高中
平面三角
指导复习参考資料

河南人民出版社

高中平面三角指导复习参考資料
郑州市教育局教学研究室編
*
河南人民出版社出版（郑州市行政区經五路）
河南省书刊出版业营业許可証出字第一号
地方国营郃州印刷厂印刷 河南省新华书店发行
*
字总书号：1102
787×1092耗1/32· 4¼ 印张·108,000字
1958年9月第1版 1958年9月第1次印刷
印数·1—11,085册
統一书号：7105.72

定价（5）0.28元

前　言

这一套书共包括高中物理、代数、平面几何、立体几何、三角等五種，是我局組织本市一高、二高、三高、工中、铁中与回中等学校的有关課程教学的教师編写的，并經我局教学研究室審查定稿，原是作为本市高中毕业班教师指导复习以及学生平时結合課本进行复习参考用的。現为了扩大供应，并作为与本省各地高中教师交流对学生复习輔导經驗参考，特由河南人民出版社公开出版。

这套书是从教师輔导同学复习功課的要求出发編写的。为了便于各地教师輔导同学复习参考，特結合課本內容添选了一部分例題；同时也为了便于同学們独立思考，又酌情增加了一部分思考复习題，以便同学們在詳閱課本之后，运算解决。

但由于水平与編写的时間所限，錯誤与不妥之处，在所难免，希望各地教师同志在使用参考中随时提出宝貴意見，以便作进一步修訂。

郑州市教育局

1958年6月

目　　錄

第一部分　三角函数的定义及其基本性質

（一）　三角函数的定义

I．角（或弧）的度量單位及其換算法

1．角度制：等于整个圓的$1/360$的弧是含有一度的弧，而一度的弧所对的圓心角是一度的角，用度作單位来量弧与角的制度叫做角度制，也叫作六十分制。

2．弧度制：等于半径的长的弧叫做含有1弧度的弧，而一弧度的弧所对的圓心角叫做一弧度的角，用弧度做單位来量弧与角的制度叫做弧制度，也叫做徑制。

3．單位換算：据角度与弧度的定义可知2π弧度＝360°就是π弧度＝180°記住这个关系式：可推出以下的两个換算式：

$$1° = \frac{\pi}{180} = 0.017453(\text{弧度})$$

$$1\text{弧度} = \frac{180°}{\pi} = 57°17'44.8''$$

II　圓心角，半徑和弧度間的关系。

以R表圓的半徑，L表示弧长，α表示这弧所对的圓心角的弧度数，根据弧度定义得弧长公式如下：

$$L = R \cdot \alpha$$

例1．求半径为10cm的圆中24°的圆心角所对的弧长。

解：先把24°化为弧度，再用$L=\alpha R$公式来求

即：$L=10\times\frac{24\pi}{180}=\frac{4}{3}\pi\doteq4.189(cm)$

例2．設弧长为50cm所对的圆心角为200°求此弧所在圓的半径。

解：由弧长公式的$R\frac{L}{\alpha}$ ∴半径

$$=\frac{50}{\frac{200\pi}{180}}\doteq1.43(cm)$$

例3．一鉄道轉灣处恰成一圓弧，半径为1公里一列車以每时30公里之速度通过，問10秒間轉过几度。

解：設轉过的度数为$Q°$

∵10秒間轉法的弧长为，$30\cdot\frac{10}{3600}=\frac{1}{12}$（公里），

∴10秒轉过的弧度数$=\frac{1}{12}$，

$$\therefore Q°=\frac{1}{12}\cdot\frac{180°}{\pi}\doteq4.77°$$

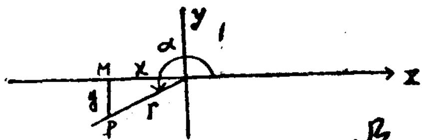
Ⅲ．三角函数之自变量。

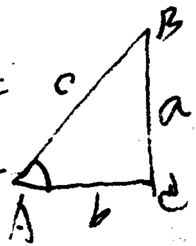
在平面三角学的范疇內角或弧是三角函数的自变量，教本中的第一章，第二节，第二章第十五节，第三章第十八节中逐步的将角的概念推广为任意角，这样就使三角函数的自变量可以是除去那些不允許的值以外的任意实数角度的角（或弧）也可以为任意实数弧度的角（或弧）。

Ⅳ．任意角的三角函数的定义。

設任意角α，以其角頂0为直角坐标系的原点，角

的始边为横坐标之正向OX軸，終边在那一象限則α称为那一象限的角。在角α的終边上任意取一点P(x, y), P点与原点0之距离为r則α的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割的定义如下：





α的正弦——$\sin\alpha=\frac{y}{r}$, $\frac{a}{c}$

α的余弦——$\cos\alpha=\frac{x}{r}$ $\frac{b}{c}$

α的正切——$tg\alpha=\frac{y}{x}$, $\frac{a}{b}$

α的余切——$ctg\alpha=\frac{x}{y}$（或$\cot\alpha$） $\frac{d}{a}$

α的正割——$\sec\alpha=\frac{r}{x}$,

α的余割——$cosec\alpha=\frac{r}{y}$（或$\csc\alpha$）

基于平面几何中相似△对应边成比例的概念，可以看出上面所列六个比值幷不受点P在終边上的位置的影响而当α有（被允許的）确定的值时，它們有对应的确定的值，因此我們将α的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割等叫做角α的三角函数。

（二） 三角函数的性質

I．三角函数的正負符号：

根据上述之定义α之終边所在象限不同，点P之坐标x，y有正負不同，but点p与原点之距离op（r）常为正量之規定，填出下表中的正負号：

α所在象限 \ 函数	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$\sec\alpha$	$cosec\alpha$
Ⅰ$[2k\pi<\alpha<(2k\pi+\frac{\pi}{2})]$						
Ⅱ$[(2k\pi-\frac{\pi}{2})<\alpha<(2k+1)\pi]$						
Ⅲ$[(2k+1)\pi<\alpha<(2k\pi+\frac{3}{2}\pi)]$						
Ⅳ$[(2k\pi+\frac{3}{2}\pi)<\alpha<2(k+1)\pi]$						

（以上表中之k为整数）

原

书

缺

页

原书缺页

原

书

缺

页

原

书

缺

页

$$\sin\alpha=\frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}=\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+m^2},$$

$$\cos\alpha=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{m\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$$

对于第三、四象限之α

$$\operatorname{cosec}\alpha=-\sqrt{1+m^2}\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{m}$$

$$\sin\alpha=\frac{-\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}$$

$$\cos\alpha=-\frac{m\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}$$

$$\sec\alpha=\frac{-\sqrt{1+m^2}}{m}$$

㊂ 用一个三角函数表示其它函数：

例如：用ctgα表示α的其它各三角函数，实际上在上面例题中的m都换为ctgα即得，但解这一类题对于不同象限的α会使已知式有不同的符号，因此在求其余諸函数时也应根据不同象限注意考慮表达式的符号。

（注意）实际上已知一个三角函数值，求其他三角函数值，用三角函数的定义来求較为簡便。

例如：已知$\sin\alpha=\frac{1}{3}$，求其他各三角函数值。

如果纵坐标$y=1$，则距离$r=3$则横坐标

$$x=\pm\sqrt{3^2-1^2}=\pm 2\sqrt{2}.$$

由$\sin\alpha>0$　决定α在象限Ⅰ或Ⅱ。

α在象限Ⅰ时

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$,

$\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\mathrm{ctg}\alpha=\sqrt{2}$.$\sec\alpha=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\mathrm{cosec}\alpha=3$.

α在象限Ⅱ时,

$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{3}$,　　$\mathrm{tg}\alpha=\frac{-1}{\sqrt{2}}$,

$\mathrm{ctg}\alpha=-\sqrt{2}$,　　$\sec\alpha=-\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\mathrm{cosec}\alpha=3$.

(2)同角三角函数恒等式的証明举例

恒等式的一般証法可以分为下列几種，但对不同的問題应注意选择用哪一種方法較为簡捷。

㈠ 把一端变形为另一端。

㈡ 将两端各自变形使均等于第三式。

㈢ 綜合法：即由假設条件或已知恒等式导出求証的恒等式。

㈣ 分析法：即先假定結論正确，用可逆变形化为别的已知恒等式或假設条件来說明結論正确。

注意(1)在証恒等式題目时，除应用三角公式外，还可应用代数式的各種恒等变形如因式分解，分数的化法，比例变形等。

(2)証恒等式时一般均由較繁的一端变形为較簡的一端，若两端均复杂时可以将两端各自变形使均等于

第三式来証明它。

(3)若遇到較难的問題时,除考慮用綜合法或分析法外，还可先将各函数全变形正弦，余弦再变形为求証的形式。

例1．求証：$(1-\mathrm{tg}^2\alpha)^2$

$$=(\sec^2\alpha-2\mathrm{tg}\alpha)(\sec^2\alpha+2\mathrm{tg}\alpha)$$

(証法一)左 $=1-2\,\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^4\alpha$

$$=1+2\,\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^4\alpha-4\,\mathrm{tg}^2\alpha$$

$$=(1+\mathrm{tg}^2\alpha)^2-(2\,\mathrm{tg}\alpha)^2$$

$$=(\sec^2\alpha-2\mathrm{tg}\alpha)(\sec^2\alpha+2\mathrm{tg}\alpha)=\text{右}$$

(証法二)右 $=(1+\mathrm{tg}^2\alpha-2\mathrm{tg}\alpha)(1+\mathrm{tg}^2\alpha+2\mathrm{tg}\alpha)$

$$=(1-\mathrm{tg}\alpha)^2(1+\mathrm{tg}\alpha)^2$$

$$=[(1+\mathrm{tg}\alpha)(1-\mathrm{tg}\alpha)]^2$$

$$=(1-\mathrm{tg}^2\alpha)^2=\text{左}$$

(証法三)左 $=(1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha})^2=\dfrac{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)^2}{\cos^4\alpha}$

$$=\frac{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}$$

$$=\frac{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2-4\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}$$

$$=\frac{1-4\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

右 $=\sec^4\alpha-4\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^4\alpha}-\dfrac{4\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$$=\frac{1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha}=\text{左}$$

故左＝右

例2.求証 $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$

証明：$\because$ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$。

$\therefore$ $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$

$=(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)$

两端以$\cos\alpha(1+\sin\alpha)$除之。

得：$\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$

例3.求証：$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

証明：假設原等式成立

則：$\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=1$。

即：$(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2=1$ $\therefore$ $1^2=1$。

以上各種变形均为可逆。

$\therefore$ 原式成立。

例4.求証$\sin\alpha(1+tg\alpha)+\cos\alpha(1+ctg\alpha)$

$=\sec\alpha+\mathrm{cosec}\,\alpha$

証明：左$=\sin\alpha\left(\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$

$+\cos\alpha\left(\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$

$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$

$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}$

$=\sec\alpha+\mathrm{cosec}\,\alpha=$右

例5.設$a\cos Q+b\sin Q=c$，$a\sin Q-b\cos Q=d$，

求証$a^2+b^2=c^2+d^2$

証明：由假設得：

$$a^2\cos^2Q+b^2\sin^2Q+2ab\sin Q\cos Q=c^2\cdots\cdots㈠$$

$$a^2\sin^2Q+b^2\cos^2Q-2ab\sin Q\cos Q=d^2\cdots\cdots㈡$$

㈠＋㈡得　$a^2+b^2=c^2+d^2$

有些三角不等式也可参考恒等式証法应用不等式的性質来証明。

例6.設$0°<\alpha<90°$求証：

ⓐ$\sin\alpha\cos\alpha\leqq\frac{1}{2}$　　ⓑ$\operatorname{tg}\alpha>\sin\alpha$。

証明：ⓐ$\because$　$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2\geqq 0$

$\therefore$　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\geqq 2\sin\alpha\cos\alpha$

即：$\sin\alpha\cos\alpha\leqq\frac{1}{2}$

ⓑ$\because\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$但$0°<\alpha<90°$故$\cos\alpha<1$

$\therefore\operatorname{tg}\alpha>\sin\alpha$

（3）計值問題举例：

例（1）設$\operatorname{tg}\alpha=2$　求$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$之值。

解：$\because\operatorname{tg}\alpha=2$則$\cos\alpha\neq 0$

$\therefore$　$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)^2$

$$=\frac{1}{\sec^2\alpha}(1+\operatorname{tg}\alpha)^2$$

$$=\frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{9}{5}=1\frac{4}{5}$$

例（2）設$\sin\alpha+\cos\alpha=m$

求$\sin\alpha\cos\alpha$，$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$及$\sin\alpha-\cos\alpha$之值。