研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

电磁场与波理论基础

Fundamentals of Electromagnetic Fields and Waves

王一平

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

研究生教学用书
教育部研究生工作办公室推荐

电磁场与波理论基础

王 一 平

西安电子科技大学出版社
2 0 0 6

内 容 简 介

本书是在攻读“电磁场与微波技术”和“无线电物理”学科的研究生用基础课讲义之上经过修改补充而成的。全书共分10章，前8章涵盖了经典电动力学在宏观和微观方面的基础理论，并将二者合而为一；第九、十两章讲述“随机场”和“非线性波”，作为在已有基础上的扩充。在附录中引入了复变函数的鞍点法、路程积分的基本表述。

本书是适用于在无线电物理和光学与电磁场工程领域工作和学习的教师、研究工作者和研究生的基本参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与波理论基础/王一平.

—西安：西安电子科技大学出版社，2002(2006.7重印)

研究生教学用书

ISBN 7-5606-1703-4

Ⅰ.电… Ⅱ.王… Ⅲ.①电磁场-研究生-教材 ②电磁波-研究生-教材

Ⅳ.0441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第072347号

责任编辑 夏大平 孙雪妹

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

http://www.xduph.com E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com

经 销 新华书店

印 刷 西安文化彩印厂

版 次 2002年6月第1版 2006年7月第3次印刷

开 本 787毫米×960毫米 1/16 印张 24.125

字 数 449千字

印 数 2501～4500

定 价 35.00元

ISBN 7-5606-1703-4/O·0080

XDUP 1995001-3

前　言

20年前，本书作者自1980年9月至1981年1月为研究生开设"高等电磁学"课程，随讲授进度编写完成《电磁波理论》讲义共12章。现在经过增删，修改成为本书，共10章及附录，定名为《电磁场与波理论基础》。本书主要叙述物理学的一个重要分支——经典电动力学——的基本原理和方法。

作者认为，科学和技术是内容不同的两个方面，不宜混淆，故本书不涉及应用技术。本书中引用了作者未发表过的讲义和笔记，因而是一种在"场与波"方面教学与科研工作结果的综合，不依赖于某种确定的教学计划大纲要求。

本书和一般同水平的著述不同之处，大体上有如下几个方面。

1. 增加了"随机场"(第九章)和"非线性波"(第十章)两章，这是一种初步的知识扩展。前者选自作者参与写作的《无线电物理中的随机场》(1991)一书，后者选自一些非线性波动方面的专著。

2. 将经典的宏观和微观电动力学的基本原理和方法综合改写，不分为两个部分，而列入介质的电磁性质和电磁辐射之中(第二、四章)；因为经典的微观电磁理论依赖于经典力学概念，一旦出现辐射和自由空间无异。

3. 在"绕射和散射"(第七章)中增加了"锥散射"和"几何射线法"。后者在飞行器形状设计中取得了相当大的成就。并且在这一章中较多地讲述了复变函数方法的应用，又在附录里做了补充。

4. 关于电磁导波方面，对常规波导叙述较略，而着重介绍了光纤。因为后者应用很广，作者认为有必要介绍它的基础理论。

此外，在Maxwell方程的导出中采用了最简捷的方法，用磁激等离子体和磁激铁氧体与电磁波的相互作用来具体说明各向异性介质的特性，也是本书不同于一般教科书之处。

阅读本书的背景知识为大学理工科的物理学，特别是电磁学、分析力学和近代物理基础，以及系统的高等应用数学基础，特别是线性矢量场分析、复变函数方法和数学物理方程。

作者

2001年10月

作者简介：**王一平**，原名王尔杰。四川成都人。1925年生，1947年武汉大学电机系毕业。现为中国电子学会会士，西安电子科技大学离休教授。

目　　录

第一章　电磁场的普遍定律

1.1 Maxwell 方程

1.1.1 静电场的散度和旋度

已知静电场的 Coulomb 定律为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\boldsymbol{r}\text{①}$$

其中常数 ε_0 是真空（自由空间）的电容率。

对连续分布电荷，上式成为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho\,\mathrm{d}V'}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1-1}$$

这里，我们用 V' 表示在电荷源区的体积，ρ 是体积电荷密度。

1. 求散度

由式(1－1)得

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{E}&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\nabla\cdot\frac{\rho\boldsymbol{r}}{r^3}\,\mathrm{d}V'\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\left[\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\nabla\rho(x',y',z')+\rho\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right]\mathrm{d}V'\\&=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\rho\nabla^2\left[\frac{1}{r}\right]\mathrm{d}V'\end{aligned}$$

这是因为，∇ 作用于场点(x, y, z)，对源点(x', y', z')，$\nabla\rho(x', y', z')=0$，见图 1－1。考虑到$\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=-\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$，再计及$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$（见本章附录1），于是

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\rho(x',y',z')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V'$$

---

① 关于 $E\sim\frac{1}{r^n}$，Cavendish 在 1711 年和 Coulomb 在 1785 年的扭秤实验所得的结果是 $n=2\pm0.02$。Maxwell 重做 Cavendish 实验得到 $n=2$ 以后的不定数为 1/21 600。1956 年 S. J. Phinpton 和 W. E. Larvton(Phys. Rev. 50,1066.)实验的精确度使 $n=2$ 以后达 $2/10^9$。

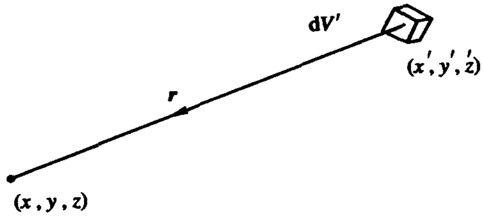

图 1-1

即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1-2}$$

2. 求旋度

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \nabla \times \rho \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\,\mathrm{d}V'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \left[\rho \nabla \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} + \nabla \rho(x', y', z') \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right]\mathrm{d}V'$$

积分式内两项导数均为 0，故得

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{1-3}$$

1.1.2 静磁场的散度和旋度

已知 Biot-Savart 定律为 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times \boldsymbol{r}}{r^3}$，其中常数 μ_0 是真空（自由空间）的导磁率。对连续分布电流，$I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}\rightarrow \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}V$，故 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}V\times \boldsymbol{r}}{r^3}$，而

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\,\mathrm{d}V'$$

1. 求散度

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\right)\mathrm{d}V'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \left[\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot \nabla \times \boldsymbol{J}(x', y', z') - \boldsymbol{J}\cdot \nabla \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right]\mathrm{d}V'$$

即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1-4}$$

2. 求旋度

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{J}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\,\mathrm{d}V' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{J}\times\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V'$$

但当∇作用于场点时

$$\nabla \times \frac{\boldsymbol{J}}{r} = \frac{1}{r}\nabla \times \boldsymbol{J}(x', y', z') - \boldsymbol{J} \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\boldsymbol{J} \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right)$$

故

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \nabla \times \frac{\boldsymbol{J}}{r}\,\mathrm{d}V' = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \iiint \frac{\boldsymbol{J}}{r}\,\mathrm{d}V'$$

因而

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \nabla \times \iiint \frac{\boldsymbol{J}}{r}\,\mathrm{d}V' \\ &= \nabla\left(\nabla \cdot \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{J}}{r}\,\mathrm{d}V'\right) - \nabla^2 \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{J}}{r}\,\mathrm{d}V'\end{aligned}$$

当∇对场点而非对源点求导时，在上式中

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{J}}{r}\,\mathrm{d}V' &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\left[\left(\nabla \frac{1}{r}\right)\cdot \boldsymbol{J} + \frac{1}{r}\nabla \cdot \boldsymbol{J}(x', y', z')\right]\mathrm{d}V' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{J} \cdot \nabla \frac{1}{r}\,\mathrm{d}V' = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint - \boldsymbol{J} \cdot \nabla' \frac{1}{r}\,\mathrm{d}V' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\left[-\nabla' \cdot \frac{\boldsymbol{J}}{r} + \frac{1}{r}\nabla' \cdot \boldsymbol{J}\right]\mathrm{d}V' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \nabla' \cdot \frac{\boldsymbol{J}}{r}\,\mathrm{d}V' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\oiint \frac{\boldsymbol{J}}{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0\end{aligned}$$

其中∇'是对源点求导，而$\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$(因为$\boldsymbol{J}\perp\mathrm{d}\boldsymbol{S}$)；另一方面

$$\begin{aligned}-\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla^2\iiint \frac{\boldsymbol{J}}{r}\,\mathrm{d}V' &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \nabla \cdot \nabla \frac{\boldsymbol{J}}{r}\,\mathrm{d}V' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{J}(x', y', z')\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V' \\ &= \mu_0\iiint \boldsymbol{J}(x', y', z')\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V'\end{aligned}$$

即

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} \tag{1 - 5}$$

1.1.3 变磁场激发电场

已知 Faraday 定律为$iR=-\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$，其中$i$与$\psi$成右手关系时$iR$为正。但在导线中又依据 Ohm 定律$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$，故

$$iR = \oint i\,\mathrm{d}R = \oint i\frac{\mathrm{d}l}{\sigma\Delta S} = \oint \frac{J}{\sigma}\mathrm{d}l = \oint E\,\mathrm{d}l$$

即

$$-\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1 - 6}$$

将此结果脱离导体推广到空间则有

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

又利用 Stokes 公式对任意 S 得

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1-7}$$

由此还可以导出$\nabla \cdot \boldsymbol{B}=0$。

因为$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \boldsymbol{B}=0$，设场由静止连续变动而非突变，则静止时(例如$t=0$)，$\nabla \cdot \boldsymbol{B}=0$，而由$\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \boldsymbol{B}=0$，可知它与 t 无关，故始终有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1-8}$$

1.1.4 变电场激发磁场

根据$\nabla \times \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$，$\nabla \cdot \boldsymbol{J}=-\frac{\partial \rho}{\partial t}$，$\nabla \cdot \boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$，如认为静场的$\nabla \cdot \boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$，在一般动场不成立，则因$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{B}=\mu_0\nabla \cdot \boldsymbol{J}$，导致$\nabla \cdot \boldsymbol{J}=0$，使$\nabla \times \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}_0$与电荷恒定律$\nabla \cdot \boldsymbol{J}=-\frac{\partial \rho}{\partial t}$两者不一致。所以，作为假定，认为$\nabla \cdot \boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$可推广到一般情形，则有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E}) = \nabla \cdot \left(\boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = 0$$

可见，应在 $\boldsymbol{J}$ 之后再加上一项 $\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$。故修改式(1-5)而得

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1-9}$$

计及 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$，则全部 Maxwell 定律的微分形式为

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1-10a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1-10b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1-10c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1-10d}$$

它不仅适用于自由空间，而且也适用于各向同性均匀介质的情形。在电容率和导磁率与场量无关时它是一组线性偏微分方程。

还有一个与式(1-10)相对应的积分形式是

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-11a}$$

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-11b}$$

$$\oiint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{1-11c}$$

$$\oiint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint \rho \,\mathrm{d}V \tag{1-11d}$$

1.1.5 Lorentz 力

Lorentz 力密度

$$\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{E} + \rho\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B} \tag{1-12a}$$

或

$$\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \tag{1-12b}$$

1.1.6 电荷守恒

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1-13}$$

最后，必须指出，由于电磁场是矢量场，它的唯一性已有数学结论，在此不专门讨论它的唯一性问题。

1.2 能量和动量定理

1.2.1 能量定理

设 U_M 是体系的机械能，则 $\frac{\mathrm{d}U_M}{\mathrm{d}t} = \iiint \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{V} \,\mathrm{d}V$ 是带电体运动电荷受场力而引起的机械能变率(注意区别 $\boldsymbol{V}$ 和 V，$\boldsymbol{V}$ 是速度)。

在电磁场中由式(1－12)$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\rho\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}$，故

$$\frac{\mathrm{d}U_M}{\mathrm{d}t} = \iiint (\rho\boldsymbol{E} + \rho\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{V} \,\mathrm{d}V = \iiint \rho\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{E} \,\mathrm{d}V$$

(引用了 $\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{V}=0$)。

但由式(1－9)

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0\rho\boldsymbol{V} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

故

$$\rho\boldsymbol{V} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

代入则得

$$\begin{aligned}\iiint \rho\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{E} \,\mathrm{d}V &= \iiint \left(\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \cdot \boldsymbol{E} \,\mathrm{d}V \\ &= \iiint \left\{ \frac{1}{\mu_0}[(\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{B} - \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})] - \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{E} \right\} \mathrm{d}V\end{aligned}$$

而$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$，故

$$\iiint\rho\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V=-\iiint\left(\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{B}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}\right)\mathrm{d}V-\frac{1}{\mu_0}\iiint\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\,\mathrm{d}V$$

计及$\boldsymbol{D}=\mu_0\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$，则

$$\iiint\rho\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V=-\iiint\left(\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{H}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}\right)\mathrm{d}V-\iiint\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\,\mathrm{d}V \tag{1-14a}$$

或者

$$\iiint\rho\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V=-\iiint\left(\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{H}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}\right)\mathrm{d}V-\oiint\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-14b}$$

式(1－14)不仅在自由空间成立，在有各向同性均匀介质的情况下也成立。

在自由空间的情况下，如命

$$W_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2,\quad W_m=\frac{1}{2}\mu_0H^2 \tag{1-15a}$$

分别表示场所在空间的电能和磁能体密度。

又，如用$u_{em}=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\dfrac{1}{2}\mu_0H^2$表示电磁能体密度后，可将式(1－14)写为

$$\iiint\rho\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint u_{em}\,\mathrm{d}V=-\oiint\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-15b}$$

而

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{1-16}$$

称为 Poynting 矢量。它代表电磁能流密度，即穿过单位面积的功率。

如电磁场存在于有限区域则$\oiint_{\infty}(\quad)=0$，于是

$$\frac{\mathrm{d}U_M}{\mathrm{d}t}=\iiint\rho\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint u_{em}\,\mathrm{d}V=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_{em}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}U_M}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_{em}=0$$

即整体系统的

$$U_M+U_{em}=\text{常量} \tag{1-17}$$

这是能量守恒定律。

1.2.2 动量定理

命$\boldsymbol{G}_M$表示系统的机械动量，则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}_M}{\mathrm{d}t}=\iiint\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}V$$

但$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\rho\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}$，且$\rho=\nabla\cdot\boldsymbol{D}$，$\rho\boldsymbol{V}=\boldsymbol{J}=\nabla\times\boldsymbol{H}-\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$，故

$$\rho \boldsymbol{E} + \rho \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B} = (\nabla \cdot \boldsymbol{D})\boldsymbol{E} + \left(\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) \times \boldsymbol{B}$$

又因$\nabla \cdot \boldsymbol{B}=0$，$\nabla \times \boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=0$，可知$(\nabla \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{H}+\left(\nabla \times \boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\times \boldsymbol{D}=0$。将此式加入上式而得

$$\boldsymbol{f} = (\nabla \cdot \boldsymbol{D})\boldsymbol{E} + (\nabla \times \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{B} + (\nabla \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{H} + (\nabla \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{D} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) \qquad (1-18)$$

通过直接计算可以证明

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E})\mathbf{I}\right] = (\nabla \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{D}$$

其中$\mathbf{I}=\hat{x}\hat{x}+\hat{y}\hat{y}+\hat{z}\hat{z}$称为单位并矢，而$\wedge$表示单位矢。且

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{D}\boldsymbol{E}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{D})\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{D} \cdot \nabla) \times \boldsymbol{E}$$

$$(\boldsymbol{D} \cdot \nabla)\boldsymbol{E} = (\nabla \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{D} = (\nabla \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{D}$$

例如，在自由空间即$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$的条件下，上面第一等式的左方是

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E})\mathbf{I}\right] &= \nabla \frac{1}{2}(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\nabla(\varepsilon_0 E^2) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \nabla E^2 + \frac{1}{2}E^2 \nabla \varepsilon_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \nabla E^2 \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \nabla \cdot (E^2\mathbf{I})\end{aligned}$$

右方是

$$(\nabla \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{D} = \varepsilon_0(\nabla \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \nabla E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \nabla (E^2\mathbf{I})$$

所以

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E})\mathbf{I}\right] = (\nabla \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{D}$$

于是

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left[\boldsymbol{D}\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E})\mathbf{I}\right] &= (\nabla \cdot \boldsymbol{D})\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{D} \cdot \nabla)\boldsymbol{E} - (\nabla \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{D} \\ &= (\nabla \cdot \boldsymbol{D})\boldsymbol{E} + (\nabla \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{D}\end{aligned}$$

同理

$$\nabla \cdot \left[\boldsymbol{B}\boldsymbol{H} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H})\mathbf{I}\right] = (\nabla \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{H} + (\nabla \times \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{B}$$

故式(1 - 18)成为

$$\boldsymbol{f} = \nabla \cdot \left[\boldsymbol{D}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{H} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H})\mathbf{I}\right] - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}) \qquad (1-19)$$

如命

$$\Phi = \frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})\mathbf{I}-\boldsymbol{DE}-\boldsymbol{BH}$$

则

$$\boldsymbol{f} = -\nabla\cdot\Phi - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}) \tag{1-20}$$

由此得动量守恒定律

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}_M}{\mathrm{d}t} = -\iiint\nabla\cdot\Phi\,\mathrm{d}V - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}V \tag{1-21}$$

其中并矢式(见本章附录 2)$\Phi=\frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})\mathbf{I}-\boldsymbol{DE}-\boldsymbol{BH}$，称为电磁场动量流密度张量。

如命

$$\boldsymbol{G}_{em} = \iiint\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}V \tag{1-22}$$

表示电磁场的动量，

$$\boldsymbol{g}_{em} = \boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B} \tag{1-23}$$

表示电磁场的动量密度，则在应用并矢分析中的Gauss 定理后，式(1-21)可改写为

$$\iiint\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}V = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}V - \oint\!\!\!\oint\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\Phi \tag{1-24}$$

它表明，系统的力＝电磁场动量减少率＋闭曲面外对闭曲面作用的电磁场表面张力；或者，机械动量的增加率＝电磁动量减少率＋闭曲面外单位时间进入的动量流。

如场存在于有限区域，则 $\oint\!\!\!\oint_{\infty}(\quad)=0$，于是

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}_M}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}V = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{G}_{em}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}_M}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}_{em}}{\mathrm{d}t}=0$$

故

$$\boldsymbol{G}_M + \boldsymbol{G}_{em} = \text{常矢} \tag{1-25}$$

这是动量守恒定律。

1.2.3 讨论两个问题

1. 静电场的张力张量

在静场条件下式(1-24)右方第一项为0，再命 $\mathbf{T}=-\Phi$，则式(1-24)化为

$$\iiint\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}V = \oint\!\!\!\oint\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathbf{T} \tag{1-26}$$

即 S 面内电荷所受的力可归结为在 S 面上场的张力。

如将 $\mathbf{T}$ 分为两个部分，则由 Φ 的表达式可以写为 $\mathbf{T}=\mathbf{T}_e+\mathbf{T}_m$，而得

$$\mathbf{T}_e = \boldsymbol{D}\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})\mathbf{I}$$ 表示电场的张力(单位面积上的)

$$\mathbf{T}_m = \boldsymbol{B}\boldsymbol{H} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})\mathbf{I}$$ 表示磁场的张力

下面只就静电场来做进一步说明，见图 1－2。即只讨论 $\mathbf{T}_e$，如 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{d}S\,\hat{n}$与 $\boldsymbol{E}$ 不同方向，则在单位面积上的张力为

$$\boldsymbol{t} = \hat{n}\cdot\mathbf{T} = (\hat{n}\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})\hat{n}$$

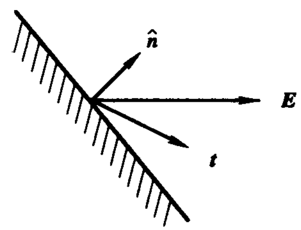

图　1－2

① 它的大小为

$$t^2 = \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t} = \left[(\hat{n}\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})\hat{n}\right]\cdot\left[(\hat{n}\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})\hat{n}\right]$$

$$= (\hat{n}\cdot\boldsymbol{D})^2\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{4}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})^2 - (\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})(\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})(\hat{n}\cdot\boldsymbol{D})$$

当 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ 时，上式右方第一项与第三项大小相等而第二项为$\left[\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\right]^2$，即 $t=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$。可见不论 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 方向如何，在电场中任一点张力大小与电场能量密度相同。

② 它与电场的相对方向为

$$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{E} = \left[(\hat{n}\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})\hat{n}\right]\cdot\boldsymbol{E}$$

$$= \left[(\hat{n}\cdot\boldsymbol{D})E^2 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})(\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})\right]$$

如 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2(\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})$，$\boldsymbol{t}$ 与电场的夹角决定于 $\cos(\widehat{tE})=\frac{\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{E}}{tE}$。

在 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ 时