

高等数学同步练习册

陈水林 编著

兵器工业出版社

高等数学同步练习册

陈水林 编著

兵器工业出版社

内 容 简 介

本书按照教育部最新《高等数学课程教学基本要求》，结合近几年来高等数学教学改革的发展和变化及编者十几年的教学实践编写而成。内容包括：函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数和微分方程。本书每章由四部分组成：每节同步练习题、全章复习题、考研训练题和自测题。书后附有部分习题参考答案或提示。

本书可供高等院校理工类本科学生使用，对于有志报考研究生的读者，本书也是一本有价值的复习用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步练习册/陈水林编著. —北京：兵器工业出版社，2006.6

ISBN 7-80172-664-2

I.高... II.陈... III.高等数学—高等学校—习题 IV.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 047416 号

出版发行：兵器工业出版社
发行电话：010-68962596, 68962591
邮 编：100089
社 址：北京市海淀区车道沟 10 号
经 销：各地新华书店
印 刷：咸宁市新泉印刷厂
版 次：2006 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
印 数：1-10050

责任编辑：王 强
封面设计：曾 芬
责任校对：郭 芳
责任印制：赵春云
开 本：787×1092 1/16
印 张：18.75
字 数：477 千字
定 价：28.00 元

(版权所有 翻印必究 印装有误 负责调换)

前 言

根据编者多年的教学实践,按照新形势下高等数学教学改革的精神,编者编写了本书。

本书共 12 章,每章包括四个部分:

1. 每节同步练习题:该部分按照教材顺序,针对书上的知识点,配置了适量的同步练习题。该部分题目题型丰富,有是非题、填空题、选择题和计算证明综合题,选题力求使读者对有关的基本概念、重要公式和定理获得深入的理解和全面掌握。

2. 复习题:在这一部分中精选了能反映本章知识综合运用的一定数量题目,使读者通过做复习题,达到对本章知识能灵活运用。此外,为了适应双语教学的发展趋势和配合部分院校双语教学的需要,在此部分中列出了一些有针对性的英文数学题目,该英文数学题目生动有趣。当然,没有接受双语教学的同学,也可做该部分英文题目,以提高自己的数学水平。

3. 考研训练题:在这一部分中精选了部分历年考研真题和一批典型试题,读者通过练习该部分题目,可对考研的要求全面了解,并能提高自己的应试能力。

4. 自测题:在这一部分中精选了能反映教育部最新《高等数学课程教学基本要求》的题目,读者通过练习该部分题目,能了解高等数学的基本要求,掌握高等数学的基本内容。

本书的形式为学生的同步练习本,这样既使高等数学的教学标准化,又给学生提供了更广泛、更新颖的题目,同时也给教师在布置作业、携带作业和批改作业方面带来了方便。本书在我校历经 15 年试用,多次修订而成。

在本书的编写过程中,湖北工业大学理学院领导和数学系的教师提出了许多宝贵的意见和建议,编者在此表示诚挚的谢意。欢迎各位读者提出批评和建议。

陈水林

2006 年 4 月于湖北工业大学

目 录

第一章 函数与极限	1
习题一 映射与函数	1
习题二 数列的极限	5
习题三 函数的极限	7
习题四 无穷小与无穷大	9
习题五 极限运算法则	11
习题六 极限存在准则 两个重要极限	13
习题七 无穷小的比较	15
习题八 函数的连续性与间断点	17
习题九 连续函数的运算与初等函数的连续性	19
习题十 闭区间上连续函数的性质	21
复习题	23
考研训练题	26
自测题	29
第二章 导数与微分	31
习题十一 导数概念	31
习题十二 函数的求导法则	35
习题十三 高阶导数	39
习题十四 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率	41
习题十五 函数的微分	43
复习题	45
考研训练题	47
自测题	49
第三章 微分中值定理与导数的应用	51
习题十六 微分中值定理	51
习题十七 洛必达法则	55
习题十八 泰勒公式	59
习题十九 函数的单调性与曲线的凹凸性	61
习题二十 函数的极值与最大值最小值	63
习题二十一 函数图形的描绘	67
习题二十二 曲率	69
习题二十三 方程的近似解	70

复习题	71
考研训练题	74
自测题	77
第四章 不定积分	79
习题二十四 不定积分的概念与性质	79
习题二十五 换元积分法	83
习题二十六 分部积分法	87
习题二十七 有理函数的积分	89
复习题	91
考研训练题	92
自测题	94
第五章 定积分	95
习题二十八 定积分的概念与性质	95
习题二十九 微积分基本公式	97
习题三十 定积分的换元法和分部积分法	99
习题三十一 反常积分	103
复习题	105
考研训练题	108
自测题	110
第六章 定积分的应用	111
习题三十二 定积分在几何学上的应用	111
习题三十三 定积分在物理学上的应用	115
复习题	117
考研训练题	118
自测题	120
第七章 空间解析几何与向量代数	121
习题三十四 向量及其线性运算	121
习题三十五 数量积 向量积 混合积	123
习题三十六 曲面及其方程	127
习题三十七 空间曲线及其方程	129
习题三十八 平面及其方程	131
习题三十九 空间直线及其方程	133
复习题	135
考研训练题	137
自测题	138
第八章 多元函数微分法及其应用	139
习题四十 多元函数的基本概念	139
习题四十一 偏导数	141
习题四十二 全微分	143

习题四十三	多元复合函数的求导法则	145
习题四十四	隐函数的求导公式	147
习题四十五	多元函数微分学的几何应用	149
习题四十六	方向导数与梯度	151
习题四十七	多元函数的极值及其求法	153
复习题		155
考研训练题		157
自测题		159
第九章 重积分		161
习题四十八	二重积分的概念与性质	161
习题四十九	二重积分的计算法	163
习题五十	三重积分	167
习题五十一	重积分的应用	171
复习题		173
考研训练题		175
自测题		177
第十章 曲线积分与曲面积分		179
习题五十二	对弧长的曲线积分	179
习题五十三	对坐标的曲线积分	181
习题五十四	格林公式及其应用	183
习题五十五	对面积的曲面积分	185
习题五十六	对坐标的曲面积分	187
习题五十七	高斯公式 通量与散度	189
习题五十八	斯托克斯公式 环流量与旋度	191
复习题		192
考研训练题		194
自测题		196
第十一章 无穷级数		197
习题五十九	常数项级数的概念与性质	197
习题六十	常数项级数的审敛法	199
习题六十一	幂级数	203
习题六十二	函数展开成幂级数	205
习题六十三	函数的幂级数展开式的应用	209
习题六十四	傅里叶级数	211
习题六十五	一般周期函数的傅里叶级数	215
复习题		217
考研训练题		220
自测题		222
第十二章 微分方程		223

习题六十六	微分方程的基本概念	223
习题六十七	可分离变量的微分方程	225
习题六十八	齐次方程	227
习题六十九	一阶线性微分方程	229
习题七十	全微分方程	233
习题七十一	可降阶的高阶微分方程	235
习题七十二	高阶线性微分方程	237
习题七十三	常系数齐次线性微分方程	239
习题七十四	常系数非齐次线性微分方程	241
习题七十五	欧拉方程 微分方程的幂级数解法	243
习题七十六	常系数线性微分方程组解法举例	245
复习题		246
考研训练题		249
自测题		252
部分习题参考答案或提示		254

第一章 函数与极限

习题一 映射与函数

一、是非题

1. 设 A, B, C 是任意三个集合, 若 $A \cup B = A \cup C$, 则 $B = C$. ()
2. 设映射 $f: (-\infty, +\infty) \rightarrow [-1, 1]$, 对每个 $x \in (-\infty, +\infty)$, $f(x) = \cos x$, 则映射 f 是满射, 而不是单射. ()
3. 设 $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = x$, 则 $f(x) = g(x)$. ()
4. $y = (2^x + 2^{-x}) \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 是奇函数. ()
5. $y = x^2 (x > 0)$ 是偶数. ()
6. 凡是分段函数都不是初等函数. ()
7. 复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域即 $g(x)$ 的定义域. ()
8. 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内处处有定义, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内一定有界. ()

二、填空题

1. 设 $A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$, 给出 A 到 B 的一个一一映射_____。
2. 若 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 则 $f(x^2 + 1)$ 的定义域是_____。
3. 若 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数, 且在闭区间 $[0, 2]$ 上 $f(x) = 2x - x^2$, 则在闭区间 $[2, 4]$ 上 $f(x) =$ _____。
4. $f(x) = x + 1$, $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 则 $f[\varphi(x) + 1] =$ _____, $\varphi[f(x) + 1] =$ _____。
5. 三个基本初等函数 $y = 3^u$, $u = \sin v$ 和 $v = 2x$ 所构成的复合函数是_____。
6. $y = x^x$ 是由简单函数_____和_____复合而成。

三、选择题

1. 下列函数中既是奇函数, 又是单调增加函数的是()。

A $\sin^3 x$	B $x^3 + 1$
C $x^3 + x$	D $x^3 - x$
2. 设 $f(x) = 4x^2 + bx + 5$, 若 $f(x+1) - f(x) = 8x + 3$, 则 b 应为()。

A 1	B -1	C 2	D -2
-----	------	-----	------
3. $f(x) = \sin(x^2 - x)$ 是()。

A 有界函数	B 周期函数
C 奇函数	D 偶函数

四、求定义域 $y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5}$ 。

五、已知 $f[\varphi(x)] = 1 + \cos x$, $\varphi(x) = \sin \frac{x}{2}$, 求 $f(x)$ 。

六、设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases}$, $g(x) = e^x$, 求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$ 。

七、证明函数 $f(x) = \frac{1+x}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调减。

八、设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加。

九、设映射 $f: X \rightarrow Y, A \subset X, B \subset X$, 证明:

1. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

2. 当 f 是单射时, 有 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

十、某运输公司规定吨公里(每吨货物每公里)运价在 a 公里以内 k 元, 超过 a 公里部分 8 折优惠。求每吨货物运价 m 元和路程 s 公里之间的函数关系。

习题二 数列的极限

一、是非题

1. 在数列 $\{a_n\}$ 中任意去掉或增加有限项, 不影响 $\{a_n\}$ 的极限。 ()
2. 若数列 $\{a_n b_n\}$ 的极限存在, 则 $\{a_n\}$ 的极限必存在。 ()
3. 若数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都发散, 则数列 $\{x_n + y_n\}$ 也发散。 ()
4. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n) = 0$, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ 。 ()
5. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的 $\varepsilon - N$ 定义中的 N 与 ε 有关。 ()
6. 对于任给 $\varepsilon > 0$, 数列 $\{x_n\}$ 中至多有有限项不满足 $|x_n - A| < \varepsilon$, 则 $\{x_n\}$ 以 A 为极限。 ()

二、填空题

1. 数列 $\{x_n\}$ 有界是此数列收敛的_____条件。
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$, 当 n 从_____开始, 有 $\left| \frac{n-1}{n+1} - 1 \right| < 10^{-4}$ 。
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) =$ _____。
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} =$ _____。
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[4 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right] =$ _____。
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} =$ _____。

三、选择题

1. 由下列()条件可得出 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 。
 - A $\forall \varepsilon < 0, \exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \sqrt{\varepsilon}$
 - B $\exists \varepsilon > 0, \forall N (\in \mathbb{Z}^+)$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$
 - C $\forall N > 0, \exists \varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$
 - D $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n \geq N$ 时有无穷个 x_n 使得: $|x_n - a| < \varepsilon$

$$2. x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ 为奇数} \\ 1, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \text{ 则必有()。}$$

- A $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$
- B $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$
- C $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数} \\ 1, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$
- D $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在

3. 下列命题错误的是()。
 - A 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|$ 也存在
 - B 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 也存在
 - C 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |\lim_{n \rightarrow \infty} x_n|$

D 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|$ 不存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 也不存在

四、用“ $\epsilon - N$ ”定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2}$ 。

五、设数列 $\{x_n\}$ 有界, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ 。

六、证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{x_{2k}\}$ 与 $\{x_{2k-1}\}$ 分别收敛于同一极限。

习题三 函数的极限

一、是非题

1. 在某过程中,若 $f(x)$ 有极限, $g(x)$ 无极限,则 $f(x) + g(x)$ 无极限。 ()
2. 在某过程中,若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均无极限,则 $f(x) + g(x)$ 无极限。 ()
3. 在某过程中,若 $f(x)$ 有极限, $g(x)$ 无极限,则 $f(x)g(x)$ 无极限。 ()
4. 在某过程中,若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均无极限,则 $f(x)g(x)$ 必无极限。 ()
5. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $f(x_0) = A$ 。 ()
6. 已知 $f(x_0)$ 不存在,但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 有可能存在。 ()
7. 若 $f(x_0^+)$ 与 $f(x_0^-)$ 都存在,则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 必存在。 ()
8. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = A$ 。 ()
9. 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 。 ()
10. 若 $f(x) > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么 $A \geq 0$ 。 ()

二、填空题

1. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ ax + b, & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(0^+) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(0^-) = \underline{\hspace{2cm}}$, 当 $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ 。
2. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \rightarrow 1$ 。问 $X = \underline{\hspace{2cm}}$, 使得当 $|x| > X$ 时, $|y - 1| < 0.01$?
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ (填“存在”或“不存在”)。

三、选择题

1. 从 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ 不能推出()。

A $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$	B $f(x_0^+) = 1$
C $f(x_0) = 1$	D $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - 1] = 0$
2. 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点有定义是它在该点有极限的()。

A 充分条件	B 必要条件
C 充要条件	D 无关条件

四、根据函数极限的定义证明：

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (5x + 2) = 12$ 。

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5}{x^2 + 1} = 1$ 。

五、设 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ ，回答下列问题：

1. 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的左、右极限是否存在？若存在，求出其值。
2. 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是否有极限？为什么？
3. 函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处是否有极限？为什么？

六、证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$ 不存在。

习题四 无穷小与无穷大

一、是非题

1. 非常小的数是无穷小。 ()
2. 零是无穷小。 ()
3. 无穷大量与有界变量之和为无穷大量。 ()
4. 两个无穷小的商是无穷小。 ()
5. 若 $f(x)$ 为无穷小, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大。 ()
6. 两个无穷大量的和为无穷大量。 ()

二、填空题

1. 设 $y = \frac{1}{x+1}$, 当 $x \rightarrow$ _____ 时, y 是无穷小量, 当 $x \rightarrow$ _____ 时, y 是无穷大量。
2. 设 $\alpha(x)$ 是无穷小量, $E(x)$ 是有界变量, 则 $\alpha(x)E(x)$ 为 _____。
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $[f(x) - A]$ 为 $x \rightarrow x_0$ 的 _____。
4. 用“ $+\infty$ ”、“ $-\infty$ ”、“ ∞ ”或“0”填空: (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x =$ _____。 (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x =$ _____。
(3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} =$ _____。 (4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} =$ _____。 (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x =$ _____。

三、选择题

1. $n \rightarrow +\infty$ 时, 下列数列中() 为无穷大。
A $x_n = 3^n \sin n\pi$ B $x_n = 2^n \cos n\pi$
C $x_n = \frac{2^n}{3^n}$ D $x_n = \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}$
2. 以下命题正确的是()。
A 无界数列必趋于无穷大
B 趋于无穷大的数列必无界
C 趋于正无穷大的数列必在充分大时单调增加
D 不趋于无穷大的数列必有界

四、用无穷小与无穷大的定义证明:

1. $x \sin \frac{1}{x}$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小。
2. $\frac{3x-1}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时为无穷大。