

空中三角網的 高程平差

(解析法及圖解法)

中國人民解放軍總參謀部測繪局印

一九五六年十一月 北 京

L

L

內 容 介 紹

本書是以作業隊空中三角高程平差的業務學習資料為基礎，並結合實際作業情況補充修改整理出來的。全書包括解析法和圖解法兩種空中三角高程平差的作業方法，並包括編制水系略圖及計算像片相互定向元素的作業方法。書中有簡單的理論說明、計算實例及精度定限，可供從事空中三角測量人員的工作參考，並可作為初學空中三角測量人員的學習資料。

目 錄

第一章 概 論	7
第二章 解析法計算空中三角網点的高程	10
§ 1. 理論說明	10
§ 2. 准备工作	15
§ 3. 比例尺改正系数之計算	16
§ 4. 座标比例尺变换	18
§ 5. 座标化算	18
§ 6. 常数項計算	19
§ 7. 高程改正系数 C_0 , C_1 , C_2 , C_3 , 和 C_4 之計算	19
(1) 平差計算法	20
(2) 逐次趋近法	22
§ 8. 点的高程改正数及高程之計算	28
§ 9. 中誤差計算	29
第三章 圖解法平差空中三角網点的高程	31
§ 1. 概 述	31
§ 2. 准备工作	31
§ 3. 比例尺改正系数之确定	31
§ 4. 高程比例尺之变换	34
§ 5. 高程改正圖表之制作	34
§ 6. 制作高程改正圖时注意事項	42

第四章 編制水系略圖43

第五章 像片相互定向元素之計算44

附錄 1 空中三角網點高程平差計算实例.....48

附錄 2 逐次趨近法确定高程改正系数 C_0 、 C_1
 C_2 、 C_3 、和 C_4 的計算实例51

附錄 3 圖解高程平差手簿.....59

附錄 4 航高計算手簿.....60

附錄 5 中誤差計算表.....61

附錄 6 相互定向元素表

附錄 7 座標成果手簿.....62

附錄 8 射綫束圖形.....63

附錄 9 圖解高程平差圖表.....64

第一章 概 論

立体攝影測量是近代編制地形圖的基本方法。随着立体攝影測量的發展，外業工作的範圍就顯著的縮小了。

利用全能儀器（如精密立体測圖儀、自動測圖儀、多倍投影測圖儀等）擴展空中三角網以加密平面控制和高程控制時，骨幹航綫的空中三角網，須用精密立体測圖儀或自動測圖儀作業，而填充航綫的空中三角網，則用多倍投影測圖儀作業。野外平面和高程控制點的數量與分布應按成圖比例尺的大小及成圖精度的高低而定。例如：作連續長達 320 公里（約 80 個像對）的骨幹航綫時，至少每隔 40 公里要有兩個平面和高程控制點。如圖一。使用多倍投影測圖儀擴展 1:25000, 1:50000 和 1:100000 比例尺的填充航綫空中三角時，控制點（野外控制點或由骨幹航綫求出的控制點）的數目和位置應如圖 2、3 和 4 所示。

目前，在編制人烟稠密地區的地形圖時，野外作業包括下列工作：

- （1）在野外測定必需的平面和高程控制點；
- （2）進行像片調繪；
- （3）蒐集兵要地志資料。

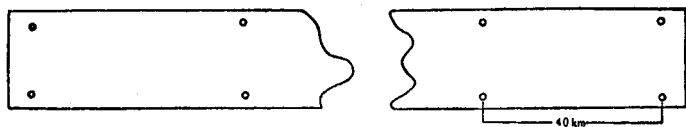


圖 1

1:25000

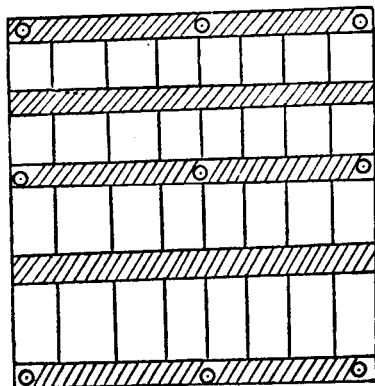


圖 2

1:50000

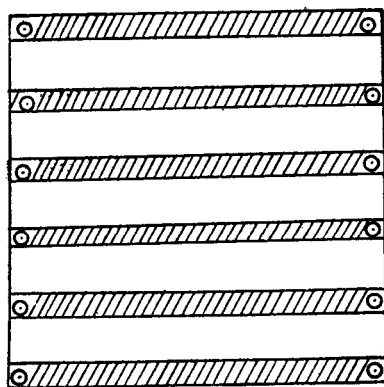


圖 3

1:100000

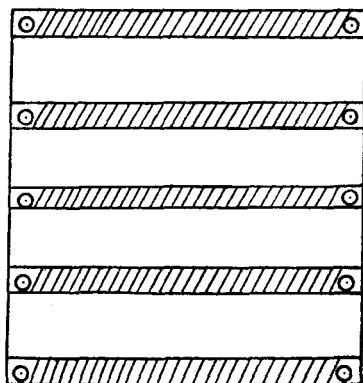


圖 4

利用骨幹航綫加密控制点以編制無人烟地区的地形圖时，野外作業包括下列工作：

(1) 測定擴展骨幹航綫空中三角網所需要的野外控制点；

(2) 調制內業調繪所需要的标准像片式样；

(3) 蒐集兵要地志資料。

自从有了立体攝影测量的各种仪器，許多攝影測量学者提出了空中三角網觀測、計算和平差的各种方法，这样，就縮小了外業作業的範圍。苏联学者 A.C. 斯基里多夫、M.Д. 康新、Г.В. 罗曼諾夫斯基、Ю.П. 汝可夫等在这方面有很大的貢獻。在本文中只敘述了空中三角網高程計算和平差的最完善的方法。这种方法在实际作業中已經証明。是最有效的方法。凡是应用这种方法進行作業，除了要了解利用全能仪器作空中三角的觀測方法外，还需

要了解最小二乘法的基本法則和計算技能。

本文在必要的情况下，有簡短的理論說明和計算举例。并研究下列几个問題：

- (1) 用最小二乘法計算空中三角網点的高程；
- (2) 用逐次趋近法計算高程改正系数；
- (3) 制作高程改正圖表；
- (4) 計算像片定向元素。

計算法高程平差的步驟如下：

- (1) 求比例尺改正系数 K 及 K_z ；
- (2) 化算座标讀数成 x' , y' , z' ；
- (3) 归化各点座标成 x_ϕ , y_ϕ , z_ϕ ；
- (4) 求常数項 l 的数值；
- (5) 求待定系数 C_0 , C_1 , C_2 , C_3 和 C_4 ；
 1. 平差法；
 2. 逐次趋近法；
- (6) 求 Δz ；
- (7) 求 z ；

第二章 解析法計算空中 三角網点高程

§ 1. 理論說明 从理論上知道，航綫模型進行大地定向时，必須要知道七个元素： x_0, y_0, z_0 ——攝影測量座标系原点的大地座标， $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ ——航綫模型繞 X, Y 和 Z 軸的旋轉角， t ——模型比例尺的分母。

因此，必須有兩個已知平面位置(x_r, y_r)及高程(z_r)的控制点，及一个已知高程(z_r)的高程控制点。为了進行

檢查，一般的不僅用三個點，而用三個以上的點，這樣不僅是作為定向檢查，而且也作為評定定向精度的依據。

假設我們已知下列數據：

x, y, z ——點的攝影測量座標；

t ——模型比例尺分母的近似值；

x_0, y_0, z_0 ——攝影測量座標系原點的近似大地座標值；

x_r, y_r, z_r ——點的大地座標。

假設我們還知道航綫模型旋轉角的近似值 δ_x, δ_y 和 δ_z 。當把航綫模型繞 X, Y, Z 軸旋轉並整置比例尺之後，就得出點的大地座標值：

$$\left. \begin{aligned} x'_r &= x_0 + x' \cdot t \\ y'_r &= y_0 + y' \cdot t \\ z'_r &= z_0 + z' \cdot t \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中： x', y', z' ——航綫模型旋轉後點的攝影測量座標。

計算已知大地座標值與近似大地座標值之差數：

$$\left. \begin{aligned} x'_r - x_r &= l' \\ y'_r - y_r &= l'' \\ z'_r - z_r &= l''' \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

這些數值就是誤差方程式中的常數項。我們再導入下列數值：

dx_0, dy_0, dz_0 ——近似值 x_0, y_0, z_0 的改正數；

$(\delta_x), (\delta_y), (\delta_z)$ ——旋轉角近似值 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ 的改正數；

dt ——模型比例尺分母近似值的改正数。

列出以下的誤差方程式，以便求得这些改正数：

$$\left. \begin{aligned} x_0 + dx_0 + x'dt + dx + l' &= v' \\ y_0 + dy_0 + y'dt + dy + l'' &= v'' \\ z_0 + dz_0 + z'dt + dz + l''' &= v''' \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中： dx 、 dy 、 dz ——航綫模型旋轉 (δx) 、 (δy) 、 (δz) 后坐标所得到的改正数。这三个改正数各等于：

$$\left. \begin{aligned} dx &= z'(\delta y) - y'(\delta z) \\ dy &= x'(\delta z) - z'(\delta x) \\ dz &= y'(\delta x) - x'(\delta y) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

將(4)代入(3)，則得：

$$\left. \begin{aligned} x_0 + dx_0 + x'dt + z'(\delta y) - y'(\delta z) + l' &= v' \\ y_0 + dy_0 + y'dt + x'(\delta z) - z'(\delta x) + l'' &= v'' \\ z_0 + dz_0 + z'dt + y'(\delta x) - x'(\delta y) + l''' &= v''' \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

方程式(5)就是誤差方程式。列出及解算法方程式之后，就能得到航綫模型外方位元素的改正数以及所求点的大地座标。

如果航綫模型是在正确的相互定向之后構作起來的、而且与实地相似又是一個整体不变的系統，上述的結論才能適合。在这种情况下，航綫模型的外部定向只要用三个控制点和模型上相应的三个点定向就可以了，也就是使三个控制点与模型相应点的平面位置及高程都相互符合。但实际上由許多單張像片構成的航綫模型与实地不完全相

似，而具有各种变形。

我們在研究航綫模型变形以前，首先研究一下根据控制点的高程進行航綫模型外部定向的問題。

实际上，測定 x 、 y 、 z 三个座标往往是用一种方法測定平面位置 x 、 y ，用另一种方法測定高程 z 。例如：利用多倍投影測圖仪擴展空中三角網时、直接在承影面上測定各点的平面位置，而利用繪圖器測定各点的高程。利用自动測圖仪（ A_5 ）擴展空中三角網时，可以在繪圖桌上測定各点的平面位置，用 Z 讀数鼓測定其高程。在这种情况下，不必要計算全部的外方位元素。只須要整置模型水平，消除模型的变态就够了。假設模型沒有变态，整置模型水平时，使模型旋轉 δ_x 、 δ_y 角，再改正模型的攝影基綫（此基綫取决于比例尺的大小）和高度。因此，需要將定向点的高程差乘上 $(1+dt)$ ，然后根据新的高程進行定向。

誤差方程式中有：

$$z_0 + dz_0 + z \cdot dt - x \cdot \delta_y + y \cdot \delta_x + l = v \quad (6)$$

式中： $l = z_0 + z' \cdot t - z_r$

由于地貌起伏不大，高程 z 变化很小， dt 值也很小，因此 $z \cdot dt$ 可以捨去，最后得出：

$$z_0 + dz_0 - x \cdot \delta_y + y \cdot \delta_x + l = v \quad (7)$$

航綫模型变态是因系統誤差和偶然誤差而引起的。

系統誤差產生的主要原因是：

- (1) 地球曲率；
- (2) 折光差；

(3) 航攝仪物鏡的畸变差;

(4) 像紙伸縮;

(5) 航攝时航攝底片沒有压平。

前三項引起模型的抛物扭曲,后兩項引起模型的鞍形扭曲。

根据理論和实际得出下面的模型变态誤差方程式为:

$$c'_0 + c_1 x_\phi + c_2 y_\phi + c_3 x_\phi y_\phi + c_4 y_\phi^2 + l = v. \quad (8)$$

为了确定系数 c_1 , 必須有五个以上的高程控制点。如果使用最小二乘法計算时, 必須要多于 5 个控制点 (至少 6 个控制点)。点的分布最好如圖 5 所示。

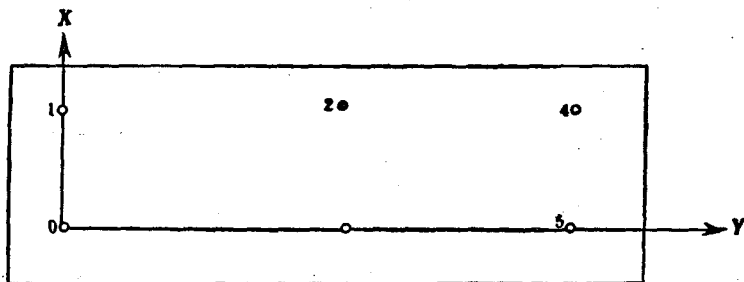


圖 5

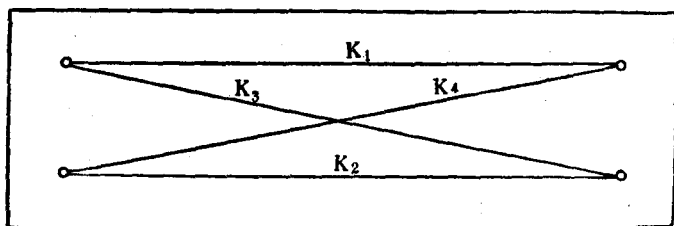


圖 6

为了計算改正模型变态以后的高程，必須确定高程改正系数 c_0 、 c_1 、 c_2 、 c_3 和 c_4 。

确定系数后，再利用下式計算高程改正数。

$$\Delta z = c_0 + c_1 x_\phi + c_2 y_\phi + c_3 x_\phi y_\phi + c_4 y_\phi^2 \quad (9)$$

§ 2. 准备工作 准备工作包括下列工作：

- (1) 研究原始資料；
- (2) 檢查內業測量手簿。

每一个作業員在進行某一幅圖的高程平差之前，都應該仔細地研究所有的原始資料和外業測量資料。研究原始資料时要了解下列情况：

- (1) 航攝質量；
- (2) 像片野外控制点的分布及精度；
- (3) 空中三角測量的精度。

研究航攝資料时，必須注意軟片在攝影时压平的精度，影像清晰程度以及圖歷表內所記載的航攝仪焦距值是否正确。航攝仪焦距值的正确性，对于确定模型的垂直比例尺來說是很重要的。根据斯基里多夫著『立体攝影測量』中焦距变动範圍的理論限制及实际經驗得出：如果 f 与 f' 差 0.5 公厘时，則可以認為是原有光束的空中三角測量，而不計較改变光束系数。如果使用多倍投影測圖仪作業，透光陽片縮小多少倍，則焦距的差数亦可放大多少倍，而不計較改变光束系数。

研究像片野外控制資料时，要了解野外控制点是用什么方法（圖解法或解析法）測定的，了解測定野外控制点的平面位置和高程的精度，了解是那一个座标系統起算的，以及控制点的高程是根据那一个水准原点起算的。

研究空中三角網測量資料的質量時，要了解這些資料是用什麼儀器測量的，是改變光束還是原有光束作業，相對定向後剩餘的上下視差是多大，模型測量的精度如何。發現模型測量過程中所產生的各種不正常的現象時，均應在模型測量手簿上寫出意見。

檢查模型測量手簿的目的，是檢查各點的座標和高程的平均值是否有錯，檢查時要非常仔細。檢查每一個數字，防止只看個位十位而不看百千數所引起的錯誤。

檢查坐標和高程平均值的計算之後，在測量手簿上注明：「高程和座標平均值已檢查。技術員××× 195 ×. ×. × ×.」這樣的注記要寫在每條航綫測量結果的末端。

所有測量手簿都應正確整飾，各頁都要編號。手簿應經區隊長和作業員簽字，並應注明圖幅編號等。

當各點的平面位置是直接刺下的而不是讀出座標的情況下，為了確定比例尺改正系數那就必須準備一塊以一定比例尺展繪控制點的圖板。同時這圖板也供縮小投影空中三角網歸化平面比例尺之用。

此外還要準備透明紙，有色墨水等。

§ 3. 比例尺改正系數之計算 為此，每條航綫必須有四個以上具有大地位置的控制點（如圖6）。

根據下列公式計算比例尺改正系數

$$K = \frac{D_r}{D_\phi} \quad (10)$$

式中： D_r ——控制點間的大地距離（以公尺計）；

D_ϕ ——相應控制點之間在模型上的距離（以公尺計）。

用下列公式計算 D_r 和 D_ϕ ：

$$D_r = \sqrt{\Delta x_r^2 + \Delta y_r^2 + \Delta z_r^2}$$

$$D_\phi = \sqrt{\Delta x_\phi^2 + \Delta y_\phi^2 + \Delta z_\phi^2}$$

式中： $\Delta x_r, \Delta y_r, \Delta z_r$ ——兩控制点的大地座标 x, y, z 之差数；

$\Delta x_\phi, \Delta y_\phi, \Delta z_\phi$ ——相应控制点的模型座标 x_ϕ, y_ϕ, z_ϕ 之差数。

实际上 $\Delta x, \Delta y$ 比 Δz 大得很多，即航綫長度比相应点間的高程差大得多，所以上式中 $\Delta z_r, \Delta z_\phi$ 均可捨去，而用下式計算 D_r 和 D_ϕ ：

$$\left. \begin{aligned} D_r &= \sqrt{\Delta x_r^2 + \Delta y_r^2} \\ D_\phi &= \sqrt{\Delta x_\phi^2 + \Delta y_\phi^2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

根据若干方向（綫段）計算比例尺改正系数，取其平均值作为最終值：

$$K_{\text{中数}} = \frac{K_1 + K_2 + \dots + K_n}{n} \quad (12)$$

各个 K 值之間允許的最大差数用下列公式計算：

$$K_{\text{最大}} - K_{\text{最小}} = 0.001 \frac{M}{D_r} \quad (13)$$

式中： M ——成圖比例尺分母；

D_r ——以公尺計的航綫長度。

如果構作空中三角網时，平面位置是用圖解縮小投影的方法得到的，那末此时就沒有求出 x_ϕ, y_ϕ ，因而就不能用計算法進行高程平差：只能用圖解法平差。

当航攝仪焦距和投影器焦距相等时，空中三角網的平