普通高等教育“十五”国家级规划教材

（高职高专教育）

经济数学基础

上册

第二版

顾静相　主编
钟　宜　傅修文　编

高等教育出版社

普通高等教育"十五"国家级规划教材

（高职高专教育）

经济数学基础

上　册

第二版

F224.0
99
:1
2004

顾静相　主编
钟　宜　傅修文　编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育"十五"国家级规划教材,是根据教育部最新制定的《高职高专教育经济数学基础课程教学基本要求》,在第一版基础上编写的,适合我国高职高专教育现状。全书分上、下两册,本书为上册,主要包括一元函数微积分,多元函数微分学及微分方程初步。

本书以"掌握概念,强化应用,培养技能"为重点,体现了以应用为目的,以必需、够用为度的原则。在体系编排上注重突出数学课程循序渐进、由浅入深的特点,在内容选取上以面向经济管理类专业和现代科技发展需要为原则,反映了作者多年从事教学和科研工作的成果和经验。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校经管类专业的教材,也可供科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础. 上册/顾静相主编. —2 版. —北京:
高等教育出版社,2004.6(2006重印)
ISBN 7-04-014697-5

Ⅰ.经... Ⅱ.顾... Ⅲ.经济数学—高等学校:技术
学校—教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 025811 号

策划编辑 蒋 青 **责任编辑** 蒋 青 **封面设计** 杨立新 **责任绘图** 尹文军
版式设计 王 莹 **责任校对** 王效珍 **责任印制** 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	北京市鑫霸印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　次	2000年8月第1版
开　本	787×1092 1/16		2004年6月第2版
印　张	10.5	印　次	2006年11月第8次印刷
字　数	250 000	定　价	11.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。
版权所有 侵权必究
物料号 14697-01

出版说明

为加强高职高专教育的教材建设工作，2000年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》（教高司[2000]19号），提出了“力争经过5年的努力，编写、出版500本左右高职高专教育规划教材”的目标，并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施：先用2至3年时间，在继承原有教材建设成果的基础上，充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验，解决好高职高专教育教材的有无问题；然后，再用2至3年的时间，在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材。根据这一精神，有关院校和出版社从2000年秋季开始，积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”。这些高职高专规划教材是依据1999年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》（草案）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（草案）编写的，随着这些教材的陆续出版，基本上解决了高职高专教材的有无问题，完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步。

2002年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题，将高职高专教育规划教材纳入其中。“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略，抓好重点规划”为指导方针，重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设，特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材；同时还要扩大教材品种，实现教材系列配套，并处理好教材的统一性与多样化、基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系，在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系。

普通高等教育“十五”国家级规划教材（高职高专教育）适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

教育部高等教育司
2002年11月30日

第二版前言

在进入21世纪之际，我国高等教育正面临进一步发展的契机，为了更好地适应当前我国高等教育的发展需要，满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用性人才培养的各类要求，教育部组织制定了《高职高专教育基础课程教育基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，成立了"教育部高职高专规划教材"编写队伍，《经济数学基础》就是我们编写的其中一本教材。

经济数学是经济管理中所用的高等数学，本课程与通常的高等数学课程相比有其特殊性，因此需要正确认识经济与数学的关系。将数学用于经济学，可以深入揭示仅靠定性分析难以表达的现代经济错综复杂的相互关系及其变动趋势，从而把握经济决策的方向，可以预测这些决策的直接效果和间接效果。但是，将数学用于经济学，决不是用数学取代经济学，数学分析要为经济分析服务。因此，本教材较好地把握了经济数学基础课程的定位和学科发展，力求既保持本课程学科体系的合理性和教学内容的系统性，又不失经济概念的严谨无误和时代特征，真正体现"数学为体，经济为用"的经济数学特点。

按照本课程的《基本要求》和《培养目标》，本教材将基本内容确定为微积分学、线性代数和概率论与统计数理等三篇共13章，即极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微分学、行列式、矩阵、线性方程组(含投入产出模型简介等)、随机事件与概率、随机变量与数字特征、统计推断、方差分析与回归分析，第二版在上述内容的基础上增加了线性规划的基本内容。这些内容基本涵盖了高职高专经济管理类专业必要的数学基础，通过这些内容的学习，可以使学生对微积分学、线性代数、概率论与数理统计的思想和方法有初步认识，掌握微积分学、线性代数、概率与数理统计的基本知识、基本理论和基本技能，培养学生的抽象思维、逻辑推理以及基本运算能力，使学生初步具有定性与定量相结合的方法分析和解决经济管理问题的能力，并为学生今后学习经济管理课程和从事经济管理工作打下必要的数学基础。

作为一门数学基础课，本教材不仅保持了数学学科的科学性和系统性，而且也较好地体现"以应用为目的，以必需够用为度"的原则。因此，本教材中许多概念、定理采用了学生容易理解的方式进行叙述，从而降低了起点，减小了难度，精简了内容，更适应普通高职高专院校的教学需要。

学习"经济数学基础"，对于经济管理类的学生往往会有一定的困难。作者在长期的教学实践中对于学生的需求已有较充分的了解。本教材在各章节内容编写过程中，首先编排了本章"学习目标"，使学生一开始就有较明确方向。各章选配了适量的例题和习题，使学生能掌握本课程的基本理论和基本方法。章末安排的"本章小结"，给学生复习本章教学内容创造了便利。这样的教材编写结构，有助于学生自主学习。

为了充分体现现代职业教育思想，充分利用计算机技术形象生动地表现抽象概念和实际应用，完整表现本课程改革成果和文字教材主要教学内容，便于任课教师立体化教学，本教材第二版配套了电子教案，希望对本课程的教学工作能有所帮助。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

本教材分别由钟宜(第1、2、3章)、傅修文(第4、5、6章)、顾静相(第7、8、9章)和张旭红(第10、11、12、13章)编写,全书由顾静相统纂主编。

在本教材的编写过程中,中国人民大学胡显佑教授作为编写顾问,对教材的编写提出许多很好的建议,中央财经大学的单立波教授、北京大学姚孟臣教授、中央广播电视大学冯泰教授对教材书稿进行了认真详尽地审阅,提出了许多宝贵意见。

因受经验和水平所限,本教材中不妥之处实属难免,敬请读者提出批评和建议,以期及时修正。

编者

2004年1月

目　　录

第一篇　微　积　分

第 1 章　极限与连续 …… 1
1.1　函数 …… 1
1.2　极限的概念 …… 12
1.3　无穷小量与无穷大量 …… 16
1.4　极限的性质与运算法则 …… 19
1.5　两个重要极限 …… 22
1.6　函数的连续性 …… 26
1.7　常用经济函数 …… 31
本章小结 …… 33
习题 1 …… 34
第 2 章　导数与微分 …… 37
2.1　导数的概念 …… 37
2.2　导数基本公式与运算法则 …… 43
2.3　高阶导数 …… 51
2.4　函数的微分 …… 53
本章小结 …… 55
习题 2 …… 56
第 3 章　导数的应用 …… 59
3.1　中值定理 …… 59
3.2　洛必达(L'Hospital)法则 …… 61
3.3　函数的单调性 …… 64
3.4　函数的极值 …… 66
3.5　导数在经济分析中的应用 …… 71
3.6　利用导数研究函数 …… 74
本章小结 …… 79
习题 3 …… 80
第 4 章　不定积分 …… 83
4.1　不定积分的概念 …… 83
4.2　不定积分的性质和基本积分公式 …… 85
4.3　换元积分法 …… 88
4.4　分部积分法 …… 95
4.5　微分方程初步 …… 98
本章小结 …… 103
习题 4 …… 105
第 5 章　定积分 …… 108
5.1　定积分的概念 …… 108
5.2　微积分基本定理 …… 112
5.3　定积分的计算 …… 115
5.4　无限区间上的广义积分 …… 121
5.5　定积分的应用 …… 123
本章小结 …… 126
习题 5 …… 128
第 6 章　多元函数微分学 …… 131
6.1　二元函数的极限与连续 …… 131
6.2　偏导数和全微分 …… 136
6.3　复合函数与隐函数的微分法 …… 139
6.4　二元函数的极值 …… 143
本章小结 …… 145
习题 6 …… 147
习题答案 …… 149

第 1 章 极限与连续

学习目标

了解反函数、函数的单调性、奇偶性、有界性、周期性的概念；左、右极限的概念；无穷小、无穷大的概念；闭区间上连续函数的性质.

理解函数、基本初等函数、复合函数、初等函数、分段函数的概念；需求函数与供给函数的概念；函数极限的定义；无穷小的性质；函数在一点连续的概念；初等函数的连续性.

掌握复合函数的复合过程；极限四则运算法则.

会用函数关系描述经济问题；对无穷小进行比较；用两个重要极限求极限；判断间断点的类型；求连续函数和分段函数的极限.

极限概念是研究变量在某一过程中的变化趋势时引出的.它是微积分学的重要基本概念之一,微积分学中的其他几个重要概念,如连续、导数、定积分等,都是用极限表述的,并且微积分学中的很多定理也是用极限方法推导出来的.这一章我们在对函数概念进行复习和补充的基础上将介绍数列与函数极限的概念,求极限的方法及函数的连续性.

1.1 函数

函数是微积分学研究的对象.在中学里我们已经学习过函数概念,在这里我们不是进行简单的重复,而是要从全新的视角来对它进行描述并重新分类.

1.1.1 函数的概念

1. 常量与变量

在日常生活、生产活动和经济活动中,经常遇到各种不同的量,例如:身高、气温、产量、收入、成本等等.这些量可以分为两类,一类量在考察的过程中不发生变化,只取一个固定的值,我们把它称作**常量**,例如,圆周率 π 是个永远不变的量,某种商品的价格,某个班的学生人数在一段时间

内保持不变,这些量都是常量;另一些量在所考察的过程中是变化的,可以取不同数值,我们把它称作**变量**,例如,一天中的气温,生产过程中的产量都是在不断变化的,它们都是变量.

在理解常量与变量时,应注意下面几点:

(1) 常量和变量依赖于所研究的过程.同一个量,在某一过程中可以认为是常量,而在另一过程中则可能是变量,反过来也是同样的.例如,某种商品的价格在一段时间内是常量,但在较长的时间内则是变量.这说明常量和变量具有相对性.

(2) 从几何意义上讲,常量对应着实数轴上的定点,变量则对应着实数轴上的动点.

(3) 一个变量所能取的数值的集合叫做这个变量的**变动区域**.

有一类变量,例如时间可以取介于两个实数之间的任意实数值,叫做连续变量,连续变量的变动区域常用区间表示.

常量习惯用字母 a,b,c,d 等表示,变量习惯用 x,y,z,u,v,w 等表示.

2. 函数的概念及表示法

在某个变化过程中,往往出现多个变量,这些变量不是彼此孤立的,而是相互影响和相互制约的,一个量或一些量的变化会引起另一个量的变化.如果这些影响是确定的,是依照某一规则的,那么我们说这些变量之间存在着函数关系.

例如,生产某种产品的固定成本为 6 800 元,每生产一件产品,成本增加 70 元,那么该种产品的总成本 y 与产量 x 的关系可用下面的式子给出:

$$y=70x+6\ 800,$$

当产量 x 取任何一个合理的值时,成本 y 有确定的值和它对应,我们说成本 y 是产量 x 的函数.

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量,若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时,变量 y 依照某一规则 f 总有一个确定的数值与之对应,则称变量 y 为变量 x 的**函数**,记作 $y=f(x)$.这里,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**或**函数**,f 是函数符号,它表示 y 与 x 的对应规则.有时函数符号也可以用其他字母来表示,如 $y=g(x)$或 $y=\varphi(x)$等.

集合 D 称为函数的**定义域**,相应的 y 值的集合则称为函数的**值域**.

当自变量 x 在其定义域内取定某确定值 x_0 时,因变量 y 按照所给函数关系 $y=f(x)$求出的对应值 y_0 叫做当 $x=x_0$ 时的函数值,记作 $y|_{x=x_0}$或 $f(x_0)$.

例 1　已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,求:$f(0),f\left(\dfrac{1}{2}\right),f(-x),f\left(\dfrac{1}{x}\right),f(x+1),f(x^2)$.

解　$f(0)=\dfrac{1-0}{1+0}=1,f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{3},f(-x)=\dfrac{1-(-x)}{1+(-x)}=\dfrac{1+x}{1-x},f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{x+1},f(x+1)=\dfrac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\dfrac{-x}{2+x},f(x^2)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

例 2　求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\dfrac{3}{5x^2+2x}$;

(2) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$;

(3) $f(x)=\lg(4x-3)$;

(4) $f(x)=\arcsin(2x-1)$;

(5) $f(x)=\lg(4x-3)-\arcsin(2x-1)$.

解 (1) 在分式$\frac{3}{5x^2+2x}$中,分母不能为零,所以$5x^2+2x\neq0$,解得$x\neq-\frac{2}{5}$,且$x\neq0$,即定义域为

$$\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right)\cup\left(-\frac{2}{5},0\right)\cup(0,+\infty).$$

(2) 在偶次根式中,被开方式必须大于等于零,所以有$9-x^2\geqslant0$,解得$-3\leqslant x\leqslant3$,即定义域为$[-3,3]$.

(3) 在对数式中,真数必须大于零,所以有$4x-3>0$,解得$x>\frac{3}{4}$,即定义域为$\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$.

(4) 反正弦或反余弦中的式子的绝对值必须小于等于1,所以有$-1\leqslant2x-1\leqslant1$,解得$0\leqslant x\leqslant1$,即定义域为$[0,1]$.

(5) 该函数为(3),(4)两例中函数的代数和,此时函数的定义域应为(3),(4)两例中定义域的交集,即$\left(\frac{3}{4},+\infty\right)\cap[0,1]=\left(\frac{3}{4},1\right]$.

应当指出,在实际应用问题中,除了要根据解析式子本身来确定自变量的取值范围以外,还要考虑到变量的实际意义,一般来说,经济变量往往取正值,即变量都是大于零的.

常用的函数表示法有解析法(又称公式法)、表格法和图形法.现举例说明如下:

(1) $y=\sqrt{3-x^2}$.

这是一个用解析式子表示的函数.当x在$-\sqrt{3}$到$\sqrt{3}$之间取任意值时,由公式可以确定惟一的y值.

(2) 某商店一年中各月份毛线的销售量(单位:10^2 kg)的关系如表1-1所示.

表1-1　各月份毛线销售量

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量 $y/10^2$ kg	81	84	45	45	9	5	6	15	94	161	144	123

这是用表格表示的函数.当自变量x取1到12之间任意一个整数时,从表格中可以查到y的一个对应值.例如x取10,从表中可以看到它对应的y值是161,即10月份毛线销售量为16 100 kg.

(3) 图1-1是气象站用自动温度记录仪记录下来的某地一昼夜气温变化曲线.

这是用图形表示的函数.气温y与时间x的函数关系是由曲线给出的.当x取0到24中任

意一个数时，在曲线上都能找到确定的 y 值与它对应．例如 $x=12$ 时，$y=14.1$ ℃．

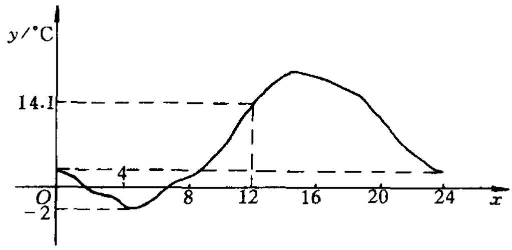

图 1-1

3. 分段函数

某市电话局规定市话收费标准为：当月所打电话次数不超过 30 次时，只收月租费 25 元，超过 30 次的，每次加收 0.23 元．则电话费 y 和用户当月所打电话次数 x 的关系可用下面的形式给出：

$$y=\begin{cases}25, & x\leqslant 30,\\ 25+0.23(x-30), & x>30.\end{cases}$$

像这样把定义域分成若干部分，函数关系由不同的式子分段表达的函数称为**分段函数**．分段函数是微积分中常见的一种函数．例如在中学数学课出现过的绝对值函数可以表示成

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

例 3　设函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>0,\\ 2, & x=0,\\ 3x, & x<0.\end{cases}$$

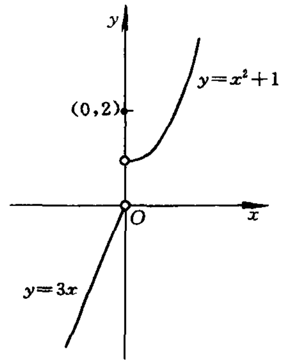

图 1-2

当 x 取 $(0,+\infty)$ 内的值时，y 的值由关系式 $y=x^2+1$ 来计算；当 $x=0$ 时，$y=2$；当 x 取 $(-\infty,0)$ 内的值时，y 的值由关系式 $y=3x$ 来计算．例如，$f(3)=3^2+1=10$，$f(-5)=3\cdot(-5)=-15$．它的图像如图 1-2 所示．

注　分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数，而不是几个函数．对于自变量 x 在定义域内的某个值，分段函数 y 只能确定惟一的值．分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并．

例 4　设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -4\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<3,\\ 5x-1, & x\geqslant 3,\end{cases}$$

求 $f(-\pi)$，$f(1)$，$f(3.5)$ 及函数的定义域．

解　因为 $-\pi\in[-4,1)$，所以 $f(-\pi)=\sin(-\pi)=0$；因为 $1\in[1,3)$，所以 $f(1)=1$；因为 $3.5\in[3,+\infty)$，所以 $f(3.5)=5\times(3.5)-1=16.5$；函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4,+\infty)$．

例 5　用分段函数表示函数 $y=3-|2-x|$，并画出图形．

解　根据绝对值定义可知，当 $x\leqslant 2$ 时，$|2-x|=2-x$；当 $x>2$ 时，$|2-x|=x-2$．于是有

$$y=\begin{cases}3-(2-x), & x\leqslant 2,\\ 3-(x-2), & x>2,\end{cases}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

即
$$y=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 2,\\ 5-x, & x>2.\end{cases}$$
其图像如图 1-3 所示.

1.1.2 函数的几种特性

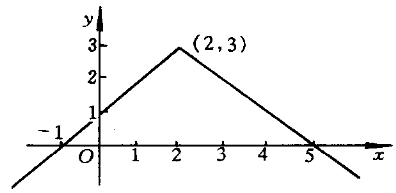

图 1-3

1. 函数的有界性

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$在集合 D 上有定义,如果存在一个正数 M,对于所有的 $x\in D$,恒有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在 D 上是**有界**的.如果不存在这样的正数 M,则称 $f(x)$在 D 上是**无界**的.

如图 1-4,函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有界的几何意义是:曲线 $y=f(x)$在区间(a,b)内被限制在 $y=-M$ 和$y=M$ 两条直线之间.

对于函数的有界性,要注意以下两点:

(1) 当一个函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有界时,正数 M 的取法不是惟一的.例如 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的,有$|\sin x|\leqslant 1$,但我们也可以取 $M=2$,即$|\sin x|<2$ 总是成立的,实际上 M 可以取任何大于 1 的数.

(2) 有界性是依赖于区间的.例如 $y=\dfrac{1}{x}$在区间$(1,2)$内是有界的,但在区间$(0,1)$内则无界.

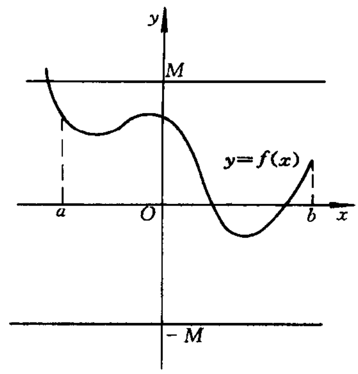

图 1-4

2. 函数的奇偶性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$在集合 D 上有定义,如果对任意的 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为**偶函数**;如果对任意的 $x\in D$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为**奇函数**.

由定义可知,对任意的 $x\in D$,必有 $-x\in D$,否则,$f(-x)$没有意义,因此函数具有奇偶性时,其定义域必定是关于原点对称的.

偶函数的图像是对称于 y 轴的,如图 1-5.因为 $f(-x)=f(x)$,所以如果点 $P(x,f(x))$是曲线上的一个点,则它关于 y 轴的对称点$Q(-x,f(x))$也是曲线上的点.

奇函数的图像是对称于原点的,如图 1-6.因为 $f(-x)=-f(x)$,所以如果点 $P(x,f(x))$是曲线上的一个点,则它关于原点的对称点 $Q(-x,-f(x))$,也是曲线上的点.

例 6 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=3x^4-5x^2+7$;

(2) $f(x)=2x^2+\sin x$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^{-x}-a^{x})\quad(a>0,a\neq 1)$.

解 由定义

(1) 因为$f(-x)=3(-x)^4-5(-x)^2+7=3x^4-5x^2+7=f(x)$,所以 $f(x)=3x^4-5x^2+7$ 是偶函数.

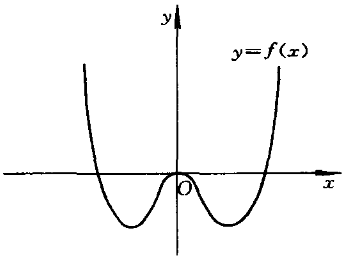

图 1-5

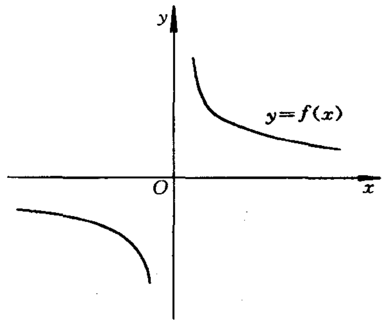

图 1-6

(2) 因为 $f(-x)=2(-x)^2+\sin(-x)=2x^2-\sin x\neq f(x)$,同样可以得到 $f(-x)\neq -f(x)$,所以 $f(x)=2x^2+\sin x$ 既非奇函数,也非偶函数.

(3) 因为 $f(-x)=\frac{1}{2}(a^{-(-x)}-a^{-x})=\frac{1}{2}(a^{x}-a^{-x})=-\frac{1}{2}(a^{-x}-a^{x})=-f(x)$,所以 $f(x)=\frac{1}{2}(a^{-x}-a^{x})$ 是奇函数.

3. 函数的单调性

定义 1.4　设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是**单调增加**的;如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是**单调减少**的.

单调增加函数与单调减少函数统称为**单调函数**.

单调增加函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的,如图 1-7 所示;单调减少函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的,如图 1-8 所示.

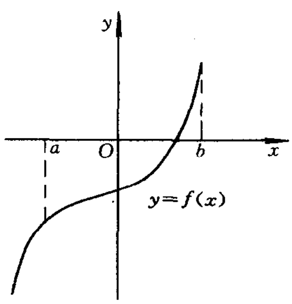

图 1-7

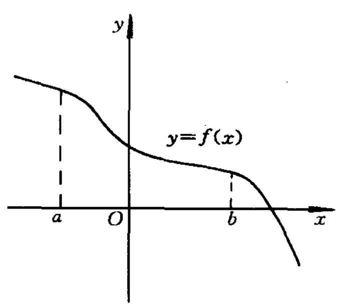

图 1-8

例 7　验证函数 $y=3x-2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

证　在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内任取两点 $x_1<x_2$,于是

$$f(x_1)-f(x_2)=(3x_1-2)-(3x_2-2)=3(x_1-x_2)<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $y=3x-2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

4. 函数的周期性

定义 1.5 对于函数 $y=f(x)$，如果存在正数 a，使 $f(x)=f(x+a)$ 恒成立，则称此函数为**周期函数**. 满足这个等式的最小正数 a 称为**函数的周期**. 例如 $y=\sin x$ 是周期函数，周期为 2π.

1.1.3 反函数

设某种商品的单价为 p，销售量为 x，则收入 y 是 x 的函数：

$$y=px,$$

这时 x 是自变量，y 是 x 的函数. 若已知收入 y，反过来求销售量 x，则有

$$x=\frac{y}{p},$$

这时 y 是自变量，x 变成 y 的函数了.

上面的两个式子是同一个关系的两种写法，但从函数的角度来看，由于对应规则不同，它们是两个不同的函数，我们称它们互为反函数.

定义 1.6 设 $y=f(x)$ 是 x 的函数，其值域为 D，如果对于 D 中的每一个 y 值，都有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 x 值与之对应，则得到一个定义在 D 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，我们称它为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$，并称 $y=f(x)$ 为**直接函数**.

当然我们也可以说 $y=f(x)$ 是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数，就是说，它们互为反函数. 显然，由定义可知，单调函数一定有反函数. 习惯上，我们总是用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以通常把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$.

从上面的定义容易得出，求反函数的过程可以分为两步：第一步从 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$；第二步交换字母 x 和 y.

例 8 求 $y=4x-1$ 的反函数.

解 由 $y=4x-1$ 得到 $x=\frac{y+1}{4}$，然后交换 x 和 y，得 $y=\frac{x+1}{4}$. 即 $y=\frac{x+1}{4}$ 是 $y=4x-1$ 的反函数.

可以证明，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称. 例 8 中的一对反函数的图像如图 1-9 所示.

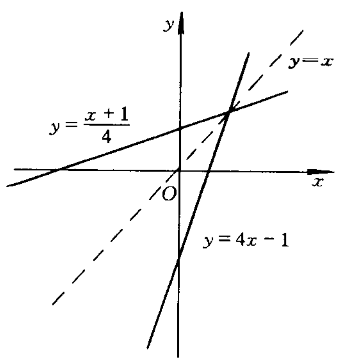

图 1-9

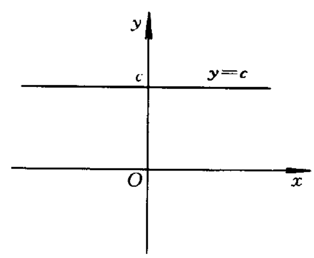

图 1-10

1.1.4　基本初等函数

基本初等函数包括常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数六大类,它们是微积分中所研究对象的基础.虽然大部分函数在中学已经学过,但我们在这里将系统地讨论它们的定义域、值域、图像和性质,读者应该很好地掌握这些内容.

1. 常数函数 $y=c$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$,由于无论 x 取何值,都有 $y=c$,所以,它的图像是过点$(0,c)$平行于 x 轴的一条直线,如图 1-10.它是偶函数.

2. 幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为实数)

幂函数的情况比较复杂,我们分 $\alpha>0$ 和 $\alpha<0$ 来讨论.

当 α 取不同值时,幂函数的定义域不同,为了便于比较,我们只讨论 $x\geqslant 0$ 的情形,而 $x<0$ 时的图像可根据函数的奇偶性确定.

当 $\alpha>0$ 时,函数的图像通过原点$(0,0)$和点$(1,1)$,在$(0,+\infty)$内单调增加且无界,如图 1-11.

当 $\alpha<0$ 时,图像不过原点,但仍通过点$(1,1)$,在$(0,+\infty)$内单调减少、无界,曲线以 x 轴和 y 轴为渐进线,如图 1-12.

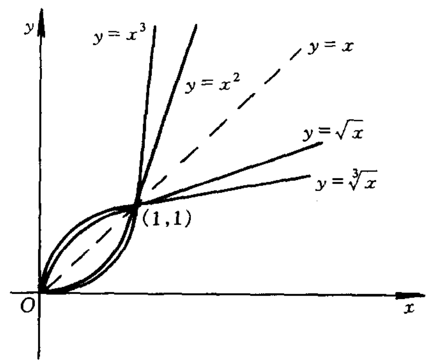

图 1-11

3. 指数函数 $y=a^x$($a>0,a\neq 1$)

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$,由于无论 x 取何值,总有 $a^x>0$,且 $a^0=1$,所以它的图像全部在 x 轴上方,且通过点$(0,1)$.也就是说,它的值域是$(0,+\infty)$.

当 $a>1$ 时,函数单调增加且无界,曲线以 x 轴负半轴为渐近线;

当 $0<a<1$ 时,函数单调减少且无界,曲线以 x 轴正半轴为渐近线,如图 1-13.

读者应特别注意指数函数与幂函数的区别:在幂函数 $y=x^{\alpha}$ 中,自变量 x 在底的位置,指数 α 是常数;而在指数函数 $y=a^x$ 中,自变量 x 在指数位置,底的位置是常数 a.

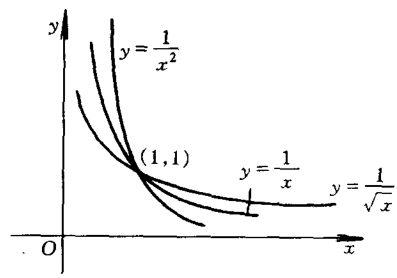

图 1-12

4. 对数函数 $y=\log_a x$($a>0,a\neq 1$)

它的定义域是$(0,+\infty)$,图像全部在 y 轴右方,值域是$(-\infty,+\infty)$.无论 a 取何值,曲线都通过点$(1,0)$.

当 $a>1$ 时,函数单调增加且无界,曲线以 y 轴负半轴为渐近线;

当 $0<a<1$ 时,函数单调减少且无界,曲线以 y 轴正半轴为渐近线,如图 1-14.

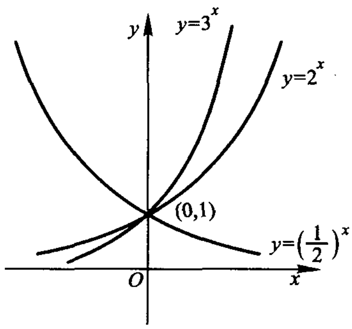

图 1－13

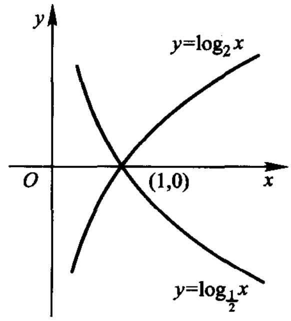

图 1－14

对数函数 $y=\log_a x$ 和指数函数 $y=a^x$ 互为反函数,它们的图像关于 $y=x$ 对称.如图 1－15 $(a>1)$.

以无理数 e = 2.718 281 8…为底的对数函数

$$y=\log_e x$$

叫做自然对数函数,简记作

$$y=\ln x,$$

它是微积分中常用的函数.

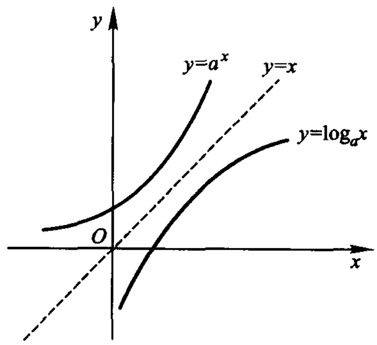

图 1－15

5. 三角函数

三角函数包括下面六个函数:

(1) 正弦函数　$y=\sin x$;

(2) 余弦函数　$y=\cos x$;

(3) 正切函数　$y=\tan x$;

(4) 余切函数　$y=\cot x$;

(5) 正割函数　$y=\sec x$;

(6) 余割函数　$y=\csc x$.

在微积分中,三角函数的自变量 x 采用弧度制,而不用角度制.例如我们用 $\sin\frac{\pi}{6}$ 而不用 $\sin 30°$,用 $\cos\frac{\pi}{2}$ 而不用 $\cos 90°$,$\sin 1$ 则表示 1 弧度角的正弦值.

角度与弧度之间可利用公式 π 弧度 = 180°来换算.

函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $[-1,1]$,奇函数,以 2π 为周期,有界,如图 1－16.

函数 $y=\cos x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $[-1,1]$,偶函数,以 2π 为周期,有界,如图 1－17.

函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,值域为 $(-\infty,+\infty)$,奇函数,以 π 为周期,在每一个连续区间内单调增加,以直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为渐近线, 如

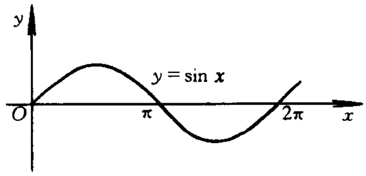

图 1-16

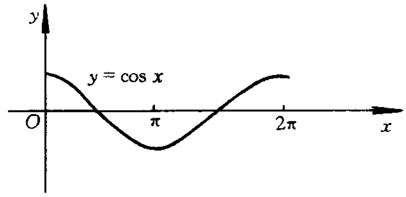

图 1-17

图 1-18.

函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，奇函数，以 π 为周期，在每一个连续区间内单调减少，以直线 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为渐近线，如图 1-19.

关于函数 $y=\sec x$ 和 $y=\csc x$ 我们不作详细讨论，只需知道它们分别为 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 和 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

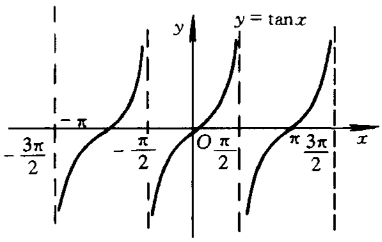

图 1-18

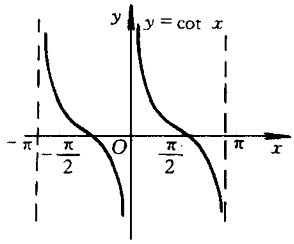

图 1-19

6. 反三角函数

常用的反三角函数有四个：

(1) 反正弦函数　$y=\arcsin x$；

(2) 反余弦函数　$y=\arccos x$；

(3) 反正切函数　$y=\arctan x$；

(4) 反余切函数　$y=\mathrm{arccot}\, x$.

它们是作为相应三角函数的反函数定义出来的.

$y=\arcsin x$ 的含义是正弦值等于 x 的角. 与三角函数相反，这里自变量 x 表示正弦值，而 y 则表示角. 准确地说，是角的弧度数. 例如 $y=\arcsin\dfrac{1}{2}$ 表示正弦值为 $\dfrac{1}{2}$ 的角，我们知道 $\dfrac{\pi}{6}$ 的正弦是 $\dfrac{1}{2}$，所以有 $y=\dfrac{\pi}{6}$. 但实际上，$y=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}$，$y=2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的正弦值都等于 $\dfrac{1}{2}$. 为了避免 $y=\arcsin x$ 的多值性，我们限定了一个区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，叫做反正弦函数的主值区间. 在这个区间内，正弦取某个值的角就被惟一确定，例如在主值区间内，正弦值为 $\dfrac{1}{2}$ 的角只能是 $\dfrac{\pi}{6}$. 而 $\arcsin x$ 则表示主值区间内的反正弦.

类似的，对其他几种反三角函数都规定了相应的主值区间，保证了它们的单值性. 当然由于

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com