $f(x)=\sin 2x$ 的周期．

解 设所求周期为 T，则必有 $f(x+T)=f(x)$，即

$$\sin 2(x+T)=\sin(2x+2T)=\sin 2x$$

因为正弦函数 $y=\sin x$ 的周期为 2π，所以应有 $2T=2\pi$，故 $T=\pi$．

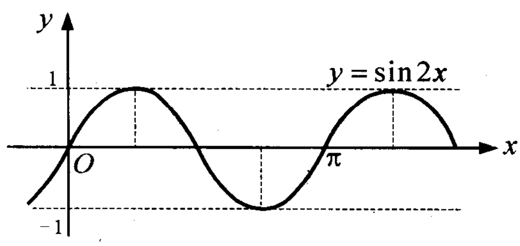

图 1-1

函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图像如图 1-1 所示．一般地，函数 $y=\sin\omega x$ 与 $y=\cos\omega x$ 的周期都可由公式 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 求得．如果函数 $f(x)$ 是由几个周期函数的代数和构成，则函数 $f(x)$ 的周期等于这几个已知函数的周期

的最小公倍数.

三、反函数 复合函数 初等函数

1. 反函数

函数 $y=f(x)$ 反映了两个变量之间的对应关系，当自变量 x 在定义域 D 内取定一个值后，因变量 y 的值也随之确定. 但是，这种因果关系并不是绝对的. 例如在自由落体运动中，如果已知物体下落的时间 t 而要求出下落距离 s，则由公式 $s=\frac{1}{2}gt^2(t\geqslant 0, g$ 为重力加速度)进行计算，这里时间 t 是自变量，而距离 s 是因变量. 我们也常常需要考虑反过来的问题：已知下落距离 s 来求出下落时间 t. 这时我们可以从上式解得 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}(s\geqslant 0)$，这里距离 s 成为自变量，而时间 t 成为因变量. 在数学上，如果把一个函数中的自变量和因变量进行对换后能得到新的函数，就把这个新函数称为原来函数的反函数.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R_f. 若对每个 $y\in R_f$，都有唯一确定的 $x\in D$ 适合关系式 $f(x)=y$，则这样确定的以 y 为自变量，x 为因变量的函数称为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作

$$x=f^{-1}(y).$$

这个函数的定义域为 R_f，值域为 D. 相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

在函数式 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 表示自变量，x 表示因变量. 但习惯上一般用 x 表示自变量，而用 y 表示因变量，因此当集中注意于反函数本身时，就常常对调函数式 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y，把它改写成 $y=f^{-1}(x)$. 今后提到的反函数，一般就是指这种经过改写后的反函数. 在同一坐标平面内，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像是关于直线 $y=x$ 对称的.

例如，函数 $y=-\sqrt{x-1}(x\geqslant 1)$ 的反函数是 $x=y^2+1$ $(y\leqslant 0)$，或改写成 $y=x^2+1$ $(x\leqslant 0)$.

下面来讨论什么样的函数存在反函数?为此先看一个例子. 设 $y=x^2$ $(-\infty<x<+\infty)$，由此式解出 x，得到 $x=\pm\sqrt{y}$ $(y\geqslant 0)$. 这就表明，对于每个 $y>0$，x 有两个不同的对应值 $\pm\sqrt{y}$，x 的值并不唯一确定. 因此按反函数的定义，函数 $y=x^2$ $(-\infty<x<+\infty)$ 不存在反函数. 但如果考虑函数 $y=x^2$ $(x\geqslant 0)$，则可解得 $x=\sqrt{y}$ $(y\geqslant 0)$，这时对于每个 $y\geqslant 0$，x 有唯一确定的值 $\sqrt{y}$ 与它对应. 因此，函数 $y=x^2$ $(x\geqslant 0)$ 存在反函数 $x=\sqrt{y}$ $(y\geqslant 0)$，或写成 $y=\sqrt{x}$ $(x\geqslant 0)$. 我们注意到，$y=x^2$ $(x\geqslant 0)$ 在其定义域 $D=[0,+\infty)$ 上是单调(增加)的，而函数 $y=x^2$ $(-\infty<x<+\infty)$ 在其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$ 上不是单调的(图 1-2).

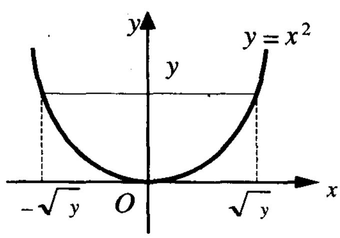

图 1-2

一般地，有如下的**关于反函数存在性的充分条件**：

若函数 $y=f(x)$ 定义在某个区间 I 上并在该区间上单调增加(或减少)，则它的反函数必存在，且此反函数在相应区间上也是单调增加(或减

少)的.

事实上，若设函数 $y=f(x)\quad(x\in I)$ 的值域为 R_f，则由 $f(x)$ 在 I 上的单调性可知，对任一 $y\in R_f$，I 内必定只有唯一的 x 值，满足 $f(x)=y$，从而推得 $y=f(x)\ (x\in I)$ 的反函数必存在.

利用反函数存在性的充分条件，我们只需判断函数在所讨论的范围内是否单调，就可以确定其反函数是否存在.

2. 复合函数

我们先来看一个实际的例子. 自由落体运动的动能 E 是速度 v 的函数

$$E=\frac{1}{2}mv^2 \tag{1}$$

而速度 v 又是时间 t 的函数

$$v=gt \tag{2}$$

因此，若要研究作自由落体运动的物体的动能 E 与时间 t 的关系，就要把（2）式代入（1）式，这样我们就得到了由函数（1）与（2）复合而成的函数 $E=\frac{1}{2}m(gt)^2$，这个函数称为复合函数. 下面给出它的一般定义：

定义 2 若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$ 的值域为 D_2，且 $D_2\subseteq D_1$，则变量 y 通过变量 u 成为 x 的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 构成的**复合函数**，记为

$$y=f[g(x)],$$

其中 x 叫做**自变量**，u 叫做**中间变量**，f 叫做**外层函数**，g 叫做**内层函数**.

关于复合函数，我们应注意下面的两点：

（1）函数的复合是有条件的.

例如，设函数 $y=\arccos u$，$u=2+x^2$，因为对于内层函数 $u=2+x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 中的任何 x 值，对应的 u 值都不小于 2，从而使得外层函数 $y=\arccos u$ 无意义，因此，形式上的复合函数 $y=\arccos(2+x^2)$ 是没有意义的.

事实上，两个函数可以进行复合的条件是：**内层函数的值域与外层函数的定义域的交集必须是非空集合**. 还要注意到，内层函数的定义域与复合函数的定义域不一定相同. 例如，复合函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，其定义域为 $[-1,1]$，而内层函数 $u=g(x)=1-x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

（2）函数的复合可以是多重复合.

例如，函数 $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=2x$ 复合以后就构成复合函数 $y=\cos^2 2x$，这里 u 和 v 都是中间变量. 与此同时，我们还应掌握复合函数的复合过程，即分解复合函数，这对于后面的学习是有帮助的，读者对此应予重视.

例 8 指出下列函数的复合过程：

（1）$y=\sqrt{5+2x}\ \left(x\geqslant-\frac{5}{2}\right)$；（2）$y=\mathrm{e}^{-x^2-1}$；（3）$y=\lg\sin^2 x$.

解 （1）函数 $y=\sqrt{5+2x}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=5+2x$ 复合而成的.

（2）函数 $y=\mathrm{e}^{-x^2-1}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=-x^2-1$ 复合而成的.

（3）函数 $y=\lg\sin^2 x$ 是由 $y=\lg u$，$u=v^2$，$v=\sin x$ 复合而成的.

初学者往往对分析函数的复合过程感到困难，不妨考虑下面的思路.

设复合函数 $y=f\{\phi[g(x)]\}$，对于给定的 x 值，计算函数值的顺序是：

（1）先计算内层函数值 $g(x)=v$；

（2）再计算中层函数值 $\phi(v)=u$；

（3）最后计算外层函数值 $f(u)=y$.

即“由内向外”逐层计算，并且每一层都是计算一个简单函数的值．不难看出，函数的复合顺序恰好与计算函数值的顺序相反．

3. 初等函数

定义 3　幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**.

高中阶段的数学教材中，对指数函数、对数函数、三角函数及其性质与图像均已作过介绍．在此，我们着重介绍幂函数和反三角函数，同时对已学过的三种函数加以回顾.

（1）幂函数

函数 $y=x^{\alpha}$（α 为任意实数）叫做**幂函数**.

常见的幂函数有 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\sqrt{x}$，$y=\dfrac{1}{x}$ 等.

幂函数的定义域随 α 的取值不同而不同，但它们在 $(0,+\infty)$ 内都有定义，且图像都经过点 $(1,1)$，如图 1-3 所示.

当 α 为正整数时，$y=x^{\alpha}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且 α 为奇（偶）数时，$y=x^{\alpha}$ 为奇（偶）函数.

当 α 为负整数时，$y=x^{\alpha}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

当 α 为分数时，情况较为复杂，要根据 x^{α} 的具体表达式而定.

当 α 为无理数时，规定 $y=x^{\alpha}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

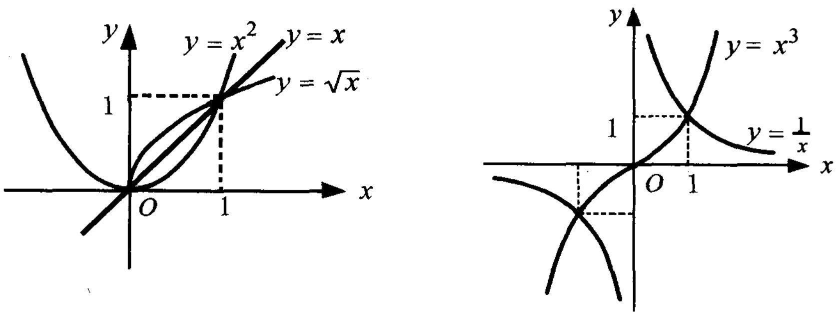

图 1-3

（2）指数函数

函数 $y=a^x$（a 是常数，$a>0$ 且 $a\neq 1$）叫做**指数函数**.

指数函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，其图像都经过点 $(0,1)$，且函数值恒大于零．当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少．其图像如图 1-4 所示.

（3）对数函数

函数 $y=\log_a x$（a 是常数，$a>0$ 且 $a\neq 1$）叫做**对数函数**.

对数函数与指数函数互为反函数，其定义域为 $(0,+\infty)$，图像都经过点 $(1,0)$．当 $a>1$ 时，函数单调增加，当 $0<a<1$ 时，函数单调减少．其图像如图 1-5 所示．特别当 $a=\mathrm{e}$ 时，将 $\log_{\mathrm{e}} x$ 记为 $\ln x$（称为**自然对数函数**）．其中 $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 为无理数，关于无理数 e 的意义见本章§1-3.