全国高等教育自学考试辅导用书

高等数学

贾建华　编著

自学与考试

考试内容精要
仿真模拟试题

南开大学出版社

全国高等教育自学考试辅导用书

高等数学自学与考试

贾建华　编

南开大学出版社
天　津

图书在版编目(CIP)数据

高等数学自学与考试/贾建华编,—天津:南开大学出版社,1999.8

全国高等教育自学考试辅导用书

ISBN 7-310-01267-4

Ⅰ.高… Ⅱ.贾… Ⅲ.高等数学-高等教育-自学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 1[illegible]960 号

出版发行	南开大学出版社 地址.天津市南开区卫津路 94 号 邮编.300071 电话 (022)23508542
出版人	张世甲
承　印	河北省昌黎印刷总厂印刷
经　销	全国各地新华书店
版　次	1999 年 9 月第 1 版
印　次	1999 年 9 月第 1 次印刷
开　本	850mm×1168mm 1/32
印　张	11.25
字　数	279 千字
印　数	1—5000
定　价	14.00 元

出版说明

全国高等教育自学考试自20世纪80年代初开始以来，如今已经走过了近20个年头。20年来，她已由少部分人圆高等教育梦的温床变成大多数校外求知者向更高、更深知识领域探索的阶梯。在更好的受教育水平几乎成为获得更好的就业岗位的先决条件的今天，她更成为大多数因各种原因不能直接进入高等学府接受“正规”教育的人得到这一条件的重要途径。

但是，参加自学考试的人无论是时间还是学习环境与条件都存在一定的问题。因此，考生们普遍反映高等教育自学考试难，难于通过，难于结业。

为了解决这一疑难，我们特地组织南开大学校内外专家教授编写了这套“全国高等教育自学考试辅导用书”。这些专家教授都在相关学科领域有着精深的造诣，他们或以对自学考试内容准确把握见长，其辅导的自学考生的考试都有较高的通过率；或以对相关学科的精深研究著称，其本人往往就是教育部相关统编教材主要作者。这套书中的每一本都以教育部颁发的全国高等教育自学考试大纲为依据、以相关统编教材为参照编写，内容设计精确，题型设计科学。因此，通过这些书的学习，自学考生可以较快地掌握相关学科的考试难点、要点，并提前熟悉考试的有关内容，对考生尽快通过考试有较大的助益。

南开大学出版社向以出版各类高等教育教材、服务于社会教育水平的提高为重要使命，其成果也得到社会的广泛认可；“读南

开书，走成材路”是我们向社会的郑重承诺，这套“全国高等教育自学考试辅导用书”是我们履行这一承诺的又一方式。对所有相关考生有所助益、帮助考生尽快通过考试是我们这套书的最大心愿。在此，真诚欢迎各界读者尤其是自学考试辅导教师和考生提出批评改进意见，以使它更加成熟、更加完善。

南开大学出版社

前　言

随着人类社会的发展与进步，数学这一学科已渗透到现代社会的每一个领域，它不仅与自然科学、社会科学有着广泛而密切的联系，而且对人们的科学思维和文化素质的培养产生着深刻地影响。

高等数学作为一门必修课，不仅需要掌握它的基本理论，而且还要掌握它的基本方法和基本技能。笔者编写这本《高等数学自学与考试》一书，主观上就是希望能对学习高等数学的读者在加强解题能力和解题技巧方面有所帮助。在本书的选材过程中，笔者总结了多年从事自学考试的教学工作的经验，并参考了大量全国高等数学自学考试试题及有关资料，从中选用了一些较好的、有启发性的典型例题。在解题方法上不仅是为了得到题目的答案而解题，而是力图做到由浅入深、从典型到一般地提炼出一套解题的方法和技巧，达到举一反三、触类旁通的目的。考虑到读者的思维方法及能力的差异，有些例题给出了多种解题方法，这些解题方法有些是较直观和容易想到的，有些则是带有一定启发性和技巧性的方法。目的是为了使读者不仅学会解题方法，而且通过解题，在思维方法上有所启示和收获。

为了加强读者独立解题能力，本书每章都配备了一定数量的各种类型的习题，希望读者能独立地加以练习。书后还配有习题答案，以便检验解题的正确性。

本书是以全国高等教育自学考试指导委员会经济管理专业委

员会编写的“高等数学(一)自学考试大纲”为参考，以其指定教材——高汝熹编写的《高等数学(一)微积分》为基础编写而成。根据多年来全国高等教育自学考试试题，本书又适当补充了一些有关内容，不仅适合经济管理类自学者阅读，同时对普通高校学生及参加经济管理类专业研究生入学考试的考生也大有裨益。

由于编写时间仓促，本书缺点错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

1999 年 3 月

目　录

第一章　函　数

一、内容提要

1. 集合的运算

设 A、B 是两个集合，由 A 与 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$.

既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的交，记为 $A \cap B$.

设集合 A 是集合 B 的子集，所有属于 B 而不属于 A 的元素构成的集合称为 A 关于 B 的补集，记为 A_B^C.

2. 绝对值的基本性质

(1) $|a| \geqslant 0$, $|a| = |-a|$, $|a| = \sqrt{a^2}$；

(2) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$；

(3) $|a| \leqslant c (c \geqslant 0) \Leftrightarrow -c \leqslant a \leqslant c$；

(4) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$；

(5) $||a| - |b|| \leqslant |a-b|$；

(6) $|ab| = |a| \cdot |b|$；

(7) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, b \neq 0.$

3. 邻域

称开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$为x_0的δ邻域；开区间$(x_0-\delta, x_0)$、$(x_0, x_0+\delta)$分别称为点x_0的左邻域、右邻域；称$(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x+\delta)$为$x_0$点的去心邻域.

4. 函数的概念

(1) 函数的定义

设X为非空实数集，如果存在一个对应规则f，使得对每一个$x \in X$，都能由规则f唯一地确定一个实数y，则称f为定义在X上的一个函数，记为

$$y = f(x), x \in X$$

称X为函数$y=f(x)$的定义域，x为自变量，y为因变量. 符号$f(x_0)$称为函数$y=f(x)$在x_0处的函数值. 全体函数值所成的集合称为函数的值域.

(2) 函数定义域的确定法

如果函数是由解析法表示的，且未赋予实际意义，则其定义域就是使函数表达式有意义的自变量所有可能取值的集合；对于赋予实际意义的函数，其定义域由问题的实际意义确定.

(3) 两个函数的相同与不同

如果两个函数有相同的对应关系f，并且有相同的定义域，则称这两个函数相同，否则就是不同的.

5. 函数的基本特性

(1) 单调性

设函数$y=f(x)$在区间X有定义，如果对任意的$x_1, x_2 \in X$，

当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 X 上严格单调增加；如果对任意的 $x_1, x_2 \in X$，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 X 上严格单调减少. 严格单调增加函数与严格单调减少函数统称为单调函数；使函数 $f(x)$ 单调的区间称为单调区间.

(2) 有界性

如果存在两个实数 A 和 B，对一切 $x \in X$ 恒有 $A \leqslant f(x) \leqslant B$，则称函数 $f(x)$ 在 X 是有界的，否则就称为无界的. 函数的有界性也可以如下定义：如果存在常数 $M > 0$，使对任意的 $x \in X$ 恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 是有界的.

(3) 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 X，且 X 是以原点为对称的实数集，如果对任意的 $x \in X$，恒有 $f(-x) = f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数，如果对任意的 $x \in X$，恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称. 奇函数的图形关于坐标原点对称.

两个偶(奇)函数的和仍为偶(奇)函数；两个偶(奇)函数之积仍为偶函数；奇函数与偶函数之积为奇函数.

(4) 周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一正数 ω，对属于定义域的任意 x，恒有 $f(x \pm \omega) = f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，如果一个函数存在最小的正周期 T，则称 T 为这个函数的周期.

6. **复合函数与反函数**

(1) 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 U，函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 X，值域为 D，如果 $D \cap U \neq \Phi$，则称 $y = f(\varphi(x))$ 为函数 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数，其中 x 为自变量，y 为因变量，u

为中间变量，其定义域为 $I=\{x|\varphi(x)\in U\}$.

(2) 反函数

设 $y=f(x)$ 是定义在 X 上的函数，其值域为 Y，如果对每个 $y\in Y$，都有唯一的一个 $x\in X$，满足 $y=f(x)$，则称 x 为定义在 Y 上以 y 为自变量的函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，$y\in Y$，并称其为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

如果以 x 为自变量，则 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Y$；且 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

若函数 $y=f(x)$，$x\in X$ 是严格单调增加(或减少)的，则存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，$y\in Y$，且此反函数也是严格单调增加(或减少)的.

7. 初等函数

(1) 基本初等函数

(i) 幂函数　$y=x^{\alpha}$　(α 为任何实数)

无论 α 为何值，x^{α} 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义，而且其图形都经过 $(1,1)$ 点.

当 α 为非负整数时，定义域为 $(-\infty,+\infty)$；当 α 为负整数时，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；当 α 为正有理数 $\dfrac{q}{p}$，若 p 为偶数，则定义域为 $[0,+\infty)$，若 p 为奇数，则定义域为 $(-\infty,+\infty)$；当 α 为负有理数时，若 p 为偶数，则定义域为 $(0,+\infty)$，若 p 为奇数，则定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

当 α 为偶数时，x^{α} 为偶函数；当 α 为奇数时，x^{α} 奇函数.

当 $\alpha>0$ 时，x^{α} 在 $[0,+\infty)$ 上是严格单调增加的，当 $\alpha<0$ 时，x^{α} 是严格单调减少的.

(ii) 指数函数　$y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$

定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$，其图形经过 $(0,1)$

点. 当 $a>1$ 时,a^x 为严格单调增加的,当 $0<a<1$ 时,a^x 为严格单调减少的.

(iii) 对数函数　$y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$

对数函数是指数函数的反函数,其定义域为 $(0,+\infty)$,图形经过 $(1,0)$ 点,当 $a>1$ 时,函数为严格单调增加的,当 $0<a<1$ 时,函数为严格单调减少的.

(iv) 三角函数

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\mathrm{tg}x,$$
$$y=\mathrm{ctg}x,\quad y=\sec x,\quad y=\csc x.$$

$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$,都是以 2π 为周期的周期函数,且 $|\sin x|\leqslant 1$, $|\cos x|\leqslant 1$. $y=\sin x$ 是奇函数,$y=\cos x$ 是偶函数. $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上严格单调增加,$y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上严格单调减少.

$y=\mathrm{tg}x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$,以 π 为周期且为奇函数.

$y=\mathrm{ctg}x$ 的定义域为 $x\neq k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$,以 π 为周期且为奇函数.

$y=\sec x$ 的定义域与 $\mathrm{tg}x$ 相同,$y=\csc x$ 的定义域与 $\mathrm{ctg}x$ 相同. $\sec x$ 与 $\csc x$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

(v) 反三角函数

$$y=\arcsin x,\quad y=\arccos x,\quad y=\mathrm{arctg}x,$$
$$y=\mathrm{arcctg}x.$$

$y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数,$y=\arccos x$ 是 $y=\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的反函数,$y=\mathrm{arctg}x$ 是 $y=\mathrm{tg}x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的反函数,$y=\mathrm{arcctg}x$ 是 $y=\mathrm{ctg}x$ 在 $(0,\pi)$ 内的反函数.