普通高等教育“十一五”国家级规划教材

南开大学数学教学丛书

拓扑学基础

第二版

林金坤 编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

南开大学数学教学丛书

拓扑学基础

（第二版）

林金坤　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书在介绍度量空间之后，引入拓扑空间，然后叙述拓扑空间的连续映射和同胚、紧致性、连通性、乘积空间和商空间；从单形入手介绍单纯复形和多面体的概念和性质、重心、重分和单纯逼近存在定理；基本群定义及其同伦等价不变性、计算方法和一些计算结果的应用；在单纯同调群之后介绍奇异同调群及其同伦等价不变性，同调群的正合序列、切除定理. 第二版在第一版的基础上，对部分内容作了修饰，把原来作为习题的一些延伸内容补充到正文里面，并增加了一些有针对性的习题.

本书适合高等院校数学专业学生、教师以及数学工作者.

图书在版编目（CIP）数据

拓扑学基础/林金坤编. –2 版 — 北京：科学出版社，2007
(普通高等教育"十一五"国家级规划教材 · 南开大学数学教学丛书)
ISBN 978-7-03-018383-5

I. 拓… II. 林… III. 拓扑 – 高等学校 – 教材 IV. O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 159676 号

责任编辑：林 鹏 李鹏奇 / 责任校对：陈丽珠
责任印制：张克忠 / 封面设计：黄华斌 陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1998 年 6 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007 年 1 月第 二 版 印张：9 3/4
2007 年 1 月第七次印刷 字数：179 000
印数：16 801—18 800

定价：18.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）

丛书第二版序

《南开大学数学教学丛书》自 1998 年面世以来, 事情有了许多变化. 有两个大变化使我们决心要修改并再版这套丛书.

正如我们的初衷一样, 这期间得到了许多老师、同学、同行的帮助, 使这套丛书相继列入了 “中国科学院规划教材”, “全国十一五规划教材”. 同时, 我们的教学与当初也不尽相同. 为了继续得到大家的帮助, 与大家继续交流, 对这些书做一些修改是很有必要的.

2004 年 12 月 3 日陈省身先生逝世. 1972 年陈省身先生回国后提出了中国在 21 世纪将会成为 “数学大国”, 并为此团结广大的数学界的力量而努力奋斗, 终于实现了这个目标. 2002 年, 第 24 届国际数学家大会于 8 月 20 日至 28 日在中国北京举行并取得圆满成功. 这是中国第一次主办国际数学家大会, 也是发展中国家第一次主办这一大会. 在大会期间, 陈省身先生曾说, 中国已经成为 “数学大国”. 陈省身先生还说:“21 世纪的数学的发展是很难预测的, 它一定会超越 20 世纪, 开辟出一片崭新的天地, 希望中国未来的数学家能够成为开辟这片新天地的先锋.”

这套丛书的产生是与陈省身先生倡导和推动南开大学数学试点班的建立和教学改革密不可分的. 陈省身先生的逝世既使我们无比悲痛和深切怀念, 也激发我们这些绝大多数过花甲近古稀的编著者们为中国的数学, 数学教育继续尽一些微薄之力. 修改这套丛书是表达我们这种愿望的方式.

在数学已成为高科技的基础和现代文明标志的今天, 我们不能满足于 “中国数学的平等和独立”, 即数学大国的地位, 而是要成为开辟数学新天地的先锋, 即要争取 “数学强国” 的地位. 为使今天的 “数学大国” 成为明天、后天以至永远的 “数学强国”, 当然要从多方面努力. 数学教育是不可或缺的重要方面. 我们既需要高质量的、稳定的数学教育, 又需要不断推陈出新、不断发展的数学教育. 这是一个艰巨的任务. 这个任务历史地落在一代又一代的年青人的肩上.

在中国的数学教育上, 也就是争取成为 “数学强国” 的过程中, 我们如果能够 “润物”, 虽然 “无声” 也将心满意足. 因此我们既高兴看到《南开大学数学教学丛书》今天能够生存和发展, 又更高兴地期待明天它被更新、更好的教材取而代之.

中国科学出版社以前支持我们出版了这套丛书, 现在继续支持丛书的第二版, 做了更多的工作. 我们致以深切的感谢, 并希望以后合作得更好, 更愉快. 当然, 我们仍然殷切期望老师们, 同学们及同行们的继续帮助.

全体编著者

2007 年 1 月

丛书第一版序

海内外炎黄子孙都盼望中国早日成为数学大国，也就是“实现中国数学的平等和独立”①. 平等和独立是由中国出类拔萃的数学家及其杰出的研究工作来体现的，要有出类拔萃的数学家就要培养一批优秀的研究生、大学生. 这批人不在多，而在精，要层次高. 也就是要求他们热爱数学、基础扎实、知识面广、能力强.

20 世纪 80 年代中期，国家采纳了陈省身先生的几个建议. 建议之一是为培养高质量的数学专业的大学生，需要建立数学专业的试点班. 经过胡国定先生等的努力，1986 年在南开大学建立了数学专业的试点班. 这些做法取得了成功，并在基础学科的教学中有了推广. 1990 年在全国建立“国家理科基础学科研究和教学人才培养基地”，其后南开大学数学专业成为基地之一. 从 1986 年到现在的 10 余年中南开数学专业是有成绩的，例如他们四次参加全国大学生数学竞赛获三次团体第一，一次团体第三. 在全国和国际大学生数学建模比赛中多次获一等奖. 毕业生中的百分之八十继续攻读研究生，其中许多人取得了很好的成绩.

当然，取得这些成绩是与陈省身先生的指导、帮助分不开，是与国内外同行们的支持与帮助分不开的. 如杨忠道、王叔平、许以超、虞言林、李克正等或参与教学计划、课程设置、课程内容的制定，或到南开任教等等. 有了这些指导、帮助与支持，南开基础数学专业得以广泛吸收国内外先进的数学教学经验，并以此为基础对数学教学进行了许多改革、创新.

这套丛书是南开大学数学专业的部分教材，编著者们长期在南开数学专业任教，不断地把自己的心得体会融合到基础知识和基本理论的讲述中去，日积月累地形成了这套教材. 所以可以说这些教材不是“编”出来的，而是在长期教学中“教”出来的，“改”出来的，凝聚了我们的一点心血. 这些教材的共同点，也是我们教学所遵循的共同点是：首先要加强基础知识、基础理论和基本方法的教学；同时又要适当地开拓知识面，尤其注意反映学科前沿的成就、观点和方法；教学的目的是丰富学生的知识与提高学生的能力，因此配置的习题中多数是为了巩固知识和训练基本方法，也有一些习题是为训练学生解题技巧与钻研数学的能力.

我们要感谢科学出版社主动提出将这套教材出版. 这对编著者是件大好事. 编

①陈省身：在“二十一世纪中国数学展望”学术讨论会开幕式上的讲话.

著者虽然尽了很大努力, 但一则由于编著者的水平所限, 二则数学的教育和所有学科的教育一样是在不断发展之中, 因此这套教材中缺欠和不足肯定存在. 我们诚挚希望各位同行不吝指正, 从而使编著者更明确了解教材及教学中的短长, 进而扬长避短, 改进我们的教学. 同时通过这套教材也可向同行们介绍南开的教学经验以供他们参考, 或许有益于他们的工作.

我们再次感谢帮助过南开的前辈、同行们, 同时也希望能继续得到他们和各位同行的帮助. 办好南开的数学专业, 办好所有学校的数学专业, 把中国数学搞上去, 使中国成为数学大国是我们的共同愿望! 这个愿望一定能实现!

全体编著者

1998 年 6 月于南开大学

目　　录

绪　论

拓扑学是由英文 topology 音译而来, 这是起源于希腊文的名词, 原意地志学. 1847 年首次由高斯 (Gauss) 的学生 Listing 引进. 在此之前, 数学家称拓扑学为位置分析 (analysis situs), 这表明它研究的是根据分析的需要而提出的一些几何问题. 拓扑学是近代发展起来高度抽象的一门几何学. 根据德国数学家 Klein 提出的、史称爱尔朗根 (Erlangen) 纲领的思想, 各种几何学可按照变换群进行分类, 即几何学是研究空间 (或图形) 在某种变换下的不变性质. 例如, 欧氏几何是研究刚体运动下的不变性质, 仿射几何是研究仿射变换下的不变性质 (仿射性质), 等等.

拓扑学研究空间在拓扑变换 (或同胚) 下的不变量或不变性质. 所谓同胚的空间 X 与 Y 是指 X 与 Y 之间存在双向连续的 (即互逆且连续) 对应, 形象地说就是橡皮泥 X 在不允许隔断的情况下可以捏成 Y. 拓扑学中同胚的两个空间 X 与 Y 可不加区别, 因此俗称橡皮几何学.

从历史发展的观点来看, 拓扑学起源于 19 世纪中叶以前一些孤立问题的研究. 早在 17 世纪 Euler 发现了闭多面体的顶点个数 d, 棱的个数 e, 面的个数 v 存在一个关系:$v-e+d=2$. Euler 当时并不知道, 2 是 (二维) 球面的拓扑不变量, 即后来的 Euler-Poincaré 示性数. 18~19 世纪, 数学家研究了地图着色问题, 即平面 (或球面) 上的地图着几种颜色才能使每相邻国家有不同颜色. 这个问题到 1890 年才证明了用五种颜色是可以的, 并提出了四种颜色也可以的猜想, 即著名的四色问题. 球面的色数是和球面的 Poincaré 示性数有关联的. 此外, Jordan 曲线定理: 平面上简单闭曲线将平面分成两部分, 高斯研究扭结和二重积分的联系等等是当时研究的一些孤立问题, 而后成为拓扑学的有关问题.

拓扑学历史发展的转折点应归功于 Riemann 关于闭曲面间的拓扑分类的结果. 19 世纪中叶, Riemann 发现了多值复变解析函数可转化为闭曲面上的单值函数, 并得出闭曲面的拓扑分类: 闭曲面按同胚分类只有球面和若干个环面的连通和 (或) 球面与若干个射影平面的连通和. 此后拓扑学所应研究的对象及其重要性逐渐清晰, 更多的数学家在致力于这方面的研究.

拓扑学最早形成一门学科应归功于 Poincaré. 他在研究代数簇 (复变函数, 微分方程) 的基础上, 通过将空间剖分成若干个单形的组合, 得出空间的 Betti 数、挠系

数的计算方法 (这就是以后的同调群), 还得出 Euler 定理的一般形式及基本群, 流形对偶定理等结果. 他在 1894~1912 年得出的这一系列成果, 标志着组合拓扑学的创立.

1910~1920 年左右, 以 Hausdorff, Alexander 为代表产生点集拓扑这一分支. 1930 年左右近代关于群的思想进入拓扑学, 组合拓扑变成为现在的代数拓扑. 1940 年左右, 以 Whitney 对微分流形的研究为标志, 产生了微分拓扑这一分支. 至于研究低维流形的几何拓扑学这一分支, 其问题的提出可追溯到 Poincaré 的那个时期, 但只是在近几十年来才有较多的进展和结果.

点集拓扑学主要研究局部拓扑性质, 用分析方法. 代数拓扑学研究空间的拓扑不变量和空间的拓扑分类问题, 用抽象代数的方法. 微分拓扑学研究微分流形的微分同胚分类问题, 主要用代数拓扑方法. 几何拓扑学或者低维拓扑学则是用代数拓扑和微分拓扑的方法研究 3,4,5 维拓扑流形的不变量和它们的拓扑分类.

拓扑学发展到今天已经有诸多的分支, 有着丰富的结果和方法. 拓扑学已成为近代纯粹数学的重要支柱, 它的方法和结果日益地渗透到分析、代数、几何、计算甚至于物理学等各个领域. 拓扑学中包括点集拓扑和代数拓扑的最基础的内容已成为当前学习和研究近代纯粹数学的必备基础.

第一章 拓扑空间

1.1 度量空间

设集合 $\mathbf{R}^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i$是任意实数$,1\le i\le n\}$, 则当 $n=3$ 时就是空间解析几何课程中现实空间的点的集合, 其中 $\mathbf{R}^n$ 中的元素 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 叫做点, x_i 是点 x 的坐标分量. 两点 x,y 的距离自然是

$$\rho(x,y)=\Big[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\in\mathbf{R}^1$$

尽管当 $n>3$ 时 $\mathbf{R}^n$ 已没有直观意义, 但 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 仍叫做点, $\rho(x,y)$ 仍叫 x,y 之间的距离.

从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^1$ 的对应 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$ 是 n 个实变数的实值函数, 我们称 f 为连续函数时就需要 $\mathbf{R}^n$ 中的距离的概念. 集合 $\mathbf{R}^n$ 赋予上述距离 $\rho:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$, 则 $(\mathbf{R}^n,\rho)$ 叫做欧氏空间. 上述 ρ 叫做欧氏空间的通常度量. 这个通常度量显然满足以下性质: $\rho:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$ 是非负函数且

(D1) $\rho(x,y)=0\iff x=y$;

(D2) 对称性: $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(D3) 三角不等式: $\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$.

其中性质 (D3) 的证明利用线性代数中关于内积的 Schwarz 不等式.

现在我们抛弃具体的集合 $\mathbf{R}^n$, 抛弃所赋予的具体的距离 ρ, 只保留性质 (D1)~(D3), 就可以引进更一般的度量空间.

定义 1.1.1 设 X 为集, 其元素叫做点, 记为 $x,y,z,\rho:X\times X\to\mathbf{R}^1$ 为非负函数满足 (D1)~(D3), 则 (X,ρ) 叫做*度量空间*, 函数 ρ 叫 (X,ρ) 的*度量*,$\rho(x,y)$ 叫做 x,y 间的距离. 在明确所赋予的 ρ 时,(X,ρ) 可简记为 X.

例 1.1.2 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n=(\mathbf{R}^n,\rho)$ 是度量空间, 其度量 ρ 为

$$\rho(x,y)=\Big[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\Big]^{\frac{1}{2}}$$

例 1.1.3 Hilbert 空间 $\mathbf{R}^\omega=(\mathbf{R}^\omega,\rho)$ 是度量空间, 其中集合 $\mathbf{R}^\omega=\{x=(x_1,x_2,\cdots)\mid x_i\in\mathbf{R}^1,i=1,2,\cdots,\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2<+\infty\}$, 而度量 $\rho:\mathbf{R}^\omega\times\mathbf{R}^\omega\to\mathbf{R}$ 定

义为

$$\rho(x,y)=\Big[\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2\Big]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(这是一个确定实数)}$$

显然 ρ 满足 (D1)~(D2). 在证明 (D3) 时, 可以根据 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的三角不等式再令 $n\to\infty$.

例 1.1.4 设集合 X 为闭区间 $[a,b]$ 上所有连续函数, 令

$$\rho_1(x(t),y(t))=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|$$

$$\rho_2(x(t),y(t))=\Big\{\int_a^b[x(t)-y(t)]^2\mathrm{d}t\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

则 $(X,\rho_1),(X,\rho_2)$ 都是度量空间 (习题).

例 1.1.5 X 为任一集合, 定义 $\rho(x,y)=0$, 当 $x=y$; $\rho(x,y)=1$, 当 $x\neq y$, 则 (X,ρ) 是度量空间, 叫做*离散度量空间*.

现在我们要把数学分析中的邻域概念引进度量空间. 分析中把开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 叫做点 a 的 ε 邻域, 即数轴上与点 a 距离小于 ε 的所有点. 因此我们作如下定义.

定义 1.1.6 设 (X,ρ) 为度量空间, $x\in X,\varepsilon$ 为正数, 则 X 的子集 $B(x,\varepsilon)=\{y\in X\mid\rho(y,x)<\varepsilon\}$ 叫做以点 x 为中心, 以 ε 为半径的*球形邻域*, 简称为 x 的 ε 邻域.

命题 1.1.7 设 $\mathcal{B}$ 为度量空间 (X,ρ) 所有球形邻域组成的族, 则:

(B1) $X=\cup_{B\in\mathcal{B}}B$;

(B2) 若 $x\in B_1\cap B_2$, 其中 $B_1,B_2\in\mathcal{B}$, 则存在 x 的球形邻域 B_x, 使 $x\in B_x\subset B_1\cap B_2$(如图 1.1.1);

(B3) 若 $x\in B,B\in\mathcal{B}$, 则存在 X 的球形邻域 B_x 使 $x\in B_x\subset B$.

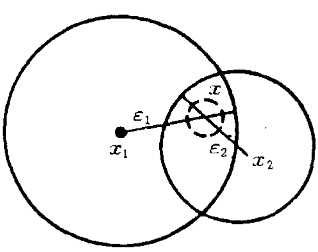

图 1.1.1

证 (B1) 因为每点 x 属于它的任何球形邻域, 故 $X=\cup_{B\in\mathcal{B}}B$.

(B2) 设 $B_i = B(x_i, \varepsilon_i), i = 1, 2$. 令 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - \rho(x, x_1),\ \varepsilon_2 - \rho(x, x_2)\}$, 则 $x \in B(x, \varepsilon)$. 而对任意 $y \in B(x, \varepsilon), \rho(y, x_i) \le \rho(y, x) + \rho(x, x_i) < \varepsilon + \rho(x, x_i) \le \varepsilon_i - \rho(x, x_i) + \rho(x, x_i) = \varepsilon_i (i = 1, 2)$, 故 $y \in B(x_1, \varepsilon_1) \cap B(x_2, \varepsilon_2)$.

(B3) 设 $B = B(x_0, \varepsilon_0)$, 取 $\varepsilon = \varepsilon_0 - \rho(x, x_0)$, 则 $x \in B(x, \varepsilon) \subset B$.

在实变函数论课程中已经学到, 实直线上的开集是由内点组成的集合 (点集合), 因此我们有

定义 1.1.8 若 A 是度量空间 X 的子集, $a \in A$ 叫 A 的在 X 中的内点, 如果 a 有一球形邻域 $\subset A$. A 的在 X 中的内点全体叫做 A 的在 X 中的内部, 记作 $\mathrm{Int}A$. A 叫做 X 的开集若 $A = \mathrm{Int}A$.

命题 1.1.9 A 是开集 $\Longleftrightarrow$ A 是若干球形邻域并集 (复习题).

定理 1.1.10 设 $\mathcal{T}$ 是度量空间 X 的全体开集组成的族, 则 $\mathcal{T}$ 满足:

(O1) X 和空集 $\emptyset$ 属于 $\mathcal{T}$;

(O2) 若 $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$, 则 $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$;

(O3) 任意多个开集 (即 $\mathcal{T}$ 的成员) 的并集仍 $\in \mathcal{T}$.

证 (O1) 和 (O3) 是明显的. 现在证明 (O2). 若 $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, 则由 (O1) 得出它是开集. 设 $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset, x \in O_1 \cap O_2$ 为任一点, 则由 O_1, O_2 为开集. 存在球形邻域 $B(x, \varepsilon_1) \subset O_1, B(x, \varepsilon_2) \subset O_2$, 因而 $x \in B(x, \varepsilon_1) \cap B(x, \varepsilon_2) \subset O_1 \cap O_2$, 由命题 1.1.7(B2), 存在球形邻域 $B(x, \varepsilon)$ 使 $x \in B(x, \varepsilon) \subset O_1 \cap O_2$, 即 x 为内点.

定义 1.1.11 度量空间 X 的子集 A 叫 X 的闭集, 如果 A 的余集 $X \backslash A$ 是 X 的开集.

定理 1.1.12 设 $\mathcal{F}$ 为度量空间 X 的全体闭集组成的族, 则 $\mathcal{F}$ 满足:

(F1) X 和空集 $\emptyset \in \mathcal{F}$;

(F2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, 则 $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$;

(F3) 任意多个闭集 (即 $\mathcal{F}$ 的成员) 的交集仍 $\in \mathcal{F}$.

证 由于 de Morgan 公式 (1.1 节习题 1), 本定理和定理 1.1.10 可互相导出.

例 1.1.13 容易证明, 有限子集特别是独点集一定是闭集. 一维欧氏空间 $\mathbf{R}^1$ 中开区间 (a, b) 是无穷多个闭集的并. 试举例说明无穷多个开集的交集不必是开集.

在数学分析中, 极限概念是连续性概念的基础, 今推广到度量空间.

定义 1.1.14 设 A 是度量空间 X 的子集, $x \in X$, 若 x 的任一球形邻域 $B(x, \varepsilon)$ 与 $A \backslash \{x\}$ 的交非空, 称 x 为 A 的 (在 X 中) 的聚点. A 和它的所有聚点的并集叫做 A(在 X 中) 的闭包, 记作 $\overline{A}$. 如果 $\overline{A} = X$, 则 A 叫做 X 的稠密子集.

例 1.1.15 设 $X = \mathbf{R}^1$, 如果 $A = \{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$, 则点 $x = \frac{1}{n} \in A$, 但不是 A

的聚点, 点 $x=0\notin A$ 但它是 A 的聚点. $0,1$ 都是 $A=[0,1)$ 的聚点, 前者 $\in A$, 后者 $\notin A$. $\mathbf{R}^1$ 的有理点集是稠密子集.

命题 1.1.16 (1) X 的有限子集无聚点.

(2) X 的无穷子集 A 的每两点距离都大于一个固定正数, 则 A 无聚点.

(3) A 是闭集 $\iff A=\overline{A}$.

证 我们只证明 (3), 把 (1) 和 (2) 留作习题. 设 A 为闭集, 则 $X\backslash A$ 为开集. 若 $x\in\overline{A}\backslash A$, 则 $x\in X\backslash A$, 有 x 的球形邻域 $B_x\subset X\backslash A$, 但是 $B_x\cap A\backslash\{x\}\neq\varnothing$ (这是因为 x 是 A 的聚点), 因此发生矛盾, 从而只能是 $\overline{A}\backslash A=\varnothing, \overline{A}=A$. 反之, 若 $A=\overline{A}$, 而对于 $x\in X\backslash A$, 如果 x 的任一球形邻域都不含于 $X\backslash A$ 则 $x\in\overline{A}\backslash A$ 与 $A=\overline{A}$ 矛盾, 故有 x 的球形邻域 $B_x\subset X\backslash A, X\backslash A$ 为开集, 从而 A 是闭集.

定理 1.1.17 度量空间的子集及其闭包具有下列性质:

(C1) $\overline{\varnothing}=\varnothing$;

(C2) $A\subset\overline{A}$;

(C3) $\overline{\overline{A}}\subset\overline{A}$;

(C4) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

证 (C1) 和 (C2) 由闭包的定义直接得出. 今证 (C3). 由定义,$x\in\overline{\overline{A}}\Longrightarrow x$ 的每一邻域 $U(x)$ 含有 $\overline{A}$ 的一点 $y; y\in\overline{A}\Longrightarrow y$ 的每一邻域 $W(y)$ 含有 A 的一点 z. 利用命题 1.1.7(3), 可取 $W(y)\subset U(x)$, 因此 x 的每一邻域 $U(x)$ 含有 A 的一点 z, 从而根据定义得出 $x\in\overline{A}$.

(C4) 的证明. 因为 $A\subset A\cup B$, 由定义 $\overline{A}\subset\overline{A\cup B}$, 同样的,$\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$, 因此 $\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$, 现在用反证法证明 $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$. 设 $x\in\overline{A\cup B}$ 而 $x\notin\overline{A}$ 且 $x\notin\overline{B}$. 由定义 1.1.14,x 有一邻域 $U(x)$ 不含 A 的点, 且 x 有一邻域 $V(x)$ 不含 B 的点, 根据命题 1.1.7(2),x 有一邻域 $W(x)\subset U(x)\cap V(x)$ 因而不含 $A\cup B$ 的点, 与 $x\in\overline{A\cup B}$ 矛盾.

定义 1.1.18 设 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 的点序列,$a\in X$. 如果对于 a 的每一球形邻域 $B(a,\varepsilon)$, 存在自然数 N, 使对于所有 $n>N$ 有 $x_n\in B(a,\varepsilon)$, 称点列 $\{x_n\}$ 收敛到点 a: $\{x_n\}\longrightarrow a$.

命题 1.1.19 a 是度量空间 X 中一个子集 A 的聚点 $\iff A\backslash\{a\}$ 中存在一个由完全不同的点组成的点列收敛到 a.

在本节结束前, 我们指出两点间距离这一概念的推广:

(1) 度量空间 X 的两子集 A,B 间的距离

$$\rho(A,B)=\begin{cases}0, & \text{当}A\text{或}B\text{空集}\\ \inf\{\rho(x,y)\mid x\in A, y\in B\}, & \text{当}A,B\text{都非空}\end{cases}$$

(2) X 中一点 x 到子集 A 的距离为上述的特例.

(3) X 的子集 A 的直径

$$\operatorname{diam}(A)=\begin{cases}0, & \text{当}A=\varnothing\\ \sup\{\rho(x,y)\mid x,y\in A\}, & \text{当}A\neq\varnothing\end{cases}$$

当 $\operatorname{diam}(A)<\infty$, 称 A 为有界集. 一般地, 从 $x\notin A$不能推出$\rho(x,A)>0$; 从 $A\cap B=\varnothing$ 不能推出 $\rho(A,B)>0$, 但是有

命题 1.1.20 若 $A\neq\varnothing, x\notin\overline{A}$, 则 $\rho(x,A)>0$(习题).

习 题

1. 设 X 为集合,$\{A_\alpha\}$ 为 X 的一族子集, 下标 α 所取值的个数可以有限或无限, 试证 de Morgan 公式

$$X\backslash\cup_\alpha A_\alpha=\cap_\alpha(X\backslash A_\alpha),\qquad X\backslash\cap_\alpha A_\alpha=\cup_\alpha(X\backslash A_\alpha)$$

2. 分别定义 $\rho_1,\rho_2:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 为

$$\rho_1(x,y)=\max_{1\le i\le n}\{|x_i-y_i|\}$$

$$\rho_2(x,y)=\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|$$

证明: ρ_1,ρ_2 都是集合 $\mathbf{R}^n$ 上的度量.

3. 设 (X,ρ) 为度量空间, 分别定义 $\rho_1,\rho_2: X\times X\to\mathbf{R}$ 为

$$\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)},\quad x,y\in X$$

$$\rho_2(x,y)=\begin{cases}\rho(x,y), & \text{当}\rho(x,y)\le 1\\ 1, & \text{当}\rho(x,y)>1\end{cases}$$

证明: ρ_1,ρ_2 是 X 上的度量.

4. 已给 X 上一个度量 ρ, 证明: 绝对值 $|\rho(x,z)-\rho(y,z)|\le\rho(x,y)$, 任意 $x,y,z\in X$.

5. 试证: Hilbert 空间 $\mathbf{R}^\omega$ 的任两点 x,y 有一 "中点"z, 即点 z 使 $\rho(x,z)=\rho(y,z)=\frac{1}{2}\rho(x,y)$. 但度量空间不必有此性质, 试用 $\mathbf{R}^2$ 的子空间举例说明.

6. 证明: 例 1.1.4, 命题 1.1.9, 命题 1.1.20.

7. 设 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 为欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数, 证明: 满足 $f > 0 (f \geq 0)$ 的点集是 $\mathbf{R}^n$ 的开 (闭) 子集.

8. 试证:(a) $\mathrm{Int}A$ 是 A 所包含的所有开集的并集;

(b) $\overline{A}$ 是所有含 A 的闭集的交集.

9. 试确定下列平面点集的内部和闭包:

(a) $\{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$;

(b) $\mathbf{R}^2$ 除去两条坐标轴.

10. 若 A 是度量空间 X 的稠密子集,O 为 X 中的开集. 证明:$O \subset \overline{A \cap O}$.

11. 设 (X, ρ) 为度量空间, A 为 X 非空子集. 证明: A 是 X 的闭集当且仅当对任意 $x \in X \backslash A$ 有 $\rho(x, A) > 0$.

12.(1) 试作出平面 $\mathbf{R}^2$ 中的非空不交闭集 A, B 使得 $\rho(A, B) = 0$.

(2) 证明: $\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, B) \mid x \in A\}$.

1.2 拓 扑 空 间

欧氏空间的点可用实数刻画, 度量空间的点虽不必受此限制, 但球形邻域这种连续性或极限概念的基础仍旧通过实数刻画. 现在抛弃距离的概念, 直接用开集来表示“邻域”, 只保留定理 1.1.10 中开集性质 (O1)~(O3), 我们引进拓扑空间的概念.

定义 1.2.1 设 X 为集合,$\mathcal{T}$ 是 X 的一个子集族, 其成员满足开集公理 (O1)~(O3), 则 $\mathcal{T}$ 称为集 X 上的一个*拓扑*, $\mathcal{T}$ 的成员称为 X 的*开集*. 集 X 连同它的拓扑 $\mathcal{T}$ 称为*拓扑空间*, 记作 $(X, \mathcal{T})$, 在明确所赋予的拓扑 $\mathcal{T}$ 时, $(X, \mathcal{T})$ 可简记为 X.

例 1.2.2 度量空间 (X, ρ) 的度量 ρ 可以确定出全体开集, 由定理 1.1.10, 全体开集所成的族 $\mathcal{T}_\rho$ 满足 (O1)~(O3), 因此度量空间 (X, ρ) 是一个拓扑空间 $(X, \mathcal{T}_\rho)$, 而这里的 $\mathcal{T}_\rho$ 称为度量 *ρ所导出的拓扑*. 反之, 若拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 存在 X 上的度量 ρ 使 $\mathcal{T}$ 是由 ρ 诱导的拓扑, 称 $(X, \mathcal{T})$ 是*能度量化*拓扑空间.

例 1.2.3 任非空集合 X, 有两个最极端的拓扑, 第一 $\mathcal{T}$ 由 X 和空集这两个子集组成, 开集个数最少, 叫*平凡拓扑*. 第二 $\mathcal{T}' = 2^X$(表示 X 的全体子集组成的族) 叫*离散拓扑*. 离散拓扑是例 1.1.5 中离散度量所诱导的拓扑.

例 1.2.4 设 $X = \{a, b, c\}$, 令

$$\mathcal{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

不难验证,$\mathcal{T}$ 是 X 上拓扑. 因此,$(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间.