研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

高等外弹道学

Advanced Exterior Ballistics

徐明友 著

高等教育出版社

研究生教学用书　教育部研究生工作办公室推荐

ISBN 7-04-013093-9

9 787040 130935 >

定价 17.00 元

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

高等外弹道学

Advanced Exterior Ballistics

徐明友　著

高等教育出版社

前 言

外弹道学是研究弹箭在空中运动规律及总体性能的科学，其研究对象包括枪弹、炮弹、航弹、火箭及导弹等飞行体。它建立在运动稳定性、振动理论、多体系统动力学、空气动力学等力学基础之上，又依赖于现代控制论和计算技术的发展，并与测量技术密切相关。目前，它在弹道计算、飞行稳定性、起始扰动分析、散布理论、有控弹道、总体优化设计、实验技术及参数辨识等研究领域都十分活跃，提出了许多新课题，呈现出新的发展趋势。

本书以现有外弹道学的一般理论为起点，力求在内容安排上向上拉开一个层次。第一章以矢量和并矢为数学工具，借助 Possion 公式，对作为变质量系统的飞行器一般运动学和动力学方程，做了十分简明的推导，并揭示了动推力和其他惯性力及其力矩的物理本质。第二章主要干扰因素中，突出地阐述了动静不平衡性和大气湍流模型，由此使对弹道的干扰因素由随机变量扩展到随机函数，为第五章的随机弹道学提供了依据，也对第七章的弹道滤波的噪声有了初步认识。第二章中的基本转换矩阵，可用于直角坐标系的各种变换。第三章建立了飞行器的运动方程，旨在使读者能灵活地掌握建立运动模型的方法和技巧。特别对外弹道学中多种坐标系，给出了以三种基本变换矩阵为基础的任意两坐标系之几何量和力学量的转换关系，能很方便而直接地将任一坐标系内的力、力矩和运动方程，转换到其他选定的坐标系中。而弹箭的角运动方程不仅适用于线性小扰动角运动情况，也便于对几何非线性和运动参量非线性的运动稳定性进行分析。本章还推导了改进的质点弹道方程。第四章研究了弹箭飞行过程的发射动力学模型，这是受约束的飞行过程。其运动状态依赖于火炮或发射装置与弹箭的相互作用，弹炮将构成一个统一的综合动力学系统。发射过程中的弹箭运动，无论受力分析，或是运动模型，都采用了近年来作者的最新研究成果。第五章将射弹散布及射击准确度问题，归结为随机干扰下的弹箭运动状态分析，构成了一个完整的随机弹道学专门课题。同时，还介绍了非线性随机系统仿真方法。第六章旨在为弹道优化设计提供理论依据，使弹箭总体设计趋于科学化。第七章开拓了弹道滤波这一领域，论述了运动状态的估计理论和参数辨识方法，旨在使目前弹道试验中的数据处理方法能提高到一个新的水平。最后三章的

知识域涉及到现代控制论、数学规划、估计理论等学术领域，使外弹道学不仅建立在力学的基础之上，而且与其他学科加强了有机的联系。

作为高层次人才培养的研究生教育，随着知识域的扩充和深化，各学科基础的共性将会显得更加清晰，专业的鸿沟将被淡化，从事工作的适应能力将会大大提高。“高等外弹道学”本属兵器科学与技术的学科范畴，而其内容安排已在基础理论方面打破了与其他相关民用学科的专业界线。即使对于大学本科没有学习过外弹道学，甚至理论力学的毕业生，只要具备大学理工科的数理知识，就能够学好本书的内容。

本书主要取材于作者最近十多年来的科研成果、著作和论文，并加以综合深化而成，是多年科研和教学成果的结晶。与经典的外弹道学相比，本书以矢量矩阵为基本数学工具，将近代发射动力学、随机过程理论、优化理论和现代控制论广泛用于弹箭运动状态分析，构成了一个崭新的高等外弹道学的理论体系。著名的外弹道学家宋丕极教授审阅过本书的主要内容，李鸿志院士、朵英贤院士和马殿荣将军（教授、博导）为本书提出了宝贵意见，全国学位与研究生教育发展中心给予了具体指导，作者对他们一并表示感谢，也恳请广大读者指出本书中尚存的不足之处。

徐明友

2003 年 3 月

写于南京理工大学

目　　录

第一章　弹箭运动的一般理论

1.1　矢量与并矢

1.1.1　基矢量与矢量

三个汇交于 O 点的正交单位矢量$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$ 称为基矢量，它们组成的右手正交参考系称为基，O 为基点。将基矢量排列成列阵作为基矢量表达式，称为基矢量列阵，以黑体字$\vec{\boldsymbol{e}}$表示，

$$\vec{\boldsymbol{e}} = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3)^{\mathrm{T}} \tag{1-1}$$

基矢量满足正交条件，即

$$\vec{\boldsymbol{e}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}} = I \quad (\text{三阶单位矩阵}) \tag{1-2}$$

矢量$\vec{a}$在基$\vec{\boldsymbol{e}}$上的投影或坐标为 a_1、a_2、a_3，坐标列阵以黑体字表示，

$$\boldsymbol{a} = (a_1 \quad a_2 \quad a_3)^{\mathrm{T}} \tag{1-3}$$

则

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \vec{\boldsymbol{e}} = \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a} \tag{1-4}$$

显然矢量$\vec{a}$与其坐标列阵 $\boldsymbol{a}$ 是有区别的，不可混为一谈。但是，对于所选定的基$\vec{\boldsymbol{e}}$，任一矢量$\vec{a}$都能用坐标列阵 $\boldsymbol{a}$ 或行阵$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ 完全确定。将矢量$\vec{a}$的坐标排成以下三阶反对称方阵，称为$\vec{a}$在$\vec{\boldsymbol{e}}$上的坐标方阵或叉乘矩阵，使用带波浪号的矩阵符号，以 $\tilde{a}$ 记之，

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1-5}$$

若矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$的坐标列阵为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$，则矢量与坐标列阵之间存在下列等价关系：

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}, \qquad \boldsymbol{c} = \tilde{a}\boldsymbol{b} = -\tilde{b}\boldsymbol{a} \tag{1-6}$$

$$\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}), \qquad \boldsymbol{d} = \tilde{a}\tilde{b}\boldsymbol{c} \tag{1-7}$$

$$\vec{d} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}), \qquad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\tilde{b}\boldsymbol{c} \tag{1-8}$$

1.1.2　并矢

依序并列的两个矢量称为并矢，用白体字母上加两个箭头表示，比

如：

$$\vec{\vec{P}}=\vec{a}\vec{b} \tag{1-9}$$

并矢遵循下列运算规则：

(1) 并矢与矢量的点积为矢量

$$\vec{\vec{P}}\cdot\vec{r}=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{r}),\quad \vec{r}\cdot\vec{\vec{P}}=(\vec{r}\cdot\vec{a})\vec{b} \tag{1-10}$$

(2) 并矢与矢量的叉积为并矢

$$\vec{\vec{P}}\times\vec{r}=\vec{a}(\vec{b}\times\vec{r}),\quad \vec{r}\times\vec{\vec{P}}=(\vec{r}\times\vec{a})\vec{b} \tag{1-11}$$

(3) 并矢与并矢的点积仍为并矢。设 $\vec{\vec{Q}}=\vec{c}\vec{d}$，则

$$\vec{\vec{P}}\cdot\vec{\vec{Q}}=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d} \tag{1-12}$$

以上运算不符合交换率。

对于基$\vec{\boldsymbol{e}}$，$\vec{\vec{P}}$可用$\vec{a}$、$\vec{b}$在$\vec{\boldsymbol{e}}$上的坐标阵表示为

$$\vec{\vec{P}}=\vec{a}\vec{b}=\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{e}}=\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\vec{\boldsymbol{e}} \tag{1-13}$$

$\boldsymbol{P}$ 的九个元素组成的三阶方阵称为$\vec{\vec{P}}$在$\vec{\boldsymbol{e}}$上的坐标阵，

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix} \tag{1-14}$$

由式(1-13)、(1-14)可知，并矢是由基矢量组成的九个并矢的线性式：

$$\begin{aligned}\vec{\vec{P}}=&a_1b_1\vec{e}_1\vec{e}_1+a_1b_2\vec{e}_1\vec{e}_2+a_1b_3\vec{e}_1\vec{e}_3+a_2b_1\vec{e}_2\vec{e}_1+a_2b_2\vec{e}_2\vec{e}_2+\\&a_2b_3\vec{e}_2\vec{e}_3+a_3b_1\vec{e}_3\vec{e}_1+a_3b_2\vec{e}_3\vec{e}_2+a_3b_3\vec{e}_3\vec{e}_3\end{aligned} \tag{1-15}$$

坐标阵为单位阵的并矢称为单位并矢，记作$\vec{\vec{I}}$，

$$\vec{\vec{I}}=\vec{e}_1\vec{e}_1+\vec{e}_2\vec{e}_2+\vec{e}_3\vec{e}_3=\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{e}} \tag{1-16}$$

并矢的运算可采用坐标阵进行。设 $\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{Q}$ 为矢量$\vec{f}$、$\vec{r}$和并矢 $\vec{\vec{F}}$、$\vec{\vec{Q}}$的坐标阵，则有

$$\begin{aligned}
&\vec{f}=\vec{\vec{P}}\cdot\vec{r}, && \boldsymbol{f}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{r}\\
&\vec{f}=\vec{r}\cdot\vec{\vec{P}}, && \boldsymbol{f}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}\\
&\vec{\vec{F}}=\vec{\vec{P}}\times\vec{r}, && \boldsymbol{F}=\boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{r}}\\
&\vec{\vec{F}}=\vec{r}\times\vec{\vec{P}}, && \boldsymbol{F}=\tilde{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{P}\\
&\vec{\vec{F}}=\vec{\vec{P}}\cdot\vec{\vec{Q}}, && \boldsymbol{F}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}
\end{aligned} \tag{1-17}$$

1.2 Possion 公式及其推广

设某刚体内有一单位矢量$\vec{e}_i$,刚体的转动角速度为$\vec{\omega}$,则$\vec{e}_i$对时间的导数为

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_i}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}\times\vec{e}_i \tag{1-18}$$

这就是 Possion 公式。

设有一动参考系,其基为$\vec{e}$;今有一可变矢量$\vec{\rho}$,

$$\vec{\rho}=\rho_1\vec{e}_1+\rho_2\vec{e}_2+\rho_3\vec{e}_3$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\rho}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\rho_1}{\mathrm{d}t}\vec{e}_1+\frac{\mathrm{d}\rho_2}{\mathrm{d}t}\vec{e}_2+\frac{\mathrm{d}\rho_3}{\mathrm{d}t}\vec{e}_3+\rho_1\frac{\mathrm{d}\vec{e}_1}{\mathrm{d}t}+\rho_2\frac{\mathrm{d}\vec{e}_2}{\mathrm{d}t}+\rho_3\frac{\mathrm{d}\vec{e}_3}{\mathrm{d}t}$$

记

$$\frac{\mathrm{d}_r\vec{\rho}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\rho_1}{\mathrm{d}t}\vec{e}_1+\frac{\mathrm{d}\rho_2}{\mathrm{d}t}\vec{e}_2+\frac{\mathrm{d}\rho_3}{\mathrm{d}t}\vec{e}_3 \tag{1-19}$$

此为由于矢量$\vec{\rho}$相对于动参考系的变化所引起的速率,是相对导数。而由式(1-18)知,

$$\rho_1\frac{\mathrm{d}\vec{e}_1}{\mathrm{d}t}+\rho_2\frac{\mathrm{d}\vec{e}_2}{\mathrm{d}t}+\rho_3\frac{\mathrm{d}\vec{e}_3}{\mathrm{d}t}=\rho_1\vec{\omega}\times\vec{e}_1+\rho_2\vec{\omega}\times\vec{e}_2+\rho_3\vec{\omega}\times\vec{e}_3=\vec{\omega}\times\vec{\rho}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\rho}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}_r\vec{\rho}}{\mathrm{d}t}+\vec{\omega}\times\vec{\rho} \tag{1-20}$$

上式表明,动矢量的时间变化率等于其对动参考系的相对速率,加上由于动参考系的转动所引起的牵连速率。这一推广的 Possion 公式,在力学中经常用到。

1.3 速度与加速度合成公式

1.3.1 速度合成

如图 1-1 所示,S 为固定参考系,原点为 O;S'为动参考系,原点为 D。A 为动点,位矢为$\vec{\rho}$;D 点的位矢为$\vec{\rho}_D$;A 相对于 D 的位矢为$\vec{r}$。易见

$$\vec{\rho}=\vec{\rho}_D+\vec{r}$$

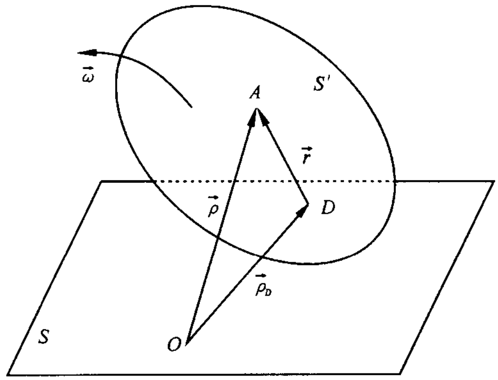


图 1－1　参考系

则 A 点的绝对速度为

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{\rho}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\rho}_D}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

由式(1－20)得

$$\vec{v}=\vec{v}_D+\frac{\mathrm{d}_{\mathrm{r}}\vec{r}}{\mathrm{d}t}+\vec{\omega}\times\vec{r} \tag{1-21}$$

记

$$\vec{v}_{\mathrm{e}}=\vec{v}_D+\vec{\omega}\times\vec{r} \tag{1-22}$$

$\vec{v}_{\mathrm{e}}$ 为 A 点的牵连速度，它等于动参考系原点 D 的速度$\vec{v}_D$ 与因动参考系的转动所引起的速度之和。$\vec{v}_{\mathrm{e}}$ 是动参考系上瞬时与动点 A 相重合的那一点的速度。又记

$$\vec{v}_{\mathrm{r}}=\frac{\mathrm{d}_{\mathrm{r}}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-23}$$

$\vec{v}_{\mathrm{r}}$ 被称为相对速度，即动点 A 相对于动参考系的运动速度，见式(1－19)。于是 A 点的绝对速度式(1－21)写成下式：

$$\vec{v}=\vec{v}_{\mathrm{r}}+\vec{v}_{\mathrm{e}} \tag{1-24}$$

1.3.2　加速度合成

A 点的加速度$\vec{a}$为

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t} \tag{1-25}$$

由推广的 Possion 公式(1－20)知

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}_{\mathrm{r}}\vec{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}+\vec{\omega}\times\vec{v}_{\mathrm{r}}=\vec{a}_{\mathrm{r}}+\vec{\omega}\times\vec{v}_{\mathrm{r}} \tag{1-26}$$

上式中的$\vec{a}_{\mathrm{r}}$ 是相对加速度，$\vec{\omega}\times\vec{v}_{\mathrm{r}}$ 是由于牵连运动的存在所引起的相对

速度之速率。后者是科氏(Coriolis)加速度的一部分。又式(1-25)中的 $\vec{v}_e$ 由式(1-22)所表达,

$$\frac{d\vec{v}_e}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{v}_D\times\vec{\omega}\times\vec{r})=\frac{d\vec{v}_D}{dt}+\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})=\vec{a}_D+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

再利用式(1-20),

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d_r\vec{r}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{r}$$

则

$$\frac{d\vec{v}_e}{dt}=\vec{a}_D+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})+\vec{\omega}\times\vec{v}_r=\vec{a}_e+\vec{\omega}\times\vec{v}_r \quad (1-27)$$

式中 $\vec{a}_e$ 是牵连加速度,

$$\vec{a}_e=\vec{a}_D+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \quad (1-28)$$

它是动参考系上瞬时与动点 A 相重合的那一点的加速度。由于相对运动($\vec{v}_r$)的存在,牵连速度的大小和方向受影响($\vec{\omega}\times\vec{v}_r$),这就构成了科氏加速度的又一根源。

据式(1-26)和(1-27)看出,相对速度 $\vec{v}_r$ 对时间的导数并不等于相对加速度 $\vec{a}_r$,牵连速度 $\vec{v}_e$ 对时间的导数也不等于牵连加速度 $\vec{a}_e$,这是一个基本的力学概念问题。最后将式(1-26)、(1-27)代入式(1-28),得

$$\vec{a}=\vec{a}_r+\vec{a}_e+\vec{a}_C \quad (1-29)$$

式中

$$\vec{a}_C=2\vec{\omega}\times\vec{v}_r \quad (1-30)$$

$\vec{a}_C$ 称为 Coriolis 加速度,它是由于动参考系的转动($\vec{\omega}$)和点的相对运动($\vec{v}_r$)相互影响产生的。

1.4 飞行器质心运动的一般动力学方程

1.4.1 密歇尔斯基(Мещерский)方程

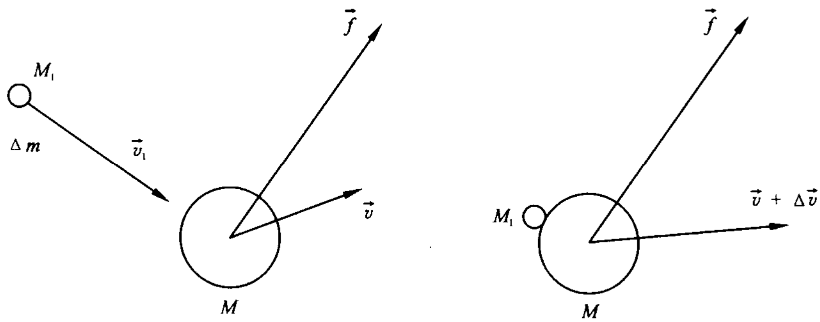
定质量飞行器是变质量飞行器(比如火箭)的特例,顾及一般性,在此介绍变质点系动量定理。

设一质点 M 在任意瞬时 t 的质量为 m,对惯性系的速度为 $\vec{v}$;另一个微元体 M_1 的质量为 Δm,t 瞬时的速度为 $\vec{v}_1$;将 M 和 M_1 作为一个质点系,为图 1-2 所示。对该质点系可以应用"常质点系"动量定理,即

$$\frac{d\vec{Q}}{dt}=\vec{F} \quad (1-31)$$

式中　$\vec{Q}$——质点系的总动量矢量；

$\vec{F}$——作用于质点系的全部外力矢量和。



(a) t 时刻的运动状态　　(b) $(t+\Delta t)$时刻的运动状态

图 1-2　两个质点组成的质点系

在图 1-2 中，外力主矢为$\vec{f}$，M 的速度为$\vec{v}$，经 Δt 后微元体 M_1 并入质点 M，合并后的速度为$\vec{v}+\Delta\vec{v}$，在时间段 Δt 内，质点系的绝对动量的增量为

$$\Delta\vec{Q}=(m+\Delta m)(\vec{v}+\Delta\vec{v})-(m\vec{v}+\Delta m\cdot\vec{v}_1)$$

略去二阶小量，上式成为

$$\Delta\vec{Q}=m\Delta\vec{v}+(\vec{v}-\vec{v}_1)\Delta m$$

于是由式(1-31)可得

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{f}+(\vec{v}_1-\vec{v})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\tag{1-32}$$

记

$$\vec{u}=\vec{v}_1-\vec{v}\tag{1-33}$$

$\vec{u}$是 M_1 相对于 M 的相对速度。令

$$\vec{f}_{\mathrm{P}}=\vec{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\tag{1-34}$$

可把$\vec{f}_{\mathrm{P}}$ 理解为作用于质点 M 的一种力，通常称为动推力。则式(1-32)写成下式

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{f}+\vec{f}_{\mathrm{P}}\tag{1-35}$$

这一当作质点在力$\vec{f}$和$\vec{f}_{\mathrm{P}}$ 作用下的基本方程，称为变质量质点的动力学基本方程，又称为密歇尔斯基方程。该方程虽然在形式上仅认为是对牛顿定律应用于变质量质点运动时的一种修正，即多出一项作用力$\vec{f}_{\mathrm{P}}$；但必须看到式中的质量毕竟是时间的函数。当 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t>0$ 时，表示有其他质量不断流入质点；当 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t<0$ 时，则表示质点不断向外发射质量。对

后者，$\vec{f}'_{\mathrm{P}}$ 将是对质点产生的动推力。

当微元体 M_1 的绝对速度 $\vec{v}_1=0$，方程(1-32)成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})=\vec{f} \tag{1-36}$$

这表示质点 M 在其运动过程中不断俘获原来处于静止的质量。当微元体 M_1 的相对速度 $\vec{u}=0$ 时，方程(1-32)成为

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{f} \tag{1-37}$$

这是质点 M 在其运动过程中不断地俘获或放出与它本身相同运动速度的质量的情形。

1.4.2 变质量飞行器质心运动一般方程

取 t 时刻飞行器所包含的全部质量作为研究对象。其中第 i 个质点(质量为 m_i)的运动亦满足式(1-35)，即

$$m_i\frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t}=\vec{f}_i+\vec{f}'_{\mathrm{P}i} \tag{1-38}$$

不过式中的 $\vec{f}_i$ 也包括了飞行器其他质点对 m_i 的作用力(即内力)。对所计质点系的全部质点求和，得

$$\sum m_i\frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t}=\sum\vec{f}_i+\sum\vec{f}'_{\mathrm{P}i} \tag{1-39}$$

取一与飞行器刚性部分相固联的坐标系，其原点为 D，坐标系的角速度(飞行器转动角速度)为 $\vec{\omega}$，此坐标系不仅有转动，而且有平动。以 $\vec{r}_i$ 表示 m_i 在坐标系中的位矢，$\vec{v}_D$ 表示 D 点相对于静参考系的速度，$\vec{v}_{\mathrm{r}i}$ 表示 m_i 相对于该动参考系的相对速度，则依式(1-20)、(1-22)有

$$\vec{v}_i=\vec{v}_D+\vec{v}_{\mathrm{r}i}+\vec{\omega}\times\vec{r}_i$$

而 $\vec{v}_i$ 的时间变化率由式(1-27)、(1-28)为

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t}=\vec{a}_D+\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}_i+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)+\vec{a}_{\mathrm{r}i}+\vec{a}_{\mathrm{C}i} \tag{1-40}$$

代入式(1-39)，有

$$\sum m_i\left[\vec{a}_D+\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}_i+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)\right]=\sum\vec{f}_i+\vec{F}'_{\mathrm{P}}-\sum m_i\vec{a}_{\mathrm{r}i}-\sum m_i\vec{a}_{\mathrm{C}i} \tag{1-41}$$

式中 $\vec{F}'_{\mathrm{P}}$——总动推力，$\vec{F}'_{\mathrm{P}}=\sum\vec{f}'_{\mathrm{P}i}$

方程(1-41)的等号左边为

$$m\left[\vec{a}_D+\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}_{\mathrm{C}}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{\mathrm{C}})\right]$$

其中$\vec{r}_C$是瞬时t飞行器质心对D点的位矢，m为此时飞行器的质量。中括号内三项之和由式(1-28)知是在t时刻飞行器质心的牵连加速度，仍以$\vec{a}_e$表示，于是式(1-41)成为下式：

$$m\vec{a}_e=\vec{F}+\vec{F}'_P+\vec{F}_{gas} \tag{1-42}$$

式中　$\vec{F}$——作用于飞行器上的诸外力之合力；

$\vec{F}_{gas}$——内气流惯性力，由飞行器内部气体加速流动及飞行器转动所引起的相对惯性力及 Coriolis 力。

在与飞行器刚性部分相固联的坐标系内，若飞行器质心对D点的相对速度为$\vec{v}_{rC}$，相对加速度为$\vec{a}_{rC}$，则飞行器质心的绝对速度$\vec{v}$和绝对加速度$\vec{a}$由式(1-24)和(1-29)分别为

$$\vec{v}=\vec{v}_e+\vec{v}_{rC} \tag{1-43}$$

$$\vec{a}=\vec{a}_e+\vec{a}_{rC}+2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rC} \tag{1-44}$$

将式(1-42)代入式(1-44)便得飞行器质心运动的一般方程

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}+\vec{F}'_P+\vec{F}_{gas}+m\vec{a}_{rC}+2m\vec{\omega}\times\vec{v}_{rC} \tag{1-45}$$

1.5　飞行器转动运动的一般动力学方程

对式(1-38)等式两边左方叉乘$\vec{r}_i$，并以式(1-40)代入，再对全部质点求和得

$$\sum m_i\vec{r}_i\times\left[\vec{a}_D+\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}_i+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)\right]=\sum\vec{r}_i\times\vec{f}_i+\sum\vec{r}_i\times\vec{f}'_{Pi}-\sum m_i\vec{r}_i\times\vec{a}_{ri}-\sum m\vec{r}_i\times\vec{a}_{Ci} \tag{1-46}$$

由于内力两两相消，则

$$\sum\vec{r}_i\times\vec{f}_i=\sum\vec{M}_i \tag{1-47}$$

$\sum\vec{M}_i$是所有外力对D点的力矩；并以$\vec{M}'_P$表示动推力矩，即

$$\vec{M}'_P=\sum\vec{r}_i\times\vec{f}'_{Pi} \tag{1-48}$$

式(1-46)等号右边最后两项是内气流(燃气等)运动所产生的惯性力矩，以$\vec{M}_{gas}$表示，即

$$\vec{M}_{gas}=-\sum m_i\vec{r}_i\times\vec{a}_{ri}-\sum m_i\vec{r}_i\times\vec{a}_{Ci} \tag{1-49}$$

下面考察式(1-46)等号左边较复杂的一项，为

$$\sum m_i\vec{r}_i\times[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)]$$

由矢量代数公式

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\times(\vec{a}\times\vec{c})+\vec{c}\times(\vec{b}\times\vec{a})$$

便可得

$$\sum m_i \vec{r}_i \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] = \vec{\omega} \times \vec{G} \tag{1-50}$$

式中

$$\vec{G} = \sum m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \tag{1-51}$$

$\vec{G}$是质点系相对于动点 D 的动量矩，即各个质点相对于 D 点旋转所引起的动量对D点之矩的总和。又二重叉积可表示成并矢表达式，即

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = [(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{\vec{I}} - \vec{c}\,\vec{a}] \cdot \vec{b}$$

由此关系式可将式(1－51)写成下式：

$$\vec{G} = \sum m_i [(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i)\vec{\vec{I}} - \vec{r}_i \vec{r}_i] \cdot \vec{\omega} \tag{1-52}$$

记

$$\vec{\vec{J}} = \sum m_i [(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i)\vec{\vec{I}} - \vec{r}_i \vec{r}_i] \tag{1-53}$$

并矢$\vec{\vec{J}}$称为飞行器相对于动点 D 的惯量张量。不妨以$(D,\vec{e})$表示飞行器的连体基，且在该基中$\vec{r}_i$的坐标列阵为

$$\boldsymbol{r}_i = (x_i \quad y_i \quad z_i)^{\mathrm{T}} \tag{1-54}$$

则得

$$\vec{\vec{J}} = \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J} \vec{\boldsymbol{e}} \tag{1-55}$$

式中 $\boldsymbol{J}$ 是$\vec{\vec{J}}$在$(D,\vec{e})$上的坐标阵，称为飞行器相对于 D 点的惯量矩阵，且

$$\boldsymbol{J} = \sum m_i (\boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{r}_i \boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}) = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix} \tag{1-56}$$

其中

$$J_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad J_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2), \quad J_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$J_{xy} = J_{yx} = \sum m_i x_i y_i, \quad J_{xz} = J_{zx} = \sum m_i x_i z_i, \quad J_{yz} = J_{zy} = \sum m_i y_i z_i$$

J_x、J_y、J_z 是对各坐标轴(基矢量)$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$ 的转动惯量，J_{xy}、J_{xz}、J_{yz}是对相应坐标面的惯量积。于是角动量为

$$\vec{G} = \vec{\vec{J}} \cdot \vec{\omega} \tag{1-57}$$

类似推导可得式(1－46)等式左边第二项为

$$\sum m_i \vec{r}_i \times \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}_i\right) = \vec{\vec{J}} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \tag{1-58}$$

此外，

$$\sum m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_D = m \vec{r}_C \times \vec{a}_D \tag{1-59}$$

$\vec{r}_C$ 表示 D 点至飞行器质心的矢量。至此，式(1-46)写成下型：

$$\vec{\vec{J}}\cdot\frac{d\vec{\omega}}{dt}+\vec{\omega}\times(\vec{\vec{J}}\cdot\vec{\omega})=\vec{M}-m\,\vec{r}_C\times\vec{a}_D \tag{1-60}$$

式中 $\vec{M}$ 是将推力矩和内气流力矩视作外力矩时所有力矩对 D 点的合力矩。式(1-60)就是飞行器作为变质点系的动量矩定量的表达式之一，具有普遍意义。

人们常常借助于所谓"刚化原理"(或称固化原理)，将式(1-60)写成与刚体动量矩定理相同的形式。依据刚化原理，就不考虑因质量变化所引起的 dt 时间内的 $\boldsymbol{J}$ 的变化，则在$(D,\vec{e})$中有

$$\vec{\vec{J}}\cdot\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\frac{d_r(\vec{\vec{J}}\cdot\vec{\omega})}{dt}=\frac{d_r\vec{G}}{dt} \tag{1-61}$$

将上式代入式(1-60)便得

$$\frac{d_r\vec{G}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{G}=\vec{M}-m\,\vec{r}_C\times\vec{a}_D \tag{1-62}$$

或由式(1-20)得

$$\frac{d\vec{G}}{dt}=\vec{M}-m\,\vec{r}_C\times\vec{a}_D \tag{1-63}$$

方程(1-63)与一般力学中的"质点系对于任意动点的相对动量矩定理"相比，其形式是相同的。

若取转速为 $\vec{\omega}_m$ 的坐标系，则式(1-63)成为

$$\frac{d_r\vec{G}}{dt}+\vec{\omega}_m\times\vec{G}=\vec{M}-m\,\vec{r}_C\times\vec{a}_D \tag{1-64}$$

上式可取矩阵形式：

$$\frac{d_r}{dt}(\boldsymbol{J\omega})+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_m\boldsymbol{J\omega}=\boldsymbol{M}-m\tilde{\boldsymbol{r}}_C\boldsymbol{a}_D \tag{1-65}$$

须注意求导数时不考虑 $\boldsymbol{J}$ 因质量变化所引起的变化率；式(1-65)中的黑体字为坐标阵。

应该指出，式(1-51)的动量矩是在随同动点 D 且对于惯性参考系作加速平动的参考系中计量的；此 $\vec{G}$ 是由于飞行器转动所引起的在该平动坐标系中相对于动点 D 的相对动量矩。但是，在转速为 $\vec{\omega}_m$ 的动参考系中(原点 D 仍为动点)，若飞行器相对于该参考系的相对转速为 $\vec{\omega}_r$，则绝对转速为

$$\vec{\omega}=\vec{\omega}_m+\vec{\omega}_r \tag{1-66}$$

于是

$$\vec{G}=\vec{\vec{J}}\cdot\vec{\omega}_m+\vec{G}_r \tag{1-67}$$