高等院校经济管理学科
数学基础系列教材 / 主 编 刘书田

概率论与数理统计

P(A) E(X)

主 编 李博纳
编著者 李博纳 许 静 张立卓

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

管理学科
数字基础系列教材 / 主编　刘书田

概率论与数理统计

主　编　李博纳
编著者　李博纳　许　静　张立卓

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/李博纳,许静,张立卓编著. —北京: 北京大学出版社,2006.6
(高等院校经济管理学科数学基础系列教材)
ISBN 7-301-10579-7

Ⅰ. 概… Ⅱ. ①李… ②许… ③张… Ⅲ. 概率论-高等学校-教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 016717 号

书　　名: 概率论与数理统计
著作责任者: 李博纳　许　静　张立卓　编著
责 任 编 辑: 曾琬婷
标 准 书 号: ISBN 7-301-10579-7/O・0683
出 版 发 行: 北京大学出版社
地　　址: 北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址: http://www.pup.cn
电　　话: 邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021
电 子 信 箱: zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者: 北京大学印刷厂
经　销　者: 新华书店
787mm×960mm　16 开本　18.25 印张　404 千字
2006 年 6 月第 1 版　　2006 年 6 月第 1 次印刷
印　　数: 0001—4000 册
定　　价: 28.50 元

内 容 简 介

本书是本科经济管理类数学基础课“概率论与数理统计”的教材，难度定位在当前流行教材的深浅之间，使读者根据需要多一种选择。教材沿袭传统理论体系，因为其经过了历史的推敲。本书共分十章，内容包括：随机事件与概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、数字特征、大数定律与中心极限定理、抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等。此外，本书还介绍了数据采集与分析的基本方法及通过电脑程序作统计分析的简单方法。

“概率论与数理统计”是学生接触的第一门以不确定性现象为研究对象的学科，对概念、定理缺少感性认识，加上对术语的陌生，是学生学习困难较大的主要原因。本教材力求讲出概念与定理的本质涵义，讲出概率思想，且在知识点的讲解中注意思路、层次清晰，由浅入深，举重若轻，好教好学。书后习题答案给出了较详细的解题思路提示，而非解题过程，以求更有利于读者学习。

本书也可作为高等院校非数学专业本科生“概率论与数理统计”课程的教材或教学参考书。

《高等院校经济管理学科数学基础系列教材》
编审委员会

高等院校经济管理学科数学基础系列教材书目

微积分	刘书田等编著	定价 32.00 元
线性代数	卢　刚等编著	定价 24.00 元
概率论与数理统计	李博纳等编著	定价 28.50 元
微积分解题方法与技巧	刘书田等编著	定价 25.00 元
线性代数解题方法与技巧	卢　刚等编著	定价 22.00 元
概率论与数理统计解题方法与技巧	张立卓等编著	定价 22.00 元
高等数学解题方法与技巧	胡京兴等编著	定价 25.00 元

前　言

当前，我国高等教育蓬勃发展，教育改革不断深入，高等院校经济管理学科数学基础课的教学理念、教学内容及教材建设也孕育在这种变革之中。为适应高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革的总目标，培养具有创新能力的高素质人才，我们应北京大学出版社的邀请，经统一策划、集体讨论，并分工编写了这套《高等院校经济管理学科数学基础系列教材》，其中包括：《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》。

本套教材参照教育部本科《经济数学基础教学大纲》，按照"加强基础、培养能力、重视应用"的指导方针，为培养"厚基础、宽口径、高素质"的人才，力求实现基础性、应用性、前瞻性的和谐与统一，集中体现了编写者长期讲授经济管理学科数学基础课所积累的成功教学经验，反映了当前本科数学基础课的教学理念和教学内容的改革趋势。具体体现在以下几个方面：

1. 精心构建教材内容。本教材在内容选择方面，既考虑了数学的科学性、系统性、逻辑性，又汲取了国内外优秀教材的优点，对传统的教学内容在结构和内容上作了适当的调整，更紧密了各章内容之间的内在联系，注意了数学基础课与相关专业课的联系，为后续课程打好坚实的基础。

2. 按照认知规律，以几何直观、经济解释或典型例题作为引入数学基本概念的切入点；对重要概念、重要定理、难点内容从多侧面以辩证思维进行剖析，讲透它们的本质涵义，便于学生理解。教材叙述深入浅出、通俗易懂，行文严谨、逻辑性强，富有启发性，便于教学与自学。

3. 强调基础训练和基本能力的培养。紧密结合概念、定理和运算法则配置丰富的例题，并剖析一些综合性例题。按节配有适量习题，每章配有总习题，书末附有答案与提示，便于读者参考。

4. 注重学以致用，特别是经济与管理领域中的应用。通过分析具有典型意义的经济应用例题和配置多样化习题，以培养学生应用数学知识分析和解决实际问题的能力。

5. 为使学生更好地掌握教材的内容，提高分析和解决问题能力，我们编写了配套的辅导教材：《微积分解题方法与技巧》、《线性代数解题方法与技巧》、《概率论与数理统计解题方法与技巧》。教材与辅导教材相辅相成，同步使用。该辅导教材按题型特点着重讲

授解题思路、解题方法和解题技巧，可作为参加考研学生的一本无师自通的复习指导书。

本书第一至八章由李博纳编写，第九、十章由许静编写，张立卓提供了第三至六章的习题。

本套教材在编写过程中，同行专家和教授提出了许多宝贵建议，王实等作了很多辅助工作。在此一并致谢！

限于编者水平，书中难免有不妥之处，恳请读者指正。

编　者

2006 年 3 月

目　录

第一章 随机事件与概率

本章首先介绍"概率论"中用到的基本概念和术语，然后介绍随机事件之间的关系以及概率的基本关系式，最后介绍应用非常广泛的两类概率问题：等可能概型、n 重伯努利概型.

本章是学习"概率论与数理统计"的基础.

§1.1 随 机 事 件

一、随机现象与频率稳定性

让我们先来了解"概率论与数理统计"这门课程研究的对象和内容.

在自然界与人类社会普遍存在着两类现象. 一类为确定现象，指的是在一定条件下，事情没有发生之前就清楚结果. 另一类为不确定现象，指条件相同，事情的结果却不一定，即在事情发生之前，不清楚哪一个结果会发生. 例如，手拿一枚硬币，松开手，硬币往下落；种瓜得瓜，种豆得豆. 这些均为确定现象. 但是，当我们关心的结果是落下去的硬币哪一面朝上，或瓜长多大，豆结多少时，尽管条件相同，结果却不唯一，事前难以确定什么结果发生. 又如保险公司，投保人数一定，一年中的索赔人数却不能确定. 再如一个国家一年的国内生产总值 GDP，为了保证适度增长，采取相应的金融政策，控制投资规模等手段，期望达到预期目标. 然而在发生之前，都难以确定结果. 这些都是不确定现象，也称为**随机现象**.

事实上随机现象并不是一切都不确定，其也有确定的一面. 以掷一枚均匀硬币为例，历史上多位数学家做过掷硬币的试验(见表 1.1)，发现随着投掷次数的增多，正面朝上的次数 n_1 与投掷次数 n 的比值 $\frac{n_1}{n}$(称为频率)越来越接近 $\frac{1}{2}$. 随机现象的这一规律，即随着试验次数的增多，一个结果发生的频率越来越接近一个确定的数值，称为**频率稳定性**，也称做**统计规律性**. "概率论与数理统计"研究的是随机现象的统计规律性.

表 1.1

实验者	试验次数 n	正面朝上次数 n_1	频率
德·摩根(De Morgan)	2048	1061	0.5181
蒲丰(Buffon)	4040	2048	0.5069
皮尔逊(Pearson)	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

二、随机试验和样本空间

随机现象的统计规律性是在大量重复试验中体现出的规律，研究随机现象的最好方法就是试验与观察，为此给出下面的定义.

定义 对随机现象做试验或观察，且具有如下三个特点：

(1) 可以在相同条件下重复进行；

(2) 试验的可能结果不唯一，全部可能结果清楚；

(3) 试验前不能确定哪一个结果发生，

则这种试验或观察统称为**随机试验**(random experiment)，记做 E.

注 关于“相同条件”只能是相对而言，事实上正因为有很多不确定、难以控制的因素影响，才造成了结果的不确定性.

随机试验的每一个结果称为**样本点**(sample point)，记做 ω,e 等.

全部可能结果，即全体样本点组成的集合，称为**样本空间**(sample space)，记为 S.

例 1 看如下随机试验与相应的样本空间：

(1) E_1：掷一颗骰子，观察出现的点数.

样本空间为 $S_1=\{1,2,3,4,5,6\}$.

(2) E_2：一枚硬币掷两次，观察朝上一面的图案. 记字面朝上为正，朝下为反.

样本空间为 $S_2=\{$正正，正反，反正，反反$\}$.

(3) E_3：记录 120 急救站一个小时内接到的呼叫次数.

样本空间为 $S_3=\{0,1,2,\cdots\}$.

(4) E_4：对灯泡做破坏性试验，记录灯泡的寿命.

样本空间为 $S_4=[0,+\infty)$ 或 $S_4=\{t\,|\,t\geqslant 0\}$.

(5) E_5：按户调查城市居民食品、穿衣的支出.

样本空间为 $S_5=\{(x,y)\,|\,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

其中，S_1,S_2 的样本点数为有限个，称为**有限样本空间**；S_3,S_4,S_5 中样本点数为无限个，称为**无限样本空间**. 又 S_3 中样本点可按一定顺序排列，简称可列样本空间. S_4,S_5 中样本点则不可排列.

三、随机事件的概念、关系与运算

在随机试验中人们关心的往往是某一类结果是否发生，如例 1 中的 E_4，看灯泡的寿命是否大于 1000 小时. 记 $A=\{t\,|\,t\geqslant 1000\}$，显然 A 是样本空间 $S_4=[0,+\infty)$ 的一个子集. 在概率论中我们称 $A=\{t\,|\,t\geqslant 1000\}$ 是随机试验 E_4 的一个随机事件.

一般地，随机试验 E 的样本空间 S 的子集，称为 E 的**随机事件**(random event)，通常记为 A,B,C 等.

随机事件发生是常用的一个术语，规定：

随机事件 A 发生的充分必要条件是随机试验时 A 中的一个样本点出现.

利用符号"$\Longleftrightarrow$"表示"充分必要",也称"等价",则随机事件发生的规定可以简记为:

$$\text{随机事件 } A \text{ 发生} \Longleftrightarrow \text{随机试验时 } A \text{ 中的一个样本点出现.}$$

特殊的随机事件:

基本事件 一个样本点构成的事件称为基本事件,记做$\{e\}$或 e;

必然事件 每次试验都必然发生的事件,即样本空间 S,称为必然事件;

不可能事件 每次试验都不会发生的事件,即空集$\varnothing$,称为不可能事件.

严格说必然事件和不可能事件已经不是随机事件.

事件是集合,因此事件的关系和运算就是集合的关系和运算. 例如 A,B 是随机事件,即 A,B 是样本空间的子集,则 A,B 的并集 $A\cup B$,交集 $A\cap B$ 仍然是样本空间的子集,所以 $A\cup B,A\cap B$ 也是随机事件. 在概率论中只是用"事件"这一术语称呼这些集合. 再如事件的包含、相等就是集合的包含、相等,都不是新内容. 在概率论中我们要强调的是从事件发生的角度去理解或定义事件的关系与运算.

设 $A,B,C,A_1,A_2,\cdots,A_n$ 均为随机事件.

1. 事件的包含

从事件发生的角度理解:事件 B 包含事件 A $(A\subset B)\Longleftrightarrow$ 若事件 A 发生,则事件 B 一定发生.

请读者试从集合包含与事件发生的定义证明上述等价关系.

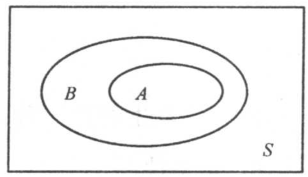

图 1-1

用平面上的区域分别表示样本空间 S 和事件 A,B,称为**文氏图**. 则事件 $A\subset B$ 如图 1-1 所示.

2. 事件相等

如果事件 $A\supset B$ 且事件 $B\supset A$,则称事件 A 与事件 B **相等**,记为 $A=B$.

从事件发生的角度理解:事件 $A=B\Longleftrightarrow$事件 A,B 同时发生.

3. 和事件

事件 $A\cup B$(也记做 $A+B$),称为事件 A,B 的**和事件**.

从事件发生的角度理解:和事件 $A\cup B$ 发生$\Longleftrightarrow$事件 A 发生或事件 B 发生(常称做事件 A,B 至少有一个发生).

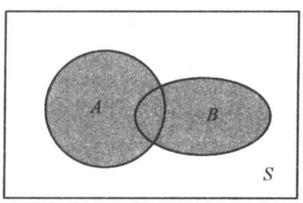

图 1-2

事件 $A\cup B$ 如图 1-2 中阴影部分所示.

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和记做

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1\cup A_2\cup \cdots \cup A_n$$

或

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

从事件发生的角度理解：和事件 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 发生 $\Longleftrightarrow$ 事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生.

无限可列事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和记做

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots \quad 或 \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots.$$

4. 积事件

事件 $A \cap B$（也记做 AB），称为事件 A, B 的**积事件**.

从事件发生的角度理解：积事件 $A \cap B$ 发生 $\Longleftrightarrow$ 事件 A 发生且事件 B 发生（即事件 A，B 同时发生）.

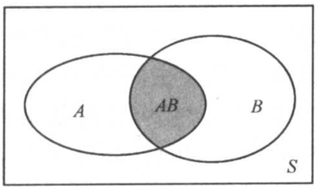

图　1-3

事件 $A \cap B$ 如图 1-3 中阴影部分所示.

n 个事件的积事件记做

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

或

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 A_2 \cdots A_n.$$

无限可列事件的积记做

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots.$$

从事件发生的角度理解：积事件 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 发生 $\Longleftrightarrow$ 事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生.

5. 差事件

事件 $A - B = \{\omega \mid \omega \in A 且 \omega \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差事件**.

从事件发生的角度理解：差事件 $A-B$ 发生 $\Longleftrightarrow$ 事件 A 发生且事件 B 不发生.

事件 $A-B$ 如图 1-4 中阴影部分所示.

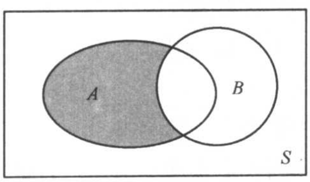

图　1-4

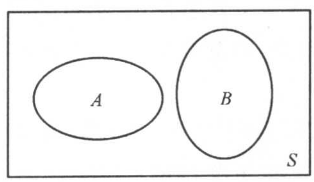

图　1-5

6. 事件互不相容（也称事件互斥）

若 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与 B **互不相容**或**互斥**.

从发生的角度理解：事件 A, B 互不相容 $\Longleftrightarrow$ 事件 A, B 不会同时发生.

事件 A 与 B 互不相容图示如图 1-5.

若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足 $A_i A_j = \varnothing (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, n)$，则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **两两互不相容**，也简称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为互不相容事件.