高等学校教材

弹塑性力学中的广义变分原理

河海大学　卓家寿

水利电力出版社

高等学校教材

弹塑性力学中的
广义变分原理

河海大学　卓家寿

水利电力出版社

内容提要

本书系统地介绍固体力学问题的变分原理的推证及其在数值计算中的应用。本着循序渐进的原则阐述了有关变分学和弹塑性力学的基本知识，并从经典的自然变分原理入手推出了广义变分原理和各种形式的修正变分原理。书中在论述小位移弹塑性静力问题中的变分原理和有限元模型的基础上也扼要地介绍了有限位移、稳定、动力以及热应力问题等。书稿选材反映了当前国内外的研究水平和作者的研究成果。本书可作为工科固体力学专业研究生和高年级本科生的教材，也可供从事固体力学工作的同志参考。

高等学校教材

弹塑性力学中的广义变分原理

河海大学 卓家寿

*

水利电力出版社出版

（北京三里河路6号）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

河北省固安县印刷厂印刷

*

787×1092毫米16开本 8.25印张 184千字

1989年11月第一版 1989年11月北京第一次印刷

印数 0001—1390 册

ISBN7-120-00754-8/TV·252

定价 1.50 元

前　言

本书是为适应工科研究生和工程力学专业高年级学生的教学需要，以及有关科研人员自学的要求而编写的。书稿是在原先自编讲义的基础上并经过六年教学实践中的多次修改和补充后而写成的，重点放在固体力学问题的变分描述，主要的变分原理的推证及其在数值计算方面的应用等三个方面。本书共分五章。第一章是概述；第二、三章是系统介绍弹性力学的变分原理及有限元模型，这是本书的基本内容；第四章阐述全量理论和增量理论的塑性力学变分原理及其应用，还讨论了极限分析，这是本书的重要内容；第五章扼要介绍有限位移、稳定、动力以及热应力问题等方面的变分原理，以求拓宽视野，便于读者自行深入学习和研究。

本书承主审人南京工学院余颖禾教授提出十分宝贵的意见，特此表示衷心的感谢。我校张溪常同志参加了本书的校对等方面的工作，在此也一并致以谢意。由于作者水平有限，编写时间较紧，书中错误缺点在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

1988年9月

目　　录

第一章 绪　　论

第一节　弹性力学边值问题的变分描述

众所周知，弹性力学边值问题有两种平行的数学描述方法，即微分描述与变分描述。为了比较，先扼要介绍微分描述的三类基本方程：

第一类是反映物体的平衡规律，简称为平衡律，其微分式为

$$\begin{cases}\sigma_{ij,j}+f_i=0 & (\tau)\\ \sigma_{ij}n_j=\overline{p}_i & (s_\sigma)\end{cases} \tag{1-1}$$

第二类是反映物体的连续性条件，简称为协调律，其微分式为

$$\begin{cases}e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) & (\tau)\\ u_i=\overline{u_i} & (s_u)\end{cases} \tag{1-2}$$

第三类是反映弹性体的本构关系（如应力应变关系），简称为本构律，常用广义虎克定律的表达式，如

$$e_{ij}=b_{ijkl}\sigma_{kl}$$

或

$$\sigma_{ij}=d_{ijkl}e_{kl} \qquad (\tau+s) \tag{1-3}$$

以上方程中的u_i、e_{ij}、σ_{ij}、f_i、$\overline{p}_i$和$\overline{u}_i$分别表示位移、应变、应力、体力、给定面力和给定位移的张量，b_{ijkl}和d_{ijkl}是弹性常数，而τ、s、s_u和s_σ是物体体积、边界面、给定位移的边界面和给定面力的边界面，n_j是边界面外法线的方向余弦。

弹性力学边值问题的变分描述早见于能量原理，例如，最小势能原理中的极值条件就是用能量形式表示物体的平衡律，其变分式为

$$\delta\Pi_p=0, \qquad \delta^2\Pi_p>0 \tag{1-4}$$

其中Π_p是物体的总势能，它是容许位移函数u_i的函数，又称为势能泛函，其算式为

$$\Pi_p=\Pi_p(u_i)=\iiint_\tau \frac{1}{2}d_{ijkl}e_{kl}e_{ij}d\tau-\iiint_\tau f_iu_id\tau-\iint_s \overline{p}_iu_ids$$

u_i是自变函数，但不是完全自由变化的，而是“容许”的位移，即受协调律的约束的位移：

$$\begin{cases}e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) & (\tau)\\ u_i=\overline{u_i} & (s_u)\end{cases}$$

应用最小势能原理可以直接求出物体的位移，若选取的u_i事先满足协调律，分析过程中又遵循本构律，则由式（1-4）求得的u_i必是真解，这就说明式（1-4）反映的恰是物体的平衡律，它与式（1-1）完全等价，其严格证明将见于后面有关章节。

类似地可以认为最小余能原理的极值条件则是反映物体的协调律，其变分式为

$$\delta \Pi_c=0, \qquad \delta^2 \Pi_c>0 \tag{1-5}$$

$$\Pi_c=\Pi_c(\sigma_{ij})=\iiint_\tau \frac{1}{2} b_{ijkl}\sigma_{kl}\sigma_{ij}d\tau-\iint_{s_u}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i ds$$

约束条件

$$\begin{cases}\sigma_{ij,j}+f_i=0 & (\tau)\\ \sigma_{ij}n_j=\bar{p}_i & (s_\sigma)\end{cases}$$

Π_c为物体的总余能泛函，$\delta\Pi_c=0$条件等价于协调律（1-2）。

由此看来，利用变分描述和求解弹性力学边值问题是可能的和有效的，这个结论还可推广到塑性力学和连续介质力学问题，近年来，随着数值解法的迅速发展，连续体问题的变分提法愈来愈普遍和深入了。

第二节　固体力学中变分原理的定义和分类

1.定义

设考察的物体存在下列形式的泛函

$$\Pi(u_i)=\iiint_\tau F(u_i,\ u_{i,j},\cdots)d\tau+\iint_s E(u_i,\ u_{i,j},\ \cdots)ds$$

若由$\Pi(u_i)$的驻值条件$\delta\Pi=0$能求得该连续体问题的解，则定义描述上述过程的定理统称为变分原理。

2.自然变分原理与广义变分原理

对于可以直接表达连续体的物理本质的变分原理，如最小势能原理、最小余能原理等，称之为“自然”变分原理，这类变分原理往往带有约束条件的，且对自变函数的连续性和可导性有一定的要求，为此也限制了这类变分原理的应用范围。

为了消除或放松约束条件，引进某种方法（如待定的Lagrange乘子法等）“人造”出一类变分原理，使得自变函数的变化不受或少受限制，称这类变分原理为广义变分原理，如最小势能原理中的势能泛函的自变函数u_i是受到式（1-2）约束的，如“人造”一个新的泛函，并采用Lagrange乘子法，将反映约束的条件吸收到新的泛函中，如下式所示

$$\Pi_p^*=\Pi_p+\iiint_\tau \alpha_{ij}\left[\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})-e_{ij}\right]d\tau+\iint_{s_u}\beta_i(u_i-\bar{u}_i)ds$$

则此时的u_i就不再受式（1-2）的约束了。业已证明，由$\delta\Pi_p^*=0$驻值条件得到的解答将和$\delta\Pi_p=0$的解答相同，这就使广义变分原理立足于可靠的基础上扩大了变分原理应用的范围。广义泛函中的自变函数的可选空间的扩充（不仅限制少了，而且还可以是广义函数，具有某些不连续性），大大丰富了有限单元的形态和解法，这也是人们近年来重视广义变分原理研究的主要原因。

第三节　变分原理的优点

1）经受变分的泛函通常具有明确的物理意义，且不随坐标变换而变化（如能量泛函）；

此外，在某些问题中，它比微分形式更能反映客观实际（如集中荷载作用的描述等）。因此变分原理的应用范围很广；

2）往往存在一整族彼此等价的变分原理，例如一些有约束条件的变分原理可以采用待定的Lagrange 乘子法转换为比原来更易求解的各种等价的变分原理，这就为数值计算带来了灵活性和多样化；

3）变分原理可以为连续体提供一个近似解。这种近似解通常是以某种积分加权平均形式去近似微分关系式的；其近似途径有时是对基本微分方程取逼近方程，有时是对边界方程采用某种范围内的放松；只要处理得当，可以得到与工程结构精度相适应的解，有些情况下还可以提供精确解的上界和下界。

第二章　变分法的若干基本概念

第一节　变分法问题的简例

作为变分法最简单的例子是求解平面上两定点最短连线的问题。图2-1给出平面上任意两点$P_0(x_0, y_0)$与$P_1(x_1, y_1)$，若连接这两点的任意曲线为$y=y(x)$，则其弧长由下式决定

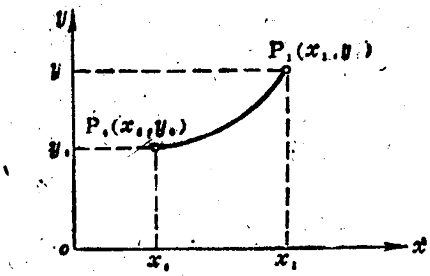

图 2-1

$$L[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

连接P_0，P_1两点的曲线有无数条，并有与它一一对应的弧长L，本问题是要在这样的曲线中求出使弧长L是最短的一条。若用数学的语言来描述这个问题，要建立两个概念：

1）弧长L是随$y(x)$的改变而改变的，即$L=L[y(x)]$，则弧长是函数$y(x)$的函数，称L是$y(x)$的泛函，它的自变量是一函数$y(x)$；

2）曲线$y(x)$是在某一个函数类（满足给定的连续性与边界条件）中变化的，如把这个函数类称为容许函数，则上述两定点最短线问题就是在容许函数中求出使给定的泛函$L[y(x)]$为极值的特定函数$y^*(x)$，这种研究泛函极值（或更广义地用驻值Stationary Value）的方法就是所谓变分法，而研究泛函极值（或驻值）的近似方法就是所谓变分方法。

第二节　函数与泛函

鉴于泛函的定义、性质和求驻值与极值的方法与函数有很多相似之处，下面从几个方面作平行介绍。

（1）函数的定义

当$y=f(x)$

其中　$x\in X$（数集）

　　　$y\in Y$（数集）时

称y是x的函数，X是它的定义域，Y是它的值域。

（1）泛函的定义

当$I=I[y(x)]$

其中　$y(x)\in R_1$（函数集合）

　　　$I\in R_2$（实数集合）时

称I是$y(x)$的泛函，R_1是泛函的定义域，R_2是它的值域。

泛函是因变量I与自变函数$y(x)$的关系。

（2）自变量x的微分

（2）泛函自变量$y(x)$的变分

x在x_1附近的增量为

$$\Delta x = x - x_1$$

当这种增量很小很小时，Δx即为自变量的微分dx。

（3）函数的连续性

对于$y=f(x)$，任给一个数ε，可以找到一个δ，当$|x-x_1|<\delta$时能使$|y(x)-y(x_1)|<\varepsilon$，就说$y(x)$在$x=x_1$处连续。

（4）线性函数

当$y=f(x)$满足

1） $f(\alpha x)=\alpha f(x)$

α为任意常数

2） $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$

时称$f(x)$为线性函数。

（5）函数的微分

第一种定义。设函数为$y=f(x)$，其增量

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$$
$$=A(x)\Delta x+\beta(x,\ \Delta x)\Delta x$$

其中$A(x)$与Δx无关，$\beta(x,\ \Delta x)$与Δx有关，故$A(x)\Delta x$为线性项，$\beta(x,\ \Delta x)\Delta x$为非线性项。当$\Delta x\to 0$时，$\beta(x,\ \Delta x)\to 0$，这时可称$y(x)$是可微的。其线性部分就称为函数的微分$dy=A(x)\Delta x=f'(x)dx$。可见$dy$是$\Delta y$的线性主部。

$y(x)$又可称为$I[y(x)]$的宗量，它在$y_1(x)$附近的增量很小时，其增量称为变分，用$\delta y(x)=y(x)-y_1(x)$表示。$y(x)$接近$y_1(x)$的情况可有不同的接近度，如只保证$\delta y(x)$很小，而$\delta y'(x)=y'(x)-y'_1(x)$并不小，则称为零阶接近度；如使两条曲线之间处处保证$\delta y(x)$和$\delta y'(x)$都很小，则称一阶接近度；如能使$\delta y=\varepsilon\eta(x)$，$\delta y'=\varepsilon\eta'(x)$，$\delta y''=\varepsilon\eta''(x)$，……，$\delta y^{(k)}=\varepsilon\eta^{(k)}(x)$，则当$\varepsilon\to 0$时，$y(x)$具有$k$阶接近度。接近度阶数愈高，其曲线接近情况愈好。

（3）泛函的连续性

对于$I=I[y(x)]$，任给一个正数ε，可以找到一个δ，当$|y(x)-y_1(x)|<\delta$，$|y'(x)-y'_1(x)|<\delta$，……$|y^{(k)}(x)-y_1^{(k)}(x)|<\delta$时能使$|I[y(x)]-I[y_1(x)]|<\varepsilon$，就说$I[y(x)]$在$y(x)=y_1(x)$处$k$阶接近地连续。

（4）线性泛函

当$I=I[y(x)]$满足

1） $I[\alpha y(x)]=\alpha I[y(x)]$

α为任意常数

2） $I[y_1(x)+y_2(x)]=I[y_1(x)]+I[y_2(x)]$时，称$I[y(x)]$为线性泛函。

（5）泛函的变分

第一种定义。设泛函为$I=I[y(x)]$，其增量

$$\Delta I=I[y(x)+\delta y(x)]-I[y(x)]$$
$$=L[y(x),\ \delta y(x)]+\beta[y(x),$$
$$\delta y(x)]\cdot\max|\delta y(x)|$$

其中$L[y(x),\delta y(x)]$是线性泛函项，$\beta[y(x),\delta y(x)]\cdot\max|\delta y(x)|$是非线性泛函项，当$\delta y(x)\to 0$时，有$\max|\delta y(x)|\to 0$和$\beta[y(x),\ \delta y(x)]\to 0$，故$\delta I=L[y(x),\ \delta y(x)]$是$\Delta I$的线性主部，称$\delta I$为泛函的一阶变分。

第二种定义

$$dy=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f(x+\varepsilon\Delta x)|_{\varepsilon\to 0}$$

$$=f'(x+\varepsilon\Delta x)\Delta x|_{\varepsilon\to 0}$$

$$=f'(x)dx$$

（6）函数的驻值与极值

1）函数$y=f(x)$可微，且在$x=x_0$处有极值时，则在$x=x_0$处必有$dy=f'(x_0)dx=0$

2）当$dy|_{x=x_0}=0$时，称该处的函数值$y=f(x_0)$为驻值，若在$x=x_0$处附近的函数值都不大（小）于$y=f(x_0)$时，称$y=f(x_0)$为极大（小）值。

极值必是驻值，驻值不一定是极值，驻值包括极值和非极值的驻值。

3）函数$y=f(x)$取得极值的必要条件是$dy=0$或$f'(x)=0$，而其充分条件还要由$f''(x)$值来判定。

对于一元函数，若它在点x有若干阶连续导数，则由Taylor公式

$$f(x+\Delta x)=f(x)+df+\frac{1}{2!}d^2f+\cdots$$

那么$f(x)$在x处达到极值的充分条件是

$$\begin{cases}df=0 & \text{即}f'(x)=0\\ d^2f\neq 0 & \text{即}f''(x)\neq 0\end{cases}$$

当$f''(x)<0$时，$f(x)$为极大，当$f''(x)>0$时，$f(x)$为极小，而当$f''(x)=0$时，$f(x)$不定，可能为极大，也可能为极小，也可能无极值。

第二种定义

$$\delta I=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}I[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]|_{\varepsilon\to 0}$$

（6）泛函的驻值与极值

1）泛函$I=I[y(x)]$可变分，且在$y=y_0(x)$处达到极值，则在$y=y_0(x)$处必有$\delta I=L[y_0(x),\ \delta y(x)]=0$，称$y=y_0(x)$为极值函数（曲线）

2）当$\delta I=L[y_0(x),\ \delta y(x)]=0$时称$y=y_0(x)$处的泛函值$I[y_0(x)]$为驻值。若在$y=y_0(x)$附近（可能为零阶接近度，可能为一阶接近度）的泛函值都大不（小）于$I[y_0(x)]$时，则称$I=I[y_0(x)]$为极大（小）值（对于零阶接近度称强变分极值，对于一阶接近度称弱变分极值）

3）泛函$I=I[y(x)]$取得极值的必要条件是：

$$\delta I=L[y(x),\ \delta y(x)]=0$$

而其充分条件要讨论二阶泛函值。

设泛函 $I=\int_a^b F(x,y,y')dx\ (a\leqslant x\leqslant b)$

$y|_{x=a}=\alpha,\ y|_{x=b}=\beta$ 则

$$\delta I=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dy$$

$$\delta^2 I=\int_a^b\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\delta y^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\delta y\delta y'+\frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2}(\delta y')^2\right)dx$$

这个泛函取极值的充分条件是

$$\begin{cases}\delta I=0\\ \delta^2 I\neq 0\end{cases}$$

其中$\delta^2 I<0$，I有弱极大值，$\delta^2 I>0$，I有弱极小值，而$\delta^2 I=0$，I可能有极值，也可能没有极值。

若$\delta^2 I$可正，可负，则I不会有极值，只能有驻值。

第三节　变分的若干运算性质

设有泛函$F\Big(x,\ y(x),\ y'(x)\Big)$，考虑$x$是固定的，则$F$在$y(x)$处的增量为

$$\Delta F=F(x,\ y(x)+\delta y,\ y'(x)+\delta y')-F\Big(x,\ y(x),\ y'(x)\Big)$$

$$=F(x,\ y+\varepsilon\eta,\ y'+\varepsilon\eta')-F(x,\ y,\ y')$$

$$=\frac{\partial F}{\partial y}\varepsilon\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\varepsilon\eta'+\cdots\cdots$$

根据变分的第二种定义，取ΔF的线性主部构成F的一阶变分δF，则有

$$\delta F=\frac{\partial F}{\partial y}\varepsilon\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\varepsilon\eta'$$

$$=\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'$$

对二阶、三阶直至k阶变分可如下式计算

$$\delta^2F=\delta(\delta F),\ \delta^3F=\delta(\delta^2F),\ \cdots\cdots\delta^{(k)}=\delta(\delta^{(k-1)}F)$$

变分的运算法则可由其定义直接验证，其结果完全类似于微分运算的法则，如

1) $\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(\delta y)$ 或 $\delta y'=(\delta y)'$;

2) $\delta y^{(n)}=(\delta y)^{(n)}$ $\left(y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}\right)$;

3) $\delta(F_1+F_2)=\delta F_1+\delta F_2$;

4) $\delta(F_1\cdot F_2)=F_1\delta F_2+F_2\delta F_1$;

5) $\delta(F_1/F_2)=(F_2\delta F_1-F_1\delta F_2)/F_2^2$;

6) $\delta(F^n)=nF^{n-1}\delta F$　　（F^n表示F的n次幂）;

7) $\delta\int_{x_1}^{x_2}F(x,\ y,\ y')dx=\int_{x_1}^{x_2}\delta F(x,\ y,\ y')dx$。

第四节　变分学中的若干基本定理

1. 基本定理

设A是对称的正算子，即满足

$$(Au,\ v)=(Av,\ u)\qquad\text{（对称条件）}$$

$$(Au,\ u)\ \begin{matrix}>0\\=0\end{matrix}\ \begin{Bmatrix}(u\neq0)\\(u=0)\end{Bmatrix}\qquad\text{（正算子条件）}$$

那么方程$Au=f$如果有解，必有唯一解，且这个解使泛函

$$J=(Au,\ u)-2(u,\ f)$$

取极小值，反之，使泛函J取极小值的函数也必是$Au=f$的解。

证明

（1）已知 $(Au, u)\ \begin{matrix} >0 & (u\neq 0) \\ =0 & (u=0) \end{matrix}$

若方程有非唯一解，如有二个解u_1和u_2，则有

$$Au_1=Au_2=f$$

即 $$A(u_1-u_2)=0$$

因此 $$\Big(A(u_1-u_2),\ (u_1-u_2)\Big)=0\quad 成立$$

由已知条件可得 $$(u_1-u_2)=0,\ 即u_1=u_2$$

解的唯一性成立。

（2）设u_0是 $Au=f$的解，即$Au_0=f$，则

$$\begin{aligned} J(u) &= (Au,\ u)-2(u,\ f) \\ &= (Au,\ u)-2(u,\ Au_0) \\ &= \Big(A(u-u_0),\ (u-u_0)\Big)-(Au_0,\ u_0) \end{aligned}$$

因为A是正的，则只有第一项为零（即只有满足$u=u_0$）时，$J(u)$才具有极小值

$$J_{min}(u)=-(Au_0,\ u_0)=-(f,\ u_0)$$

因此，方程的解$u=u_0$必使$J(u)$取极小值。

（3）若u_0使$J(u_0)=J_{min}(u)$，下面证明u_0必是方程$Au=f$的解。

取任意函数$\eta\in\Omega$及实数λ，总有关系式

$$J(u_0+\lambda\eta)-J(u_0)\geqslant 0\quad 成立，展开后得$$

$$\Big[\Big(A(u_0+\lambda\eta),\ (u_0+\lambda\eta)\Big)-2\Big((u_0+\lambda\eta),\ f\Big)\Big]$$
$$-[(Au_0,\ u_0)-2(u_0,\ f)]\geqslant 0$$

将上式化简后得

$$2\lambda\Big((Au_0-f),\ \eta\Big)+\lambda^2(A\eta,\ \eta)\geqslant 0$$

因为λ是任取的，符号可正可负，绝对值可取任意小，若要使上面不等式在λ为任意值时成立，则只有在下列情况时才有可能

$$2\lambda\Big((Au_0-f),\ \eta\Big)=0$$

又因为η是任取的，故要求

$$(Au_0-f)=0,\qquad 即Au_0=f$$

证实u_0是$Au=f$的解。

2. Lagrange 变分基本引理

设$M(x)$在$[x_0,\ x_1]$区间上连续，$\eta(x)$及其一阶导数在$[x_0,\ x_1]$上连续，且在端点处$\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$；当取满足上述条件的任意函数$\eta(x)$均使

$$\int_{x_0}^{x_1}M(x)\eta(x)dx=0\quad 时$$

则在区间$[x_0,\ x_1]$上函数$M(x)$恒等于零。

证明可用反证法进行（略）。

这一引理还可推广用于二重积分及多重积分的情况。

3.局部变分原理

在介绍原理之前，先说明固定边界与可动边界的不同点。

固定边界的条件是强加的，如

泛函 $V=\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, y')dx$的边界条件

$$y|_{x=x_0}=\alpha, \qquad y|_{x=x_1}=\beta \qquad (\alpha, \beta\text{是给定的})$$

可动边界的最简单情况是边界限是给定的（即积分上下限x_0和x_1固定），但边界上自变函数y却是不确定的。如上述泛函V的边界条件$y|_{x=x_0}$和$y|_{x=x_1}$值均是任意时，则称之为可动边界，可动边界上的y值可由$\delta V=0$条件导出，这种由驻值条件得到的边界条件定名为自然边界条件，它是“自然”满足的而不是事先强加的。

下面介绍局部变分原理的内容。

设在可取函数类的集合D_J中使泛函J取极值的函数已经找到，若在D_J中挑出一个子集D_J°（$D_J^\circ\subset D_J$），D_J°是由那些和D_J中的极值函数具有相同边界条件的函数类组成（见图2-2）。则在D_J°中的泛函极值函数所应满足的必要条件也应当是定义在D_J中的泛函极值函数所应满足的。

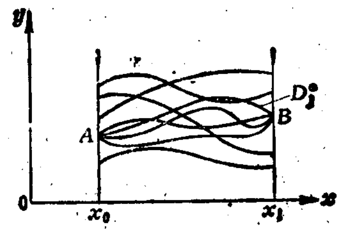

图 2-2

由此可以推知，由固定边界条件导出的各类泛函的驻值条件，仍然是可动边界条件下各类泛函极值函数所应满足的条件。

后面讨论可动边界的变分问题（如广义变分原理的驻值条件），常用到这个局部变分原理。

第五节　几种类型泛函的驻值问题　　Euler方程

本节只讨论几种用定积分（上、下限是固定的）型式表示的泛函的驻值问题。

1.含有一个自变函数及其一阶导数的定积分型式的泛函

先分析

$$\begin{cases} V=\int_a^b F\big(xy(x), y'(x)\big)dx \\ y|_{x=a}=\alpha \qquad y|_{x=b}=\beta \end{cases}$$

的驻值问题。泛函V的一阶变分为

$$\delta V=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx$$

$$=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y dx+\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\delta y\Big|_a^b$$

由驻值条件$\delta V=0$，并代入边界条件，可得

$$\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\,dx=0$$

因δy是任意的，根据Lagrange变分基本引理，可得

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \qquad \text{（Euler方程）}$$

可见，上述泛函的驻值问题等同于Euler微分方程边值问题的解。

如果问题是

$$\begin{cases} V=\int_a^b F(x,\ y,\ y')\,dx \\ \text{边界条件任意} \end{cases}$$

则由$\delta V=0$得到相应的微分方程及相应边界条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 & \text{Euler方程（引用局部变分原理推得）} \\ \left[\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right]_{x=a}=0 \qquad \left[\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right]_{x=b}=0 & \text{自然边界条件} \end{cases}$$

2.含有一个自变函数及其高阶导数的定积分型式的泛函

先分析

$$V=\int_a^b F\big(x,\ y(x),\ y'(x),\ y''(x)\big)dx$$

的驻值条件。

$$\begin{aligned}\delta V&=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'+\frac{\partial F}{\partial y''}\delta y''\right]dx\\&=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right]\delta y\,dx\\&\quad+\left[\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right]\delta y\,\Big|_a^b+\frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'\,\Big|_a^b\end{aligned}$$

由$\delta V=0$得到相应的微分方程及相应的边界条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)+\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y''}\right)=0 & \text{Euler方程} \\ \left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial F}{\partial y'}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y''}\right)=0 \\ \left[\dfrac{\partial F}{\partial y''}\right]=0\end{array}\right\}\text{（在}x=a\text{和}x=b\text{处）} & \text{自然边界条件}\end{cases}$$

如果是固定边界条件，则在$x=a$和$x=b$处y与y'是给定的。

推广到$V=\int_a^b F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \cdots y^{(n)})\,dx$ 的驻值条件

$$\delta V=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'+\cdots+\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)}\right]dx$$

运用k次分部积分公式可得

$$\delta V=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)+\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)\right]\delta y\,dx$$

$$+\left[\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)\right]\delta y\Big|_a^b$$

$$+\left[\frac{\partial F}{\partial y''}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'''}\right)+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)\right]\delta y'\Big|_a^b$$

$$+\cdots$$

$$+\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n-1)}\Big|_a^b$$

由$\delta V=0$得到相应的微分方程及相应的边界条件分别为

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)+\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)=0$$

Euler-Poisson方程

和在$x=a$和$x=b$处有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial y'}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y''}\right)+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y''}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'''}\right)+\cdots+(-1)^{n-2}\dfrac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)=0\\ \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}}=0\end{cases}$$

自然边界条件

如果是固定边界条件，在$x=a$和$x=b$处，y，y'，$\cdots y^{(n-1)}$是给定的。

3.含有n个自变函数的定积分型式的泛函

$$V=\int_a^b L\left(t,\ q_1(t),q_2(t),\cdots q_n(t),\ \dot{q}_1(t),\ \dot{q}_2(t),\ \cdots\dot{q}_n(t)\right)dt$$

（这里t为自变量，$\dot{q}_i$表示q_i对t的一阶导数）

$$\delta V=\int_a^b\left[\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_r}\delta q_r+\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_r}\delta\dot{q}_r\right]dt$$

$$=\int_a^b\left\{\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_r}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_r}\right)\right]\delta q_r\right\}dt+\left\{\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_r}\delta q_r\right\}\Big|_a^b$$

由泛函的驻值条件$\delta V=0$得到n个微分方程和$2n$个自然边界条件

$$\frac{\partial L}{\partial q_r}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_r}\right)=0\ (r=1,\ 2,\ \cdots n)$$ Euler-Lagrange方程

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_r}\Big|_{t=a}=0,\ \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_r}\Big|_{t=b}=0\ (r=1,\ 2,\ \cdots n)$$ 自然边界条件

如果泛函含有多个自变函数及其高阶导数的话，其驻值条件所对应的微分方程将是一组Euler-Poisson型方程和相应的一组自然边界条件，涉及到每一个自变函数的微分方程与自然边界条件如本节（2）所示的型式。

根据各个自变函数在边界$t=a$和$t=b$的确定状况还可以组成多种形式的边界条件。

4.含有多元自变量（重积分）的定积分型式的泛函