高等院校工科经典教材配套辅导

物理学教程

习题精解

马文蔚主编《物理学教程》同步辅导(上、下册合订本)

熊水兵 主编

众邦考试教育研究所 策划

★重点考点归纳

★方法技巧点拨

★教材习题详解

★考研真题汇编

★名师精华积累

西南交通大学出版社

Http://press.swjtu.edu.cn

图书在版编目(CIP)数据

物理学教程习题精解 / 熊水兵主编. 一成都:西南交通大学出版社,2006. 9

ISBN 7-81104-384-X

Ⅰ. 物… Ⅱ. 熊… Ⅲ. 物理学一高等学校一解题 Ⅳ. 04-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 071842 号

物理学教程习题精解

熊水兵 主编

*

责任编辑 万 方

特邀编辑 李 彬 叶 凡

封面设计 晨 宇

西南交通大学出版社出版发行

(成都二环路北一段 111 号 邮政编码:610031 发行部电话:028-87600564)

http://press.swjtu.edu.cn

武汉武铁印刷厂印刷

*

成品尺寸:170 mm×230 mm 印张:21.375

字数:441 千字 印数:1—5 000 册

2006 年 9 月第 1 版 2006 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 7-81104-384-X

定价:23.00 元

前　言

本书根据马文蔚主编的《物理学教程》[根据东南大学等七所工科院校编《物理学》(第四版)改编]编写。

每章包括**学习要求**、**内容提要**、**典型例题**、**问题详解**和**习题解答**等部分。

“学习要求”一般有掌握、理解和了解三个层次，这些要求是根据我们的教学经验提出，符合高等工科院校《大学物理课程教学基本要求》；**“内容提要”**对教程中的主要概念、原理、定律、公式等做了较详细、系统的总结；**“典型例题”**主要以历年研究生入学考试“普通物理学”试题为主，并对一些主要的解题方法、技巧和解题时应注意的问题进行了简要总结；**“问题详解”**和**“习题解答”**针对《物理学教程》中每章后面的问题和习题做了较详细的分析和解答，力求思路清晰、叙述简洁明了、解题步骤规范完整。

本书可供高等院校工科各专业以及理科非物理专业学生阅读学习，也可供从事基础物理教学工作的教师参考。由于编者水平所限，书中错、漏难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2006 年 9 月

目　　录

第一章　质点运动学

学习要求

- 掌握描述质点运动状态的各物理量的意义，明确它们的相对性、瞬时性、矢量性和独立性。
- 理解质点运动方程的意义，能由运动方程求出质点的位移、路程、速度、加速度等；能由加速度(或速度)及初始条件求出质点的运动方程。
- 掌握圆周运动的线量描述和角量描述及其相互关系，理解圆周运动的切向加速度和法向加速度，能熟练处理圆周运动。
- 理解运动描述的相对性，掌握同一质点在不同参考系中运动的位矢、位移、速度和加速度的关系。

一　内容提要

1. 质　点

如果在研究某物体的运动时，可以忽略其大小和形状，或者只考虑其平动，那么，就可以把物体当作是一个有一定质量的点，这样的点称为质点。

质点是一种理想模型，一个物体能否看成质点，要视所研究的具体问题而定。

2. 参考系

为描述某一物体的运动而被选作参考的物体称为参考系，相对于不同的参考系对同一物体的运动情况的描述是不同的。参考系的选择是任意的。

为定量描述物体的运动，需要在参考系上建立合适的坐标系。常用的坐标系有直角坐标系、平面极坐标系、自然坐标系等。

3. 位置矢量 $\boldsymbol{r}$

质点 P 在任意 t 时刻的位置，可以用从参考系上的固定点 O(即坐标原点) 引向质点 P 的有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 来表示，该有向线段称为质点的位置矢量 $\boldsymbol{r}(=\overrightarrow{OP})$，简称位矢。在直角坐标系中位矢 $\boldsymbol{r}$ 可表示为　$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$

其大小为

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

其方向可用方向余弦表示为

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \qquad \cos\beta = \frac{y}{r}, \qquad \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

式中 α、β、γ 分别为位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 与 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴之间的夹角。

4. 运动方程

质点的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 随时间 t 变化的函数关系，称为质点的运动方程，即

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{i} + z(t)\boldsymbol{k}$$

而 $x = x(t)$，$y = y(t)$，$z = z(t)$ 则是运动方程的分量式，在分量式中消去时间 t 即可得到质点运动的轨迹方程。

5. 位移 $\Delta\boldsymbol{r}$

质点在时刻 t 的位矢为 $\boldsymbol{r}(t)$，在 $t+\Delta t$ 时刻的位矢为 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$，则质点在 $t \sim t+\Delta t$ 这段时间内的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 为

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$$

即由位矢 $\boldsymbol{r}(t)$ 的末端指向位矢 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 的末端的矢量。注意，位移与路程的区别，位移是矢量，有大小也有方向，路程是质点所经过的路径的长度，是标量。一般位移的大小不等于路程，即 $|\Delta\boldsymbol{r}| \neq \Delta s$，当 $\Delta t \to 0$ 时，位移的大小等于路程，即 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s$。

6. 速度 $\boldsymbol{v}$

是描述质点运动快慢及方向的物理量。

质点在 $t \sim t+\Delta t$ 这段时间内的平均速度为

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

质点在 t 时刻的瞬时速度（简称速度）为

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

速度的方向沿质点运动轨迹的切线方向且指向运动的前方。$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$、$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 为速度沿 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴的分量 v_x、v_y、v_z。

速度的大小称为速率，质点在 t 时刻的速率 v 为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

7. 加速度 $\boldsymbol{a}$

是描述质点速度变化快慢的物理量。

质点在 $t \sim t+\Delta t$ 这段时间内的平均加速度为

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

质点在 t 时刻的瞬时加速度（简称加速度）为

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$$

式中$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$、$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$、$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$为加速度沿 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴的分量 a_x、a_y、a_z。

8. 匀加速运动

质点作匀加速运动时，其加速度 $\boldsymbol{a}$ 为常矢量，若已知质点运动的初始状态，即 $t=0$ 时，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0$，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$，则质点在任意 t 时刻的速度 $\boldsymbol{v}$ 和位矢 $\boldsymbol{r}$ 为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{a}t$$

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{v}_0t+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$

9. 圆周运动

质点作半径为 r 的圆周运动，其角量描述为

角位置　　$\theta(t)$

角位移　　$\Delta\theta=\theta(t+\Delta t)-\theta(t)$

角速度　　$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

角加速度　　$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

角量与线量的关系为　　$\Delta s=r\Delta\theta$

$$v=r\omega$$

$$a_t=r\alpha$$

圆周运动的加速度为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t+\frac{v^2}{r}\boldsymbol{e}_n=r\alpha\boldsymbol{e}_t+r\omega^2\boldsymbol{e}_n$$

式中分量 $a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\alpha$ 称为切向加速度，方向沿轨迹的切线方向，是由于速度的大小变化引起的，$\boldsymbol{e}_t$ 为切向单位矢量；分量 $a_n=\frac{v^2}{r}=r\omega^2$ 称为法向加速度，方向指向圆心，是由于速度的方向变化引起的，$\boldsymbol{e}_n$ 为法向单位矢量。

圆周运动总的加速度大小和方向分别为

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2},\qquad \tan\varphi=\frac{a_n}{a_t}$$

10. 相对运动

在不同的参考系中对同一质点运动的描述是不同的。设有两个参考系 S 和 S'，若 S' 系以速度 $\boldsymbol{u}$ 相对于 S 系运动，则在两个参考系中对同一质点运动描述的变换关系为

位置变换　　$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{r}_0$

位移变换 $\Delta \boldsymbol{r} = \Delta \boldsymbol{r}' + \Delta \boldsymbol{r}_0$

速度变换 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}$

加速度变换 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_0 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$

以上变换式都是根据绝对时空观导出的，只适用于 $u \ll c$(光速) 的情况，称为伽利略变换。

二 典型例题

质点运动学有两类基本问题：① 已知质点的运动方程求解质点的速度、加速度等，这需要用求导数的方法；② 已知加速度或速度以及运动的初始条件求质点的运动方程，这需要用求积分的方法。

在解答具体问题时，应注意：

(1) 弄清题意，明确所要解答的问题以及已知条件；

(2) 选取合适的参考系，建立合适的坐标系；

(3) 要注意位矢、速度、加速度等的瞬时性，在处理问题时，质点在任意时刻的位矢、速度、加速度等应先用表达式表示，然后再代入具体的时间，切记不能先用特殊时刻的值，然后再进行处理；

(4) 要注意位矢、速度、加速度等是矢量，有大小也有方向，在处理问题时，可用矢量式，也可以用分量式先在各方向上进行处理，然后再进行合成；

(5) 在处理问题时，要根据条件画示意图，解题往往要借助图中的几何关系，使图与公式配合，以便更清晰地表达解题过程。

例 1－1 已知质点运动方程 $\boldsymbol{r} = (2t - 3t^2)\boldsymbol{i} + (-4t^2 + t^3)\boldsymbol{j}$，$r$ 的单位为 m，t 的单位为 s，试求：

①$t = 2\mathrm{s}$ 时质点的坐标，从 $t = 0$ 到 $t = 2\mathrm{s}$ 质点的位移；

② 前 2s 内质点的平均速度和加速度；

③ 前 $t = 2\mathrm{s}$ 时质点的速度和加速度。

【解】 质点的运动方程为 $\boldsymbol{r} = (2t - 3t^2)\boldsymbol{i} + (-4t^2 + t^3)\boldsymbol{j}$

用求导数的方法可求得速度和加速度的表达式分别为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (2 - 6t)\boldsymbol{i} + (-8t + 3t^2)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -6\boldsymbol{i} + (-8 + 6t)\boldsymbol{j}$$

则质点在 $t = 0$ 时的位矢、速度分别为

$$\boldsymbol{r}_0 = 0(\mathrm{m}), \quad \boldsymbol{v}_0 = 2\boldsymbol{i}(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

质点在 $t = 2\mathrm{s}$ 时的位矢、速度分别为

$$r_2 = -8i - 8j(\mathrm{m}),\quad v_2 = -10i - 4j(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

① 由位移定义，可得在 $t = 0$ 到 $t = 2\mathrm{s}$ 时间内质点的位移为

$$\Delta r = r_2 - r_0 = -8i - 8j(\mathrm{m})$$

② 由平均速度的定义，可得在 $t = 0$ 到 $t = 2\mathrm{s}$ 时间内质点的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r_2 - r_0}{\Delta t} = \frac{-8i - 8j}{2} = -4i - 4j(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

由平均加速度的定义，可得在 $t = 0$ 到 $t = 2\mathrm{s}$ 时间内质点的平均速度为

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_0}{\Delta t} = \frac{-12i - 4j}{2}$$
$$= -6i - 2j(\mathrm{m \cdot s^{-2}})$$

③ 将 $t = 2\mathrm{s}$ 代入 v、a 的表达式可得

$$v_2 = -10i - 4j(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$
$$a_2 = -6i + 4j(\mathrm{m \cdot s^{-2}})$$

例 1—2 已知一质点沿 x 轴运动，其加速度 $a = 12t(\mathrm{m \cdot s^{-2}})$，且 $t = 0$ 时，质点位于 $x_0 = 10(\mathrm{m})$ 处，初速度 $v_0 = 2(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$，试求质点的运动方程。

【解】 质点的加速度和初始条件已知，可利用积分法求出其运动方程。由于质点只在 x 轴运动，可用代数式代替矢量式进行运算。由加速度

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

可得

$$\mathrm{d}v = a\mathrm{d}t$$

对上式积分

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}x = \int_0^t a\mathrm{d}t = \int_0^t 12t\mathrm{d}t$$

得

$$v = v_0 + 6t^2$$

再由速度

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

可得

$$\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$$

对上式积分

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t v\mathrm{d}t = \int_0^t (v_0 + 6t^2)\mathrm{d}t$$

得

$$x = x_0 + v_0 t + 2t^3$$
$$= 10 + 2t + 2t^3(\mathrm{m})$$

例 1—3 一质点沿 x 轴运动，其运动方程为 $x = 3t^2 - t^3$。试求：① 质点在最初 4s 的位移和路程；② 质点沿 x 轴正向运动的最大速度。

【解】 质点的运动方程为

$$x = 3t^2 - t^3$$

则其速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6t - 3t^2$$

其加速度为 $$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 6 - 6t$$

由此可知，此质点先沿 x 轴正向运动（$v > 0$），并且加速（$a > 0$），在到某一时刻（或位置）时，加速度为 0，此后质点开始减速（$a < 0$），并继续沿 x 轴正向运动（$v > 0$），又到某一时刻（或位置）时，速度为 0，此后质点转向，开始沿 x 轴负方向运动（$v < 0$）。

① 当 $v = 0$ 时，即 $v = 6t - 3t^2 = 0$，得 $t = 2\mathrm{s}$ 时，质点开始转向。此时质点的位置为 $$x_2 = 3 \times 2^2 - 2^3 = 4(\mathrm{m})$$

在 $t = 0\mathrm{s}$ 时 $\quad x_0 = 0$

在 $t = 4\mathrm{s}$ 时 $\quad x_4 = 3 \times 4^2 - 4^3 = -16(\mathrm{m})$

所以质点在最初 4s 的位移为

$$\Delta x = x_4 - x_0 = -16(\mathrm{m})$$

质点在最初 4s 的位移路程为

$$\Delta s = |x_2 - x_0| + |x_4 - x_2| = |4 - 0| + |-16 - 4| = 24(\mathrm{m})$$

② 当 $a = 0$ 时，即 $a = 6 - 6t = 0$，得 $t = 1\mathrm{s}$ 时，质点的速度最大，为

$$v_{\max} = 6 \times 1 - 3 \times 1^2 = 3(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

例 1—4 一质点从静止出发沿半径为 $R = 3\mathrm{m}$ 的圆周运动，切向加速度为 $a_t = 3\mathrm{m \cdot s^{-2}}$，试求：① 经过多少时间它的总加速度 a 恰好与半径成 45° 角？② 在上述时间内，质点所经过的路程和角位移各为多少？

【解】 质点作变速圆周运动，且 $v_0 = 0, a_t = 3\mathrm{m \cdot s^{-2}}$。

由切向加速度 $$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

得 $$\mathrm{d}v = a_t \mathrm{d}t = 3\mathrm{d}t$$

积分得 $$v = 3t$$

所以质点的法向加速度为 $$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{9t^2}{R}$$

质点的角速度为 $$\omega = \frac{v}{R} = \frac{3t}{R}$$

再积分，得质点的角位移为 $$\Delta\theta = \frac{3t^2}{2R}$$

① 当质点的总加速度 a 恰好与半径成 45° 角时，其切向加速度与法向加速度相等，即

$$a_t = a_n$$

$$3 = \frac{9t^2}{R}$$

解得 $$t = \sqrt{\frac{R}{3}} = 1(\mathrm{s})$$

② 在 0 ～ 1s 时间内质点的角位移为

$$\Delta\theta = \frac{3t^2}{2R} = 0.5(\text{rad})$$

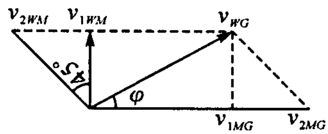
在 0 ～ 1s 时间内质点所经过的路程为

$$\Delta s = R\Delta\theta = 1.5(\text{m})$$

例 1－5 一人骑自行车向东而行。在速率为 $10\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 时，觉得有南风；速率增至 $15\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 时，觉得有东南风。求风的速度和方向。

【解】 人骑自行车的速度是以地面为参考系，是人对地面的速度，记为 $\boldsymbol{v}_{MG}$；而人感觉的风速是以人为参考系，是风对人的速度，记为 $\boldsymbol{v}_{WM}$；所求的风速是以地面为参考系，是风对地面的速度，记为 $\boldsymbol{v}_{WG}$。由相对运动的知识可得

$$\boldsymbol{v}_{WG} = \boldsymbol{v}_{WM} + \boldsymbol{v}_{MG}$$



当人骑自行车以速率 $10\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 向东行时，觉得有南风，说明 v_{1MG} 大小为 $10\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，方向向东，$v_{1WM}$ 方向向北，此时有

$$\boldsymbol{v}_{MG} = \boldsymbol{v}_{1WM} + \boldsymbol{v}_{1MG}$$

如右图所示。

当人骑自行车以速率 $15\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 向东行时，觉得有东南风，说明 $\boldsymbol{v}_{2MG}$ 大小为 $15\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，方向向东，$\boldsymbol{v}_{2WM}$ 方向向西北，此时有

$$\boldsymbol{v}_{WG} = \boldsymbol{v}_{1WM} + \boldsymbol{v}_{1MG}$$

如图所示（注意：风对地的速度 $\boldsymbol{v}_{WG}$ 不变）。

由几何关系可知，风速 $\boldsymbol{v}_{WG}$ 的向东分量大小应等于 $\boldsymbol{v}_{1MG}$ 的大小，为 $10\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，风速 $\boldsymbol{v}_{WG}$ 的向北分量大小应等于 $\boldsymbol{v}_{1WM}$ 的大小，而 $\boldsymbol{v}_{1WM}$ 的大小又等于

$$|\,\boldsymbol{v}_{2WM}\,|\cos\frac{\pi}{4} = |\,\boldsymbol{v}_{2MG} - |\,\boldsymbol{v}_{1MG}\,| = 5(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

所以风速大小为

$$|\,\boldsymbol{v}_{WG}\,| = \sqrt{10^2+5^2} = 11.18(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

方向为

$$\tan\varphi = \frac{5}{10} = 0.5$$

$$\varphi = 26.57°$$

三 问题详解

1－1 在一艘内河轮船中，两个旅客有这样的对话：

甲：我静静地坐在这里好半天了，我一点也没有运动。

乙：不对，你看看窗外，河岸上的物体都飞快地向后掠去，船也在飞快前进，你也在很快地运动。

试把他们讲话的含义阐述得确切一些，究竟旅客甲是运动，还是静止？你是如何理解运动和静止这两个概念的。

【解】 相对于不同的参考系，对同一物体运动的描述是不同的。旅客甲说“我静静地坐在这里好半天了，我一点也没有运动。”他所选择的参考系是他所乘坐的轮船，相对于轮船，他的位置没有发生变化，是静止的；而旅客乙说“你看看窗外，河岸上的物体都飞快地向后掠去”，此时旅客乙所选择的参考系为轮船，“船也在飞快前进，你也在很快地运动。”此时旅客乙所选择的参考系是河岸上的物体，相对于河岸上的物体，旅客的位置发生了变化，是运动的。

静止都是相对的，是相对于某一参考系而言的；而运动是物质存在的形式，一切物质都处于永恒不息的运动之中，物质运动存在于人类的意识之外，这就是运动本身的绝对性。

1－2　已知质点的运动方程为 $\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$，有人说其速度和加速度分别为

$$v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \quad a = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$，你说对吗？

【解】 不对。位移、速度、加速度都为矢量。所以有

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t},\ v = |\boldsymbol{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}$$

$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ 是指元位移矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的大小

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = |\mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k}| = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}$$

而 $\mathrm{d}r$ 是指位置矢量的大小（矢量的长度）的变化，与 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ 是根本不同的两个概念，所以

$$v \neq \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

同理

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \neq \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$$

1－3　在习题 1－3 中，有人认为：船速为 $v' = v\cos\theta$，由此得出的答案是错的。你知道错在哪里吗？

【解】 习题 1－3 中，当小船前进时，不但绳的长度缩短，绳子的方向也在变化，收绳速率 v 是平面极坐标系中径向速度的大小，而径向速度是绳头运动总速度的一个分量。此解法是用投影的方法直接求速度，但错误的将收绳的速度当作总速度，而将小船前进的速度误认为是收绳速度在水平方向的分量，由此得出了一个错误得结果。

1－4　一质点作匀速率圆周运动，取其圆心为坐标原点。试问：质点的位矢与速度、位矢与加速度、速度与加速度的方向之间有何关系？

【解】 在匀速率圆周运动中，质点位矢的方向沿圆周半径向外；质点速度的方向沿圆周切线方向，即与圆周半径垂直；由于质点运动的速率不变，质点的切向加速度为

零，只有法向加速度，而法向加速度的方向指向圆心。因此，位矢与速度的方向垂直，位矢与加速度方向相反，速度与加速度方向垂直。

1－5　在《关于两门新科学的对话》一书中，伽利略写道："仰角（即抛射角）比 45° 增大或减小一个相等角度的抛体，其射程是相等的。"你能证明吗？

【解】　设这个角度为 θ，则物体分别以抛射角 $\theta_1 = 45° - \theta$ 和 $\theta_2 = 45° + \theta$ 被抛出，设物体被抛出时的初速度大小为 v。其运动方程分别为

$$\begin{cases} x_1 = v\cos\theta_1 t \\ y_1 = v\sin\theta_1 t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases},\qquad \begin{cases} x_2 = v\cos\theta_2 t \\ y_2 = v\sin\theta_2 t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

将上式分别消去 t 得轨迹方程为

$$y_1 = x_1\tan\theta_1 - \frac{1}{2}g\frac{x_1^2}{v^2\cos^2\theta_1}$$

$$y_2 = x_2\tan\theta_2 - \frac{1}{2}g\frac{x_2^2}{v^2\cos^2\theta_2}$$

当物体落回水平面时有　$y_1 = 0, y_2 = 0$

由以上可得射程分别为　$x_1 = \dfrac{v^2\sin2\theta_1}{g}$，　$x_2 = \dfrac{v^2\sin2\theta_2}{g}$

而　$\sin2\theta_1 = \sin2\theta_2$

所以 $x_1 = x_2$，即射程相等。

1－6　下列说法是否正确：

① 质点做圆周运动的加速度指向圆心；

② 匀速圆周运动的加速度为恒量；

③ 只有法向加速度的运动一定是圆周运动；

④ 只有切向加速度的运动一定是直线运动。

【解】　① 错。质点做变速圆周运动时，其切向加速度不为零，加速度不指向圆心。

② 错。加速度是矢量，匀速圆周运动的加速度大小虽然恒定，但其方向始终指向圆心，始终在改变。

③ 错。例如，在一水平面内沿内表面光滑的弯曲管道运动的小球，在运动过程中，只有法向加速度，但其运动不是圆周运动。

④ 对。切向加速度只改变速度的大小，不改变速度的方向。

1－7　在地球的赤道上，有一质点随地球自转的加速度为 a_E，而此质点随地球绕太阳公转的加速度为 a_S。设想地球绕太阳的轨道可视为圆形。你知道这两个加速度之比是多少？

【解】　将地球自转与地球绕太阳公转视为匀速率圆周运动，则地球自转与公转的角速度分别为

$$\omega_E = \frac{2\pi}{24}\mathrm{rad}\cdot\mathrm{h}^{-1}, \qquad \omega_S = \frac{2\pi}{24\times 365}\mathrm{rad}\cdot\mathrm{h}^{-1}$$

则它们的加速度(法向加速度)分别为

$$a_E = R_E\omega_E^2, \qquad a_S = R_S\omega_S^2$$

所以
$$\frac{a_E}{a_S} = \frac{R_E\omega_E^2}{R_S\omega_S^2} = 365^2 \times \frac{R_E}{R_S}$$

其中 $R_E = 6.4\times10^6\,\mathrm{m}$ 为地球半径，$R_S = 1.5\times10^{11}\,\mathrm{m}$ 为地球与太阳的距离。代入数据得

$$\frac{a_E}{a_S} = 5.7$$

1－8　一只鸟在水平面上沿直线以恒定速率相对地面飞行，有一汽车在公路上行驶，在什么情况下，汽车上的观察者观察到鸟是静止不动的?在什么情况下，他观察到小鸟似乎往回飞。

【解】　当汽车行驶的方向与鸟飞行的方向相同，且速度大小相等时，汽车上的观察者观察到鸟是静止不动的；当汽车行驶的方向与鸟飞行的方向相同，且速度大于鸟飞行的速度时，他观察到小鸟似乎往回飞。

1－9　如果有两个质点分别以初速度 $\boldsymbol{v}_{10}$ 和 $\boldsymbol{v}_{20}$ 抛出，$\boldsymbol{v}_{10}$ 和 $\boldsymbol{v}_{20}$ 在同一平面内且与水平面的夹角分别为 θ_1 和 θ_2。有人说，在任意时刻，两质点的相对速度是一常量。你说对吗?

【解】　对。从质点抛出时开始计时，在任意 t 时刻，两质点的速度分别为

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_{10} + \boldsymbol{g}t$$
$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_{20} + \boldsymbol{g}t$$

所以，两质点在任意 t 时刻的相对速度为

$$\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_{20} + \boldsymbol{g}t - (\boldsymbol{v}_{10} + \boldsymbol{g}t) = \boldsymbol{v}_{20} - \boldsymbol{v}_{10}$$

可以看出上式与时间无关，为一常量。

四　习题解答

1－1　已知质点沿 x 轴作直线运动，其运动方程为

$$x = 2\mathrm{m} + (6\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t^2 - (2\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t^3,$$

求：① 质点在运动开始后 4.0s 内的位移的大小；② 质点在该时间内所通过的路程。

【解】　① 由运动方程知，当 $t = 0\mathrm{s}$ 时，质点的初位置为 $x_0 = 2\mathrm{m}$，当 $t = 4.0\mathrm{s}$，质点的初位置为 $x_4 = 2 + 6\times4^2 - 2\times4^3 = -30(\mathrm{m})$。所以这段时间内质点位移大小为

$$\Delta x = x_4 - x_0 = -30 - 2 = -32(\mathrm{m})$$

负号表示质点位移沿 x 轴负方向。

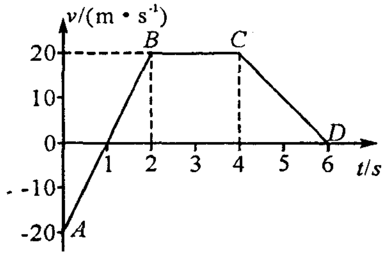
② 由 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 得质点的速度为

$$v=12t-6t^2$$

由分析可知在初始 $t=0\mathrm{s}$ 和 $t=2\mathrm{s}$ 时质点速度为零，即质点先沿 x 轴正向运动至 $t=2\mathrm{s}$，此时质点位置在 $x_2=(2+6\times2^2-2\times2^3)\mathrm{m}=10\mathrm{m}$ 处，然后沿 x 轴负向运动至 $x_4=-30\mathrm{m}$ 处。所以，在前 4.0s 内质点所通过的路程为

$$\Delta s=|x_2-x_0|+|x_4-x_2|=|10-2|+|-30-10|=48\mathrm{m}$$

1—2　一质点沿 x 轴方向作直线运动，其速度与时间的关系如图所示。设 $t=0$ 时，$x=0$。试根据已知的 $v-t$ 图，画出 $a-t$ 图以及 $x-t$ 图。



习题 1—2 图

【解】　由图可知质点运动的速度大小为

$$v=\begin{cases}20t-20 & 0\mathrm{s}\leqslant t\leqslant 2\mathrm{s}\\ 20 & 2\mathrm{s}\leqslant t\leqslant 4\mathrm{s}\\ -10t+60 & 4\mathrm{s}\leqslant t\leqslant 6\mathrm{s}\end{cases}$$

由 $a=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 得质点的加速度大小为

$$a=\begin{cases}20\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2} & 0\mathrm{s}\leqslant t\leqslant 2\mathrm{s}\\ 0\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2} & 2\mathrm{s}\leqslant t\leqslant 4\mathrm{s}\\ -10\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2} & 4\mathrm{s}\leqslant t\leqslant 6\mathrm{s}\end{cases}$$

由 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 得 $\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$，积分 $\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_{t_0}^{t}v\mathrm{d}t$，得

$$x=x_0+\int_{t_0}^{t}v\mathrm{d}t$$

在 $0\sim2\mathrm{s}$ 时间内，质点的位置为

$$x=0+\int_0^t(20t-20)\mathrm{d}t$$
$$=10t^2-20t$$

当 $t=2\mathrm{s}$ 时，$x_2=0(\mathrm{m})$。

在 $2\sim4\mathrm{s}$ 时间内，质点的位置为

$$x=x_2+\int_2^t 20\mathrm{d}t=20t-40$$

当 $t=4\mathrm{s}$ 时，$x_4=40(\mathrm{m})$。

在 $t=6\mathrm{s}$ 时间内，质点的位置为

$$x=x_4+\int_4^t(-10t+60)\mathrm{d}t$$
$$=-5t^2+60t-120$$

所以质点在任意时刻的位置为