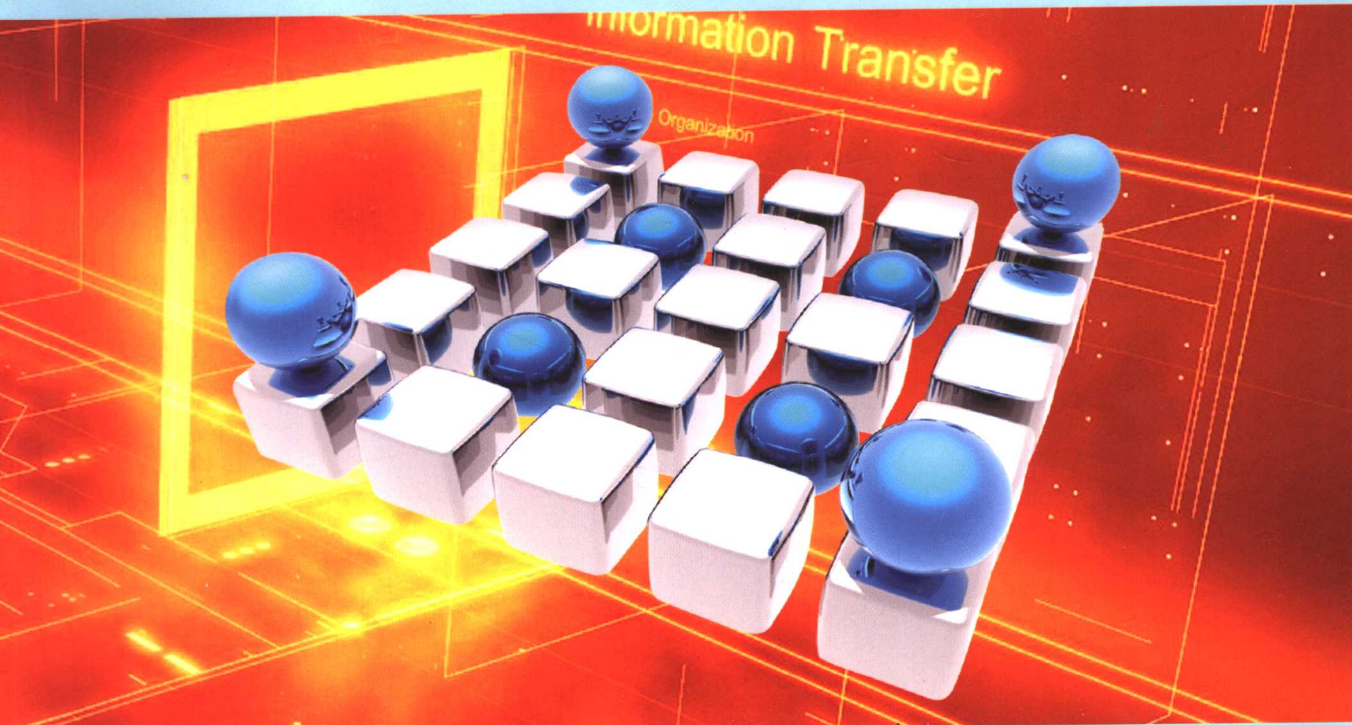
BANXUFANGFAHEWEIFENFANGCHENG

半序方法和微分方程

郭林 著



吉林科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

半序方法和微分方程/郭林著.—长春：
吉林科学技术出版社,2006.6
ISBN 7-5384-3335-X
Ⅰ.半… Ⅱ.郭… Ⅲ.①非线性—泛函分析—方法
②微分工程　Ⅳ.①O177.91②O175

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第075147号

半序方法和微分方程

郭　林著
责任编辑:齐　郁
封面设计:倪晓光
吉林科学技术出版社出版、发行
山东工商学院印刷厂印制
787×1092毫米　16开本　6.25印张　146千字
2006年7月第1版　2006年7月第1次印刷
定价:21.00
ISBN 7-5384-3335-X/O·143
社址　长春市人民大街4646号　邮编　130021
电话/传真　0431-5635185
电子信箱　JLKJCBS@public.cc.jl.cn
网址　www.jkcbs.con　吉林科技出版社

半序方法和微分方程

摘 要

随着对自然界认识的不断深入，人们已逐渐认识到非线性科学在数学、物理学等科学领域中的重要性. 特别是近年来，人们认识到在有限维空间中，系统产生混沌的本质原因是非线性. 目前，非线性泛函分析已成为现代数学中的一个重要分支，并在其它分支中发挥重要作用，非线性泛函分析是处理非线性问题的重要有力的工具，尤其是处理应用中出现的大量微分方程中发挥不可替代的作用. 在非线性泛函分析中，用锥理论 (半序法) 来处理方程是直观而又实用的方法，并和拓扑方法相结合有力地推动了现代非线性泛函分析的发展. 在这方面，以郭大钧教授为代表的学派在锥拉伸锥压缩不动点理论，上下解理论，抽象空间微分方程理论，抽象空间脉冲微分方程理论上取得了辉煌的成就.

非线性泛函分析理论能够成熟的运用于解决非线性微分边值问题中去，并把解的存在性转化为某个非线性算子的不动点存在性. 这一方面的问题实在太多，如抽象空间微分方程初值问题，边值问题，抽象空间脉冲微分方程初值问题，边值问题， Sturm-Liouville 奇异边值问题，奇异 (k,n-k) 微分边值问题.

非线性泛函分析用于解决数学和其他自然科学领域里面提出的问题主要方法有三种：半序方法、拓扑方法、和变分方法. 其中，半序方法是这些方法的基础，也是最早的方法. 由于半序方法得到了更多的关注，其理论的突破已经变得非常不易. 本文无论是在解决具体问题上还是抽象理论上，都对原有的理论有所改进.

在本文中，我们主要应用非线性泛函分析中的半序理论，非紧性测度理论，非紧算子的不动点理论，正规锥和正则锥的特殊性质对一些非线性边值问题进行了讨论，全书共分 3 章.

在第 1 章中，讨论了抽象空间的微分边值问题解的存在性，主要讨论了 4 个问题.

(1)Banach 空间一阶边值问题

(2)Banach 空间二阶边值问题

(3)Banach 空间一阶脉冲边值问题

(4)Banach 空间 n 阶初值问题

主要的方法是建立了一个比较定理 (微分不等式)，采用单调迭代方法，并运用非紧性测度理论得到解的存在性.

在第 2 章，第 3 章中，首行运用 Zorn 引理讨论了一般非紧算子的不动点存在性. 我相信，这些理论在今后讨论各种微分方程中一定有用武之地的. 其次运用正则锥的特殊性质，讨论了一类 Sturm-Liouille 奇异边边值问题，绕开了紧性条件，简化了有关这类问题的条件，并使证明更加简明，在第 2 章的最后最后讨论了一类高阶边值解的存在性，在这里半序方法和和拓扑度理论都得到了运用，并改进了相应结果.

关键词：锥；上下解；边值问题；不动点.

Semi-Order Methods and Differential Equations

Abstract

With the deep-going knowing to the natural world, people have gradually realized that nonlinear science is playing very important role on the fiedlds including mathematics,physics, and so on.Especially in recent years, people discover that Nonlinear is just the key which produces chaos. At present, Nonlinear functional analysis has been a very important branch of modern mathematics, and also it is playing very significant role in other branches. Nonlinear functional analysis has been become a much more important tool for dealing with many nonlinear problems. It is also an important method for studying the nonlinear equations applied mathematics. While in the Nonlinear functional analysis, dealing with equations with the theory of cone is a visual and practical way and it is integrated with topologic method to push the development of modern nonlinear functional analysis forward powerfully. Professor Guo Dajun is the representative of this xchool of though, and they gain great success in fixed pointsof domain expansion and compression theory, degree theory,differential equations in abstract space, impulsive differential equations in abstract space, lower-upper solutions theory and so on.

The theory of Nonlinear functional analysis can be wide applied to nonlinear BVPs. And it can change the existence of solutions into fixed points existence of some nonlinear operator in come. So people begin to carry on research on compact weak compact, continuous, semicontinuous, regular cone, normal cone and fully regular cone of operator.

In this field, there are so many problems, such as IVPs,BVPs of differential equation in abstract space, IVPs and BVPs of impusive equation, the singular BVPs of Sturm-Liouville in R^1Space, singular(k,n-k) of differential BVPs, and so on.

In this paper, we apply theory of ordering, measure of noncompactness, fixed point on noncompact operator and nature of regular cone and normal cone to study some nonlinear BVPs. Meanwhile we get the results of the existence of fixed point on noncompact and nonmonotone operator.

In Chapter 1, we disscuss the existence jof solutions on BVPs of differential equation in the abstract space. There are mainly three questions.

(1)First–order BVP in Banach space

(2) Second–order BVP in Banach space

(3)Nonlinear first–order impulsive integro-differential BVP in Banach spaces.

(4)Integro–differential equation of nth–order IVP in Banach space.

Nonlinear functional analysis can be used solving problems form Mathematical and other areas on natural sciences.There are three main methods here:Semi-ordere methods,Topological methods and variations methods.However,semi-order method is the base and the earliest.Since it is been look after more,the theorems are very difficult to improve.This paper improves those theorems both in problems and abstract theorems.

Through setting up comparison result, applying the method of monotone iteration and measure of noncompactness, we get the existence of solutions.

In Chapter 2 and Chapter3, first we discuss the existence of fixed points on noncompact operator by applying Zorn's Lemma. We believe these theoried will be an important method on dealing with all kinds of differential equations. Next, We discuss the solution of Sturm-Liouville singular BVPs by applying the fixed points theory of increasing operators on the normal cone. This way can simplify the factor about this kind of questions and make proving more simple. And last we study multiple solutions on singular(k,n-k) BVPs. And both the ordering method and topological method are applied and the relevant results are improved.

Key worlds:cone;Upper and Lower solutions;Boundary Value Problems;Fixed points.

目 录

前 言

一　半序在数学中的地位

现代数学的一个重要学派 Bourbaki 学派认为，数学就其本质而言，是研究集合以及作用在集合上的映射. 关于集合，主要是研究集合上的结构. 按照数学目前的认识水平，公认的集合上最基本的结构主要有三个：1, 代数结构，给定元素之间的运算规则；2, 拓扑结构，给出集合元素之间位置的"远近关系"；3, 半序结构，给出集合元素之间的"先后"次序. 在对集合进行讨论过程中，一条似乎显而易见的公理却引起了一系列的争议，这条公理就是选择公理.

选择公理　设对于指标集 A 的每一个元素 α,X_α 是非空集，则存在 A 上的一个函数 C, 使得对于 A 中的每一个 α,$C(\alpha)\in X_\alpha$.

与选择公理等价的公理多达二十几个，其中反映在半序上的这条等价公理又叫 Zorn 引理.

Zorn 引理　如果半序集 X 的每个全序子集都有上界 (下界), 则 X 至少有一个极大 (极小) 元.

1914 年，Hausdorff 证明了由选择公理得出的如下"分球面奇论"：对于二维球面 S^2, 能写成互不相交的四部分，$\mathrm{S}^2=A\bigcup B\bigcup C\bigcup D$,$D$ 是可数集，A,B,C 之间互相能够叠合，但是 $B\bigcup C$ 却能和 A 叠合.

1924 年，Banach,Tarski 得到了"分球体怪论"：T 是一个三维球体，那么存在互不相交的 U 和 V, 使得 $T=U\bigcup V$, 而且 U,V 可以通过有限分割互相叠合，V 又可以通过有限分割与 T 互相叠合.

一条看起来很直观的公理能够导出两个与直观不符的奇论怪论，这促使人们设法不用选择公理或者其等价的公理. 但又得到了下面不能容忍的结论：1,R^1 是可数集合；2, 数学分析的基础之一 Heiner 定理不成立；3,R^1 的一切子集都是可测的；4,Urysohn 引理不成立，自由群可以有非自由的子群.

尽管选择公理能够导出一些不合常规的结论，但普遍认为承认选择公理比不承认选择公理更有利于数学的发展. 因此，上个世纪后半期，把与选择公理或者等价公理运用到数学

各个分支上去，极大的推动了现代数学的发展，而且对数学未来的发展产生了深刻的影响.尤其是把拓扑结构引入到 Zorn 引理中去，得到了一系列有深刻意义的结论.

1976 年， H.Brezis 提出下面序集一般原理：设 Z 是具有半序结构的 Hausdorff 空间，满足下面条件

(1)$\forall x \in Z, \{y \in Z | y \geq x\}$ 是序列闭集.

(2)$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots \Rightarrow \{x_n\}$ 列紧.

(3)存在$\psi : Z \to \mathrm{R}^1$,满足$x < y \Rightarrow \psi(x) < \psi(y)$

(4)ψ 上方有界.

则 Z 必有极大元.

1985 年，孙经先独立得出了上面定理的推广，他引入了集合按序可分的概念以后，把条件 (3) 换成方便检验的形式： (3)* : Z 按序可分.

1971 年，Zorn 原理的成功运用，得到了下方有界的下半连续泛函极小值点的 Ekland 变分原理，极大地推动了变分学的发展. 随后的 Caristi(1976) 不动点定理， Kantrovich 的不动点定理的出现，为变分学发展提供了有力的理论基础.

把序结构和拓扑结构完美结合的典范是实数空间 R^1，然而它不具有普遍的意义. 在一般的 Banach 空间中，把半序和空间拓扑结合起来的最具代表性的思想是锥的的引入. 利用各种特殊类型的锥的不动点存在性，研究抽象空间或者一般实数空间的方程，是非线性分析中的一个重要流派.

然而，对于锥上的不动点存在定理的研究还有许多有待探索的地方. 一方面几乎所有理论都只能解决算子具有紧性和或调性的情形. 对于非紧非单调算子的不动点存在定理接近空白；另一方面，对于正则锥的不动点存在定理成功的运用到具体实际问题中去也是很少有人涉及. 本书作者在这方面进行了开创性的探索，并改进了已有的重要成果.

二 序方法和微分方程

Banach 空间中的微分方程理论是近三十年以来发展起来的一个数学分支，它把常微分方程理论和泛函分析理论结合起来，既可以利用泛函分析的理论方法研究 Banach 空间中的微分方程，也可以通过微分方程提出的问题促进抽象理论中的新的结果的产生. 因此，本世纪初的国内外同行许多都是集抽象理论和具体方程研究的全才. 如 V.Lakshmikantham,

郭大钧，孙经先以及他们培养的一批年轻的数学家.

随着人们对自然界认识的不断深入，已逐渐认识到非线性科学在数学、物理学、化学、生物学、医学、经济学、工程学、控制论等科学领域的重要性. 目前，非线性泛函分析已成为现代数学中的一个重要分支，并在其它分支中发挥重要作用. 非线性泛函分析是处理非线性问题的重要有力的工具，尤其是处理应用中出现的大量微分方程中发挥不可替代的作用. 在非线性泛函分析中，主要方法有半序方法，拓扑方法，变分方法. 其中，用锥理论 (半序法) 来处理方程是直观而又实用的方法，并和拓扑方法相结合有力的推动了现代非线性泛函分析的发展. 在这方面，以郭大钧教授为代表的学派在锥拉伸锥压缩不动点理论，上下解理论，抽象空间微分方程理论，抽象空间脉冲微分方程理论上取得了辉煌的成就.

非线性泛涵分析理论能够成熟的运用于解决非线性微分边值问题中去，并把解的存在性转化为某个非线性算子的不动点存在性. 这一方面的问题实在太多，如抽象空间微分方程初值问题，边值问题，抽象空间脉冲微分方程初值问题，边值问题， Sturm-Liouville 奇异边值问题，奇异 (k,n-k) 微分边值问题.

在抽象空间微分方程方面，人们研究的多限于初值问题 ([1]-[8])，周期边值问题. 但是，抽象空间微分方程的边值问题是多种多样的. 由于一般抽象空间没有序结构，在引入半序过程中，用半序方法解决过于一般的边值问题就有困难，主要是找不到相应的微分不等式. 因此，我们选择了三个倍边值方程:

(1)Banach 空间中的一阶边值问题

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} &= f(t,u(t),(Tu)(t),(Su)(t)), t \in J \\ u(1) &= \beta u(0), \beta > 1 \end{cases}$$

这里

$$\begin{cases} f \in C[J \times E^3, E], J = [0,1] \\ (Tu)(t) = \int_0^t k(t,s)u(s)\mathrm{d}s \\ (Su)(t) = \int_0^1 h(t,s)u(s)\mathrm{d}s \end{cases}$$

(2)Banach 空间中的二阶边值问题

$$\begin{cases} u'' & = f(t,u,u',Tu,Su), \forall t \in J \\ u(0) & = \theta, u'(1) = \beta u'(0) \end{cases}$$

这里 $J=[0,1], f \in C[J \times E^4, E], E$ 是实 Banach 空间. $\beta > 1$ 且

$(Tu)(t) = \int_0^t k(t,s)u(s)\mathrm{d}s$

$(Su)(t) = \int_0^1 h(t,s)u(s)\mathrm{d}s$

(3)Banach 空间一阶脉冲边值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} & = f(t,u(t),(Tu)(t),(Su)(t)), t \in J' \\ \Delta u|_{t=t_i} & = I_i[u(t_i)], i = 1,2,\ldots,m \\ u(1) & = \beta u(0), \beta \le 1 \end{cases}$$

通过对上面三个方程的讨论，扩大了抽象空间微分方程研究的问题范围.

对于 Banach 空间中的高阶微分方程，目前这方面的讨论较少 ([5]), 本书讨论了一类高阶初值问题，通过转化为方程组的方法，得到了解存在的一个充分条件. 用本方法可以讨论其它的高阶方程，但本方法决不是简单的一阶方程有关结论的重复.

对于实空间中的微分方程，我们首先选取了一类共轭边值问题. 鉴于这方面的工作很多 ([16]-[22]), 我们侧重讨论这类方程的多解性. 我们还选取了一类 Sturm-Liouville 奇异边值问题，这类问题也有很多工作，但我们抛弃了全连续算子这个难以验证有苛刻的条件，利用边值问题本身和正则锥的特点，得出了解存在的条件. 叙述证明都更简洁，条件比同类文章弱了.

对于一般非紧非单调算子，不动点存在定理很少，这里受孙经先教授增算子不动点定理 ([9],[29]) 的启发，也使用了 Zorn 引理，得出了非紧非增一般算子的不动点存在性. 当然，对于减算子也适用. 这一类定理推广了正则空间上的增算子不动点定理. 具有一定的理论意义，相信随着人们认识的深入，这类定理在应用上有广阔的应用前景.

第 1 章 Banach 空间中微分边值的几个问题

§1.1 引言及预备知识

对于抽象空间微分方程，人们的讨论多限于初值问题和周期边值问题. 随着研究的深入，自然要讨论一般的边值问题. 然而，对于抽象空间而言，元素之间的关系不像通常的实数之间的关系那么方便的表示. 而倍边值问题是一种方便表示又带有某种物理意义的方程. 鉴于此，本章讨论首先讨论在抽象空间中微分边值的三个问题. 另外，对于高阶微分方程，得到的结果更是少，通过选择一个高阶初值问题，为进一步研究高阶一般问题提供一种思路. 其中第一节是预备知识. 对于抽象空间微分方程，人们的讨论多限于初值问题和周期边值问题，本章试图讨论一类不同于已往常见的周期边值问题，并且讨论了一类高阶初值问题. 第二节讨论一类一阶边值问题,、它是一般周期边值问题的一般化，第三节讨论一类二阶边值问题，第四节讨论了一类脉冲一阶边值问题的解存在性，第五节讨论了高阶初值问题. 这几个问题都是以前没有讨论过的或较少讨论的. (参照 [1]-[8],) 本节预备知识主要参照文献 ([9],[10]).

设 E 是一个 Banach 空间， E 的一个非空闭集 P 如果满足下面条件，我们就称 P 是 E 中的一个锥

(1) 任意给定 $x,y\in P,\alpha\geq 0,\beta\geq 0,$有$\alpha x+\beta y\in P$;

(2) $x\in P,-x\in P\Rightarrow x=\theta$

由以上定义可以看出，锥一定是一个非空凸闭集.

设给定 E 中的锥 P. 对于 $x\in E,y\in E$, 引入二元关系 $\leq$ 如下：

$y-x\in P\Leftrightarrow x\leq y$, 容易验证，按照这种定义所确定的关系是一种半序关系，既满足下面性质：

(1) $x\leq x$

(2) 如果 $x\leq y,y\leq z,$则$x\leq z$

(3) 若 $x\leq y,y\leq x,$则$x=y$

在本书中，如果没有特殊声明，我们总是假定 Banach 空间 E 中的半序是由 E 中给定的锥导入的，并称所在的空间是一个半序 Banach 空间.

定义 1.1.1. P 是正规的是指存在常数 N, 使得

$$\theta \le x \le y \Rightarrow \|x\| \le N\|y\|$$

定义 1.1.2 P 是正则的是指任意按序上升的有界点列都收敛，即

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le \ldots \le y$$

便有 x^* 使

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x^*\| = 0$$

引理 1.1.1 若 P 是正则的，则 P 是正规的.

定义 1.1.3 设 S 是 E 中的有界集，令

$$\alpha(S) = \inf\{\delta > 0 : S = \bigcup_{k=1}^{n} S_k, \mathrm{diam}(S_k) \le \delta\}$$

显然,

$$0 \le \alpha(S) \le \infty.$$

$\alpha(S)$ 叫做 S 的 Kuratowski 非紧性测度，简称非紧性测度.

非紧性测度是 Hausdorff 首先提出的，用来度量一个集合和紧集之间的差距有多大. 因此，可以认为这是一种“紧性测度”. 现在非紧性测度常用于讨论非线性算子的不动点问题，见 [10].

引理 1.1.2 非紧性测度具有下面性质 (S,T 表示 E 中的有界集， α 表实数)

(1)$\alpha(S) = 0 \Leftrightarrow S$是相对紧集.

(2)$S \subseteq T \Rightarrow \alpha(S) \le \alpha(T)$

(3)$\alpha(\overline{S}) = \alpha(S)$

(4)$\alpha(S \bigcup T) = \max\{\alpha(S), \alpha(T)\}$

(5)$\alpha(aS) = |a|\alpha(S)$, 其中$aS = \{x : x = az, z \in S\}$

(6)$\alpha(S + T) \le \alpha(S) + \alpha(T)$, 这里$S + T = \{x : x = y + z, y \in S, z \in T\}$

(7)$\alpha(\overline{\mathrm{co}}S) = \alpha(S)$

(8)$|\alpha(S) - \alpha(T)| \le 2d_h(S, T)$,

其中 $d_h(S,T)$ 表示集 S 和 T 之间的 Hausdorff 距离，即

$$d_h(S,T)=\max\{\sup d(x,T),x\in S;\sup d(x,S),x\in T\},$$

这里 $d(\cdot,\cdot)$ 表示点到集的距离.

引理 1.1.3 设 $H\subset C[J,E]$ 是有界的，等度连续的，则 $\alpha(H(t))$ 在 J 上连续，且

$$\alpha(\{\int_J x(t)\mathrm{d}t:x\in H\})\leq\int_J\alpha(H(t))\mathrm{d}t$$

引理 1.1.4 (Ascoli–Arzela) 集 $H\subseteq C[J,E]$ 是相对紧集的必要充分条件是： H 是等度连续的，并且对每个 $t\in J$, 集 $H(t)$ 是 E 中的相对紧集.

有关锥和半序的理论，已经成为非线性分析的有力工具，有关专著请看 [9][15].

定义 1.1.4 设 E 是一个 Banach 空间， $I\in \mathrm{R}^1,u:I\to E$ 称作一个抽象函数.

定义 1.1.5 如果

$$\lim_{t\to t_0}u(t)=u(t_0)$$

则称 $u(t)$ 在 $t=t_0$ 点处连续. 如果

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}$$

存在，我们就把这个极限定义为抽象函数的导数，记做 $u'(t)$. 容易知道，可导的抽象的函数是连续的. 如果抽象函数在区间 I 上每一点都可导，则它的导数还是一个抽象函数，因此可以进一步引入高阶导数的概念.

定义 1.1.6 设 E 是一个实 Banach 空间， $u(t):[a,b]\to E$ 是一个抽象函数，对于 $[a,b]$ 的任何分法 T:

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_i<ti+1<\cdots<t_n=b,$$

作和 $\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n}u(\xi_i)\Delta t_i$, 其中 $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$ 任取， $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}(i=1,2,\cdots n)$. 如果当 $\lambda(T)=\max\limits_{i}\Delta t_i\to 0$ 时， σ 在 E 中趋于某个极限 I, 则称 $u(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，元素 I 叫做 $u(t)$ 在 $[a,b]$ 上的 Riemann **积分**, 简称积分，记做 $\int_a^b u(t)\mathrm{d}t$; 即

$$\int_a^b u(t)\mathrm{d}t=I=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}u(\xi_i)\Delta t_i$$

引理 1.1.5 若 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $x(t)$ 必在 $[a,b]$ 上可积.

引理 1.1.6(1) 若 $x'(t)$ 在 $[a,b]$ 上存在而且连续，则 Newton-Leibnitz 公式成立:

$$\int_a^b x'(t)\mathrm{d}t = x(b) - x(a)$$

有关抽象函数的详细知识和前面一些引理的证明，详见参考文献 [10], 这里不再详细论述.

定义 1.1.7 设 E_1 和 E_2 都是 Banach 空间， D 是 E_1 中的某个开集， $A: D \to E_2, x_0 \in D$. 若存在 $B \in L(E_1 \to E_2)$ 使得

$$A(x_0+h) - Ax_0 = Bh + \omega(x_0,h),$$

其中 $\omega(x_0,h) = o(\|h\|)$, 即

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|\omega(x_0,h)\|}{\|h\|} = 0$$

则称算子 A 在点 x_0 处 Frechet 可微， Bh 叫做 A 在 x_0 处对于 h 的 Frechet 微分，记为 $\mathrm{d}[A(x_0)h]$; 算子 B 叫做 A 在点 x_0 的 Frechet 导算子，记为 $A'(x_0)$., 简称为 F 可微.

§1.2 Banach 空间中一类一阶积分 – 微分方程边值问题的解

设 E 是一个 Banach 空间， $I \in \mathrm{R}^1, u: I \to E$ 称作一个抽象函数. 如果

$$\lim_{t\to t_0} u(t) = u(t_0)$$

则称 $u(t)$ 在 $t = t_0$ 点处连续. 如果

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}$$

存在，我们就把这个极限定义为抽象函数的导数，记做 $u'(t)$. 容易知道，可导的抽象的函数是连续的. 如果抽象函数在区间 I 上每一点都可导，则它的导数还是一个抽象函数，因此可以进一步引入高阶导数的概念.

设 E 是一个实 Banach 空间， $u(t): [a,b] \to E$ 是一个抽象函数，对于 $[a,b]$ 的任何分法 T:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_i < ti+1 < \cdots < t_n = b,$$

作和 $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} u(\xi_i)\Delta t_i$, 其中 $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ 任取, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}(i = 1, 2, \cdots n)$. 如果当 $\lambda(T) = \max\limits_{i} \Delta t_i \to 0$ 时, σ 在 E 中趋于某个极限 I, 则称 $u(t)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 元素 I 叫做 $u(t)$ 在 $[a, b]$ 上的 Riemann 积分, 简称积分, 记做 $\int_a^b u(t)\mathrm{d}t$; 即

$$\int_a^b u(t)\mathrm{d}t = I = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} u(\xi_i)\Delta t_i$$

本节考虑如下边值问题 (1.2.1)

$$\begin{cases} u' & = f(t, u(t), (Tu)(t), (Su)(t)), t \in J \\ \\ u(1) & = \beta u(0), \beta > 1 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

这里

$$\begin{cases} f \in C[J \times E^3, E], J = [0, 1] \\ \\ (Tu)(t) = \int\limits_0^t k(t, s)u(s)\mathrm{d}s \\ \\ (Su)(t) = \int\limits_0^1 h(t, s)u(s)\mathrm{d}s \end{cases} \tag{1.2.2}$$

其中

$$k(t, s) \in C[D, \mathrm{R}_+], D = \{(t, s) \in J \times J, t \geq s\}$$

$$h(t, s) \in C[J \times J, \mathrm{R}_+], \mathrm{R}_+ = [0, +\infty)$$

在 (1.2.2) 中, 若 $\beta = 1$, 则是周期边值问题, 已有已知若干结果 [8] − −[12]. 若 $0 < \beta < 1$, 则可用代换 $\tau = 1 - t$ 化为 $\beta > 1$ 的情形.

设 $C[J, E] = \{u : J \to E\}$(其中 u 连续) , 则 $C[J, E]$ 在范数

$$\|u\| = \sup\{u(t), t \in J\}$$

下是一 Banach 空间.

引理 1.2.1 设 $p(t) \in C^1[J, E]$ 满足条件 (1.2.3), (1.2.4):

$$p'(t) \leq -a(t)p(t) - b(t)(Tp)(t) - c(t)(Sp)(t), t \in J \tag{1.2.3}$$

$$p(1) \geq \beta p(0) \tag{1.2.4}$$

其中

$$a(t), b(t), c(t) \in C[J, \mathrm{R}_+]$$

则当

$$\beta\{\int_0^1 [a(t) + b(t)\int_0^1 k(t,s)\mathrm{d}s + c(t)\int_0^1 h(t,s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}t\} \leq 1 \tag{1.2.5}$$

时，$p(t) \leq \theta$.

证明 对 $\forall g \in P^*$, 令 $v(t) = g[p(t)]$, 则

$$v(t) \in C^1[J, R], v' = g[p(t)], g[(Tp)(t)] = (Tv)(t), g[(Sp)(t)] = (Sv)(t) \tag{1.2.6}$$

于是我们有:

$$\begin{cases} v'(t) & \leq -a(t)v(t) - b(t)(Tv)(t) - c(t)(Sv)(t), t \in J \\ v(1) & \geq \beta v(0) \end{cases} \tag{1.2.7}$$

下面证明

$$v(t) \leq 0, \forall t \in J$$

假设 $v(t) \leq 0, t \in J$ 不成立，不妨假设

$$\max\{v(t), t \in J\} = v(\tau_1) > 0$$

因 $v(1) \geq \beta v(0)$, 显然 $\tau_1 \neq 0$. 于是 $\tau \in (0,1]$. 设

$$\min\{v(t), t \in J\} = v(\tau_0)$$

显然 $v(\tau_0) < 0$. 否则由 (1.2.6) 知 $v(t)$ 在 J 上递减，这与 $v(1) \geq \beta v(0)$ 矛盾. 设 $v(\tau_0) = -\lambda \geq 0$, 分两种情况讨论.

情形 1: $\tau_0 \in [0, \tau_1]$ 则有

$$\begin{aligned} v(\tau_1) = v(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau_1} v'(t)\mathrm{d}t &\leq -\lambda - \int_{\tau_0}^{\tau_1} [a(t)v(t) + b(t)(Tv)(t) + c(t)(Sv)(t)]\mathrm{d}t \\ &\leq -\lambda + \lambda\int_0^1 [a(t) + b(t)\int_0^1 k(t,s)\mathrm{d}s + c(t)\int_0^1 h(t,s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}t \leq 0. \end{aligned}$$