荣德基 总主编

特高级教师

点拨®

新课标

九年级数学 下

配人教版

只要看着远方 就意味着忘了脚下的路 再猛烈的冲刺你也要踏好最后一步

内蒙古少年儿童出版社

责任编辑：黑　虎
封面题字：沈　鹏
封面设计：典点瑞泰

荣德基 总主编

2007年春季荣德基主编图书九年级新课标一览

ISBN 7-5312-2132-2

9 787531 221326 >

RD710902R1290

ISBN 7-5312-2132-2/G·1113

全套共7册　总定价：91.00元

特高级教师

点拨

九年级数学（下）

（配人教版）

总 主 编：荣德基

本册主编：李俊之

编写人员：尉 菲

内蒙古少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

特高级教师点拨.九年级数学.下:人教版/荣德基主编.—通辽:内蒙古少年儿童出版社,2006.9

ISBN 7 5312 2132 2

Ⅰ.特...　Ⅱ.荣...　Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 107830 号

你的差距牵动着我的心

责任编辑/黑　虎

装帧设计/典点瑞泰

出版发行/内蒙古少年儿童出版社

地址邮编/内蒙古通辽市霍林河大街西 312 号(028000)

经　　销/新华书店

印　　刷/郑州欣隆印刷有限公司

总 字 数/2096 千字

规　　格/880×1230 毫米　1 32

总 印 张/67.25

版　　次/2006 年 9 月第 1 版

印　　次/2006 年 9 月第 1 次印刷

总 定 价/91.00 元(全 7 册)

目录

CONTENTS

第二十六章　二次函数

第二十七章　相　似

第二十八章　锐角三角函数

第二十九章　投影与视图

第二十六章 二次函数

知识链接

1. **事实链接**

二次函数是描述现实世界变量之间关系的重要数学模型.著名的自由落体公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 刻画了下落距离 s 随下落时间 t 变化而变化的关系.我们常把 s 称为自变量 t 的二次函数.

2. **问题链接**

(1)圆的半径为 r,面积为 S,则 S 与 r 之间的关系式是什么?

(2)正方形边长是 x,面积为 y,则 y 与 x 之间的关系式是什么?

(3)用长为 l 的绳子围成圆或正方形,哪个图形面积大?

第一节 二次函数

Ⅰ 课前准备

一、关键概念和方法提示

关键概念:二次函数定义、二次函数图象和性质、二次函数三种形式的解析式.

关键方法:配方法、平移规律、解析法求实际问题函数关系式、数形结合法.

二、教材中的"?"解答

1. **问题**:函数 $y=6x^2$,$d=\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n$,$y=20x^2+40x+20$ 有什么共同点?

解答:函数都是用自变量的二次式表示的,且二次项系数均为不为 0 的常数.

2. **问题**:还记得如何用描点法画一个函数的图象吗?

解答:(1)列表:列表给出自变量与函数的一些对应值,列表时要注意根据自变量的取值范围取值,通常把自变量 x 的值放在表的第一行,对应函数值 y 放在第二行,其中 x 的值一般从小到大取.

(2)描点:以表中每对对应值为坐标,在平面直角坐标系中描出相应的点,描点时一般要把关键的点准确地描出,点取得越多,图象越准确.

(3)连线:按自变量从小到大的顺序,把所描各点用平滑曲线连接起来.

3. **问题**:观察:函数 $y=\frac{1}{2}x^2$,$y=2x^2$ 的图象与函数 $y=x^2$(书中图 26.1-5 中的虚线图形)的图象相比,有什么共同点和不同点?

解答:共同点:二次项系数都大于 0,对称轴都是 y 轴,顶点都是原点,开口方向均向上,且顶点都是最低点.

不同点:$y=\frac{1}{2}x^2$,$y=x^2$,$y=2x^2$ 的开口大小不同,其开口依次由大到小.

4. **问题**:对比抛物线 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$,它们关于 x 轴对称吗?一般地,抛物线 $y=$

ax^2 和 $y=-ax^2$ 呢？

解答：抛物线 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 关于 x 轴对称；一般地，抛物线 $y=ax^2$ 和 $y=-ax^2$ 关于 x 轴对称.

5. **问题**：（P_8 归纳）

解答：一般地，抛物线 $y=ax^2$ 的对称轴是 y 轴，顶点是原点. 当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上，顶点是抛物线的最低点，a 越大，抛物线的开口越小；当 $a<0$ 时，抛物线的开口向下，顶点是抛物线的最高点，a 越大，抛物线的开口越大.

6. **问题**：把抛物线 $y=2x^2$ 向上平移 5 个单位，会得到哪条抛物线？向下平移 3.4 个单位呢？

解答：抛物线 $y=2x^2$ 向上平移 5 个单位，得抛物线 $y=2x^2+5$；把抛物线 $y=2x^2$ 向下平移 3.4 个单位，就得到抛物线 $y=2x^2-3.4$.

7. **问题**：怎样平移抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 得到抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-6)^2+3$？

解答：将抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向右平移 6 个单位，得到抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-6)^2$，再向上平移 3 个单位，得到 $y=\frac{1}{2}(x-6)^2+3$.

Ⅱ 基础知识必备

一、必记知识背牢

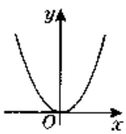
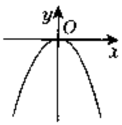
1. **必记知识**：二次函数定义.

必记内容：形如 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，$a\neq0$）的函数叫做 x 的二次函数.

巧记方法：二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的结构特征：等号右边是关于自变量 x 的二次多项式.

2. **必记知识**：$y=ax^2(a\neq0)$ 的图象与性质.

必记内容：

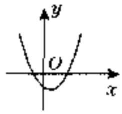
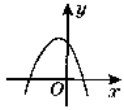
函数		图象	开口方向	顶点坐标	对称轴	函数变化	最大(小)值
$y=ax^2$	$a>0$		向上	(0, 0)	y 轴	$x>0$ 时，y 随 x 增大而增大；$x<0$ 时，y 随 x 增大而减小.	当 $x=0$ 时，$y_{最小值}=0$.
$y=ax^2$	$a<0$		向下	(0,0)	y 轴	$x>0$ 时，y 随 x 增大而减小；$x<0$ 时，y 随 x 增大而增大.	当 $x=0$ 时，$y_{最大值}=0$.

巧记方法：二次函数 $y=ax^2$ 的性质，主要研究抛物线开口方向、顶点、对称轴、函数值的增减性、函数最值，需重点记忆抛物线的图象特征：抛物线 $y=ax^2$ 的开口方向及大小由 a 决定：$a>0$，开口向上；$a<0$，开口向下，$|a|$ 越大，开口越小；再由图象特征判断其

增减性：$a>0$ 时，左减右增；$a<0$ 时，左增右减.

3. **必记知识**：函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象与性质.

必记内容：

函数	二次函数 $y=ax^2+bx+c(a,b,c$ 是常数，$a\neq0)$	
图象	$a>0$	$a<0$
		
性质	(1)当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，并向上无限延伸	(1)当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，并向下无限延伸
	(2)对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$	(2)对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$
	(3)在对称轴的左侧，即当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；在对称轴的右侧，即当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大	(3)在对称轴的左侧，即当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；在对称轴的右侧，即当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小.
	(4)抛物线有最低点，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最小值，$y_{最小值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$	(4)抛物线有最高点，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最大值，$y_{最大值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$

巧记方法：无论 a 大于或小于 0，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴均为 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. 对于第(3)点可巧记为：$a>0$ 时，左减右增；$a<0$ 时，左增右减.

4. **必记知识**：抛物线 $y=ax^2(a\neq0)$ 的平移规律.

必记内容：将 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象上、下、左、右平移得抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的方法是：h 为正(负)时，将 $y=ax^2$ 的图象向右(左)平移 $|h|$ 个单位得到 $y=a(x-h)^2$ 的图象；k 为正(负)时，将 $y=a(x-h)^2$ 的图象向上(下)平移 $|k|$ 个单位，即得 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象.

巧记方法：将 $y=ax^2(a\neq0)$ 平移得 $y=a(x\pm h)^2\pm k$ 图象方法巧记为：左右平移左加右减 $|h|$，上下平移，上加下减 $|k|$.

二、精彩点拨教材知识

知识点 1：二次函数的定义（这是重点）.

详解：一般地，如果 $y=ax^2+bx+c(a,b,c$ 是常数，$a\neq0)$，那么 y 叫做 x 的二次函数. 其中 a,b,c 分别是函数表达式的二次项系数、一次项系数和常数项. 如 $y=x^2-2x+3$，$y=3x^2+2x$，$y=-3x^2+7$ 等都是二次函数.

拓展：(1)$y=ax^2+bx+c(a,b,c$ 是常数，$a\neq0)$ 叫二次函数的一般式，任何一个二

次函数的解析式都可化成 $y=ax^2+bx+c$(a、b、c 是常数，$a\neq0$)的形式.

(2)二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$中，a 必须是不等于 0 的实数，b 和 c 可为任意实数. 因为 $a=0$ 时，$y=ax^2+bx+c$ 就是 $y=bx+c$，若 $b\neq0$，则 $y=bx+c$ 是一次函数；若 $b=0$，则 $y=c$ 是一个常数函数.

(3)二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的结构特征是：等号右边是关于自变量 x 的二次多项式.

(4)二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$有密切联系，如果将变量 y 换成一个常数，那么这个二次函数就是一个一元二次方程.

【例 1】 下列函数哪些是二次函数?

①$y=1-x^2$，②$y=\dfrac{2}{x^2+1}$，③$y=2x(1-3x)$，④$y=-\sqrt{3}x^2$，⑤$y=x^2-(2-x)^2$，⑥$y=mx^2+nx+p$(其中 m、n、p 是常数).

解：①、③、④是二次函数；当 $m=0$ 时，⑥不是二次函数，当 $m\neq0$ 时，⑥是二次函数.

点拨：将问题化简后，观察二次项系数是否为零及表达式是否为整式.

知识点 1 针对性练习：

1. 函数 $y=ax^2+bx+c$(其中 a、b、c 均为常数)为二次函数的条件是(　　)

A. $a\neq0$　　B. $b\neq0$　　C. $c\neq0$　　D. $a\neq0$，$b\neq0$，$c\neq0$

2. 若 $y=(m^2+m)x^{m^2-m}$是二次函数，则 $m=$________.

知识点 2：二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$的图象与性质(这是重点).

详解：(1)二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$的图象是一条抛物线，一般地，二次函数的图象叫抛物线 $y=ax^2$，其对称轴是 y 轴，顶点在原点处，开口方向由 a 的符号决定. 当 $a>0$ 时，开口向上，抛物线在 x 轴上方，并向上无限延伸，顶点是抛物线的最低点；当 $a<0$ 时，开口向下，抛物线在 x 轴下方，并向下无限延伸，顶点是抛物线的最高点.

(2) a 决定抛物线 $y=ax^2$ 的形状.

①$|a|$相等时，则形状一样，例如 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 与 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ 的形状一样，开口方向相反. 即：将抛物线 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 沿 x 轴翻折或绕其顶点(0,0)旋转 180°得到抛物线 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$.

②$|a|$决定抛物线开口大小. $|a|$越大，抛物线开口越小；$|a|$越小，抛物线的开口越大.

(3)二次函数图象的画法.

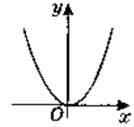
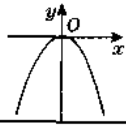
①列表：先取原点(0,0)，然后在原点两侧对称地各取两个点，由于关于 y 轴对称的两个点的横坐标互为相反数，纵坐标相等，所以先计算出 y 轴右侧两点的纵坐标，左侧对应写出即可.

②描点：先将 y 轴右侧的两个点描出来，然后按对称关系找到 y 轴左侧的两个对应点.

③连线：按从左到右或从右到左的顺序将这 5 个点，(两对关于 y 轴对称的点和原点)用平滑的曲线连接起来.

4. 性质.

关于二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的性质，主要从抛物线的开口方向、顶点、对称轴、函数值的增减性，以及函数的最值几个方面来研究，下面结合图象将其性质列表归纳如下：

函数		图象	开口方向	顶点坐标	对称轴	函数变化	最大(小)值
$y=ax^2$	$a>0$		向上	(0, 0)	y 轴	$x>0$ 时，y 随 x 增大而增大；$x<0$ 时，y 随 x 增大而减小.	当 $x=0$ 时，$y_{最小值}=0$.
$y=ax^2$	$a<0$		向下	(0,0)	y 轴	$x>0$ 时，y 随 x 增大而减小；$x<0$ 时，y 随 x 增大而增大.	当 $x=0$ 时，$y_{最大值}=0$.

不画出图象，我们可直接由上表说出 $y=-4x^2$ 的对称轴是 y 轴，顶点是原点，开口向下，当 $x=0$ 时，$y_{最大值}=0$，以及函数在 $x>0$ 或 $x<0$ 的变化情况.

【例 2】 已知函数 $y=(k+2)x^{k^2-k-4}$ 是二次函数，且当 $x>0$ 时，y 随 x 增大而增大. (1)求 k 值；(2)画出函数的图象.

解：(1)由题意，得 $\begin{cases}k^2+k-4=2,\\k+2>0\end{cases}$ 解得 $k=2$.

(2)当 $k=2$ 时，$y=4x^2$，用描点法画出函数图象.

列表：

x	…	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	…
$y=4x^2$	…	4	1	0	1	4	…

描点，连线，得图 26-1-1.

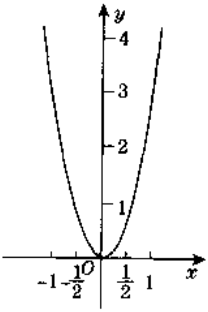
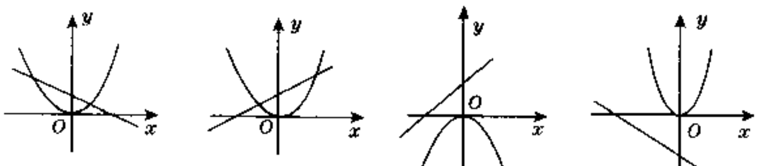


图 26-1-1

点拨：由二次函数定义：自变量 x 的最高次数为 2，且二次项系数不为零，又由二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的性质：二次项系数大于零，$x>0$ 时，y 随 x 增大而增大，联立求解即得 $k=2$. 另外注意本题根据对称性用描点法画抛物线的步骤.

知识点 2 针对性练习：

3. 函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 与函数 $y=ax+a(a\neq0)$，在同一直角坐标系中的图象大数是图 26-1-2 中的(　　)



A　　B　　C　　D

图 26-1-2

4. 已知抛物线 $y=ax^2(a\neq0)$ 经过点 $A(-2,-8)$.

(1)判断点 $B(-1,-4)$ 是否在此抛物线上；

(2)求出此抛物线上纵坐标为 -6 的点的坐标.

知识点 3：函数 $y=ax^2+k(a\neq0,k$ 为常数)的图象和性质及与 $y=ax^2(a\neq0)$ 的关系(这是难点).

详解：(1)抛物线 $y=ax^2+k$ 的对称轴是 y 轴，顶点$(0,k)$.

(2)$y=ax^2+k$ 与 $y=ax^2$ 的图象形状、开口大小、方向相同，只有顶点不同，$y=ax^2+k$ 的图象顶点坐标是$(0,k)$，$y=ax^2$ 的图象顶点坐标是$(0,0)$.

(3)$y=ax^2+k$ 的图象可由 $y=ax^2$ 图象向上(或向下)平移得到. 当 $k>0$ 时，抛物线 $y=ax^2$ 向上平移 $|k|$ 个单位，得 $y=ax^2+k$；当 $k<0$ 时，抛物线 $y=ax^2$ 向下平移 $|k|$ 个单位，得 $y=ax^2+k$.

【例 3】 如图 26-1-3，在同一直角坐标系中，一次函数 $y=ax+c$ 与二次函数 $y=ax^2+c$ 的图象大致为(　　)

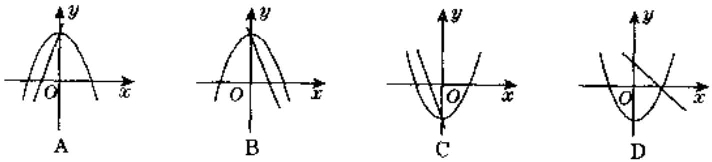


图 26-1-3

解：B　**点拨：**本题考查一次函数与二次函数的性质. A、B 两选项中二次函数 $y=ax^2+c$ 开口向下，交 y 轴于正半轴，故 $a<0$，$c>0$，B 项正确. C、D 两选项中由 $y=ax^2+c$ 开口向上知 $a>0$，而由直线 $y=ax+c$ 所过象限知 $a<0$，存在矛盾故排除 C、D.

知识点 3 针对性练习：

5. 抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2-3$ 可由抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 沿________轴向________平行移动________个单位得到，它的开口方向向________，顶点坐标是________，对称轴是________，当 $x=$________时，$y_{最____值}=$________，当 x________时，y 随 x 的增大而增大，当 x________时，y 随 x 的增大而减小.

6. 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-4$ 的顶点坐标是(　　)

A. $(2,0)$　　B. $(-2,0)$　　C. $(1,3)$　　D. $(0,-4)$

知识点 4：抛物线 $y=a(x-h)^2(a\neq0,h,k$ 为常数)与 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0,h,k$ 为常数)的图象与性质(这是重难点).

详解：(1)抛物线 $y=a(x-h)^2$ 的对称轴是 $x=h$，顶点为$(h,0)$.

抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的对称轴是 $x=h$，顶点为(h,k).

(2)$y=a(x-h)^2$，$y=a(x-h)^2+k$ 与 $y=ax^2$ 形状相同，位置不同，彼此可通过平移得到，其特点都是：$a>0$ 时，开口向上；$a<0$ 时，开口向下.

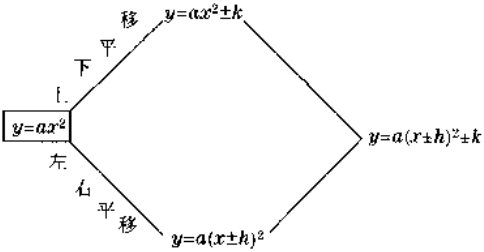
(3)①抛物线 $y=a(x-h)^2$ 的图象可以由抛物线 $y=ax^2$ 左右平移得到. 当 $h>0$ 时，抛物线 $y=ax^2$ 向右平移 h 个单位，得到 $y=a(x-h)^2$；当 $h<0$ 时，抛物线 $y=ax^2$

向左平移 $|h|$ 个单位,得到 $y=a(x-h)^2$.

②抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象可由抛物线 $y=ax^2$ 向左(或向右)平移 h 个单位,再向上(或向下)平移 k 个单位而得到.

如 $y=2x^2$ 的图象 $\xrightarrow[\text{1个单位}]{\text{向右平移}}$ $y=2(x-1)^2$ 的图象 $\xrightarrow[\text{1个单位}]{\text{向下平移}}$ $y=2(x-1)^2-1$ 的图象.

拓展:抛物线平移规律:



规律简记为"左右平移,左加右减;上下平移,上加下减".

【例 4】 把抛物线 $y=-3x^2+5$ 向右平移 3 个单位,再向下平移 7 个单位,求此函数关系式,并指出其开口方向,对称轴及顶点.

解:函数关系式 $y=-3(x-3)^2+5-7=-3(x-3)^2-2$,图象开口向下,对称轴为 $x=3$,顶点坐标为 $(3,-2)$.

点拨:抛物线右移时,将其在括号内减,下移时,将其在括号外减.

知识点 4 针对性练习:

7. 二次函数 $y=2(x-1)^2+2$ 的图象,可由 $y=2x^2$ 的图象(　　)

A. 向左平移 1 个单位,再向下平移 2 个单位得到

B. 向左平移 1 个单位,再向上平移 2 个单位得到

C. 向右平移 1 个单位,再向下平移 2 个单位得到

D. 向右平移 1 个单位,再向上平移 2 个单位得到

8. 二次函数 $y=a(x+k)^2-k(a\neq 0)$,无论 k 为何实数,其图象的顶点在(　　)

A. 直线 $y=x$ 上　B. 直线 $y=-x$ 上　C. x 轴上　　D. y 轴上

知识点 5:二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象和性质(这是重难点).

详解:(1)二次函数一般式 $y=ax^2+bx+c$ 与顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ 可互相转化.将一般式 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 化为顶点式时常用配方法.

如:$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ ← $\boxed{\text{提出 } a\text{,而非除以 } a}$

$=a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$ ← $\boxed{\text{加上一次项系数一半的平方}\left(\frac{b}{2a}\right)^2\text{,再减去}\left(\frac{b}{2a}\right)^2\text{.}}$

$=\underbrace{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}}_{\boxed{\text{顶点式}}}$

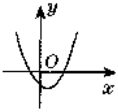
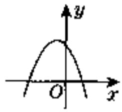
因此，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

(2) 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象画法.

①描点法：先把二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 形式，再确定抛物线开口方向，对称轴及顶点坐标. 然后在对称轴两侧取对称点描点.

②平移法：先求出顶点坐标 (h,k)，再将抛物线 $y=ax^2$ 平移，使顶点平移到 (h,k).

(3) 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的性质.

函数	二次函数 $y=ax^2+bx+c$（a、b、c 是常数，$a\neq 0$）	
图象	$a>0$	$a<0$
		
性质	(1) 当 $a>0$ 时：抛物线开口向上，并向上无限延伸. (2) 对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. (3) 在对称轴的左侧，即当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；在对称轴的右侧，即当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大. 简记左减右增. (4) 抛物线有最低点，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最小值，$y_{最小值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.	(1) 当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，并向下无限延伸. (2) 对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. (3) 在对称轴的左侧，即当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；在对称轴的右侧，即当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小. 简记左增右减. (4) 抛物线有最高点，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最大值，$y_{最大值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

【例 5】 把二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{1}{2}$ 的图象向上平移 3 个单位，再向右平移 4 个单位，则两次平移后的图象的解析式为（　　）

A. $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+7$　　　　B. $y=-\frac{1}{2}(x+7)^2+7$

C. $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2+4$　　　　D. $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+1$

解：A　**点拨**：将函数化为顶点式为 $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2+4$，顶点为 $(-3,4)$，则经过平移后变为 $(-3+4,4+3)$，即顶点变为点 $(1,7)$，于是解析式为 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+7$.

知识点 5 针对性练习：

9. 用配方法将函数 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+1$ 写成 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0,h,k$ 为常数)的形式(　　)

A. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-1$　　　　B. $y=\frac{1}{2}(x-1)^2-1$

C. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-3$　　　　D. $y=\frac{1}{2}(x-1)^2-3$

10. 如图 26-1-4 抛物线 $y=-x^2+2(m+1)x+m+3$ 与 x 轴交于 A、B 两点，且 $OA:OB=3:1$，则 m 的值为(　　)

A. $\frac{5}{3}$　　　　B. 0

C. $-\frac{5}{3}$ 或 0　　　　D. 1

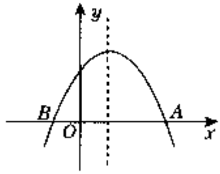


图 26-1-4

知识点 6：二次函数最值及应用(这是热点).

详解：求二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的最大值或最小值的主要方法有：

(1)配方法：$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$

$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，当 $a>0$ 且 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最小值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$. 当 $a<0$ 且 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最大值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

(2)公式法：当 $a>0$ 时，y 有最小值，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最小值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$. 当 $a<0$ 时，y 有最大值，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最大值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

例如求函数 $y=-3x^2+6x+10$ 最值，用配方法：$y=-3x^2+6x+10=-3(x-1)^2+13$.

当 $x=1$ 时，$y_{最大值}=13$；用公式法：因为 $a=-3$、$b=6$，$c=10$，所以 $x=-\frac{b}{2a}=1$ 时，y 有最大值为 $\frac{4ac-b^2}{4a}=13$.

拓展：研究二次函数最值时，除了要考查 a 的性质符号外，还应注意自变量 x 的取值范围. 如果自变量 x 在定区间 $x_1\leqslant x\leqslant x_2(x_1<x_2)$ 内取值，则应分清该区间是否包含 $x=-\frac{b}{2a}$，若在此范围内，则当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$；若不在此范围，需考虑函数在 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 范围内的增减性，如果在此范围内，y 随 x 的增大而增大，则 $x=x_2$ 时，$y_{最大值}=ax_2^2+bx_2+c$，当 $x=x_1$ 时，$y_{最小值}=ax_1^2+bx_1+c$；如果在此范围内，y 随 x 的增大而减小，则当 $x=x_1$ 时，$y_{最大值}=ax_1^2+bx_1+c$，当 $x=x_2$ 时，$y_{最小值}=ax_2^2+bx_2+c$；另外对于不宜用配方法求最值的函数，也可利用方程的根的判别式求解，对于 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，变形得 x 的二次方程 $ax^2+bx+(c-y)=0$，若方程有实根，则 $\Delta\geqslant0$，由 $\Delta\geqslant$

0 得 y 的取值范围，从而求出 y 的最值. 同时也应注意自变量 x 的取值范围.

【例 6】 为了美化校园环境，某中学准备在一块空地(如图 26-1-5 中矩形 $ABCD$，$AB=10\text{m}$，$BC=20\text{m}$)上进行绿化. 中间的一块(图中的四边形 $EFGH$)种花，其他的四块上铺设草坪，并要求 $AE=AH=CF=CG$，那么满足上述条件的所有设计中，是否存在一种设计，使四边形 $EFGH$ 的面积最大？若存在，请求出该设计中的 AE 的长和四边形 $EFGH$ 的面积；若不存在，请说明理由.

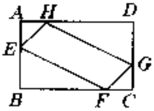


图 26-1-5

解：假设存在四边形 $EFGH$ 满足上述条件. 设 $AE=AH=CF=CG=x\text{m}$，则 $BE=DG=(10-x)\text{m}$，$BF=DH=(20-x)\text{m}$.

所以 $S_{四边形EFGH}=10\times20-2\times\frac{1}{2}x^2-2\times\frac{1}{2}(10-x)(20-x)=-2x^2+30x=-2\left(x-\frac{15}{2}\right)^2+\frac{225}{2}$.

此时 S 是关于 x 的二次函数，且 $0<x<10$. 当 $x=7.5$ 时，S 取得最大值. 所以存在一种设计，使得四边形 $EFGH$ 的面积最大，最大面积是 $S_{最大值}=112.5\text{m}^2$.

点拨：应用二次函数最值解决实际问题要做到以下几点：(1)仔细审题，树立解决问题的信心，养成良好的心理素质；(2)抽象出数量关系，建立数学模型；(3)由建立的数学模型，利用有关的数学思想和方法解决问题.

知识点 6 针对性练习：

11. 在距离地面 2m 高的某处把一物体以初速度 v_0(m/s)竖直向上抛出，在不计空气阻力的情况下，其上升高度 s(m)与抛出时间 t(s)满足：$s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$. (其中 g 是常数，通常取 10m/s^2)，若 $v_0=10\text{m/s}$，则该物体在运动过程中最高点距离地面______m.

12. 有一根长 6 米的木条，要做成一个中间有一根横撑的长方形窗框(如图 26-1-6)问当长和宽如何下料时，这个窗框透过的光线最多(下料时，不计损耗与加工余料)？

图 26-1-6

三、易错点和易忽略点导析

易错点 1：二次函数图象的平移.

易错点导析：二次函数平移时，不少同学易混淆左右平移，避免这种错误的有效方法：一是结合一次函数图象平移规律学习，二是通过作图理解记忆平移规律. 解题时先将二次函数化为顶点式，然后由顶点的位置关系，确定平移的方向和距离.

【例 1】 二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$ 的图象是由函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象先向______(左、右)平移______个单位，再向______(上、下)平移______个单位得到的.

错解一：$y=\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}+\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{11}{8}$. 所以 $y=\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}$ 是由 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向左平移 $\frac{3}{4}$ 个单位，再向上平移 $\frac{11}{8}$ 个单位得到的.

错解二：$y=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}(x^2+6x+5)=\frac{1}{2}(x^2+6x+9-9+5)=\frac{1}{2}(x+$

$3)^2-2$. 所以抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$ 是由 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向右平移3个单位,再向下平移2个单位得到的.

错解分析:错解一是在二次函数由一般式化为顶点式时,在配方过程中提公因式和去括号时出现错误.错解二混淆了图象的左右平移.

正确解法:$y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}(x^2+6x+5)=\frac{1}{2}(x^2+6x+9-9+5)=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$. 所以抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$ 是由 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向左平移3个单位,再向下平移2个单位得到的.

针对性练习:

13. 已知二次函数 $y=2x^2$,将此函数的图象向左平移两个单位长度,再向下平移3个单位长度,则平移后得到的函数关系式为________.

易错点2:忽视自变量取值范围.

易错点导析:在求函数解析式和有关最值问题时,往往因忽视自变量的取值范围而导致错解,我们解题时要注意此点.

【例2】 已知 $y=x^2+1$,当 $2\leqslant x\leqslant 5$ 时,求它的最大值与最小值.

错解:因为 $y=x^2+1$ 的图象开口向上,顶点坐标是(0,1),所以函数最小值为1,此函数没有最大值.

错解分析:错解中忽视了自变量的取值范围,函数 $y=x^2+1$ 与函数 $y=x^2+1(2\leqslant x\leqslant 5)$ 的图象不同,函数 $y=x^2+1(2\leqslant x\leqslant 5)$ 的图象是 $y=x^2+1$ 图象的一部分,对于 $y=x^2+1$,自变量的取值是全体实数,它的函数值有最小值,没有最大值,当自变量的取值限定在一定的范围内时,函数的最值可能发生一定的变化.

正确解法:因为 $y=x^2+1$,当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而增大,所以 $y=x^2+1(2\leqslant x\leqslant 5)$,当 $x=2$ 时,函数有最小值为5;当 $x=5$ 时,函数有最大值为26.

针对性练习:

14. 如图26-1-7,已知边长为4的正方形截去一角成为五边形 $ABCDE$,其中 $AF=2$,$BF=1$,在 AB 上求一点 P,使矩形 $PNDM$ 有最大面积.

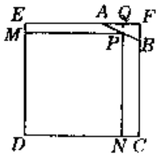


图 26-1-7

易忽略点:二次函数定义.

易忽略点导析:解题中往往会忽略 $y=ax^2+bx+c$ 中的重要条件 $a\neq 0$,或考虑问题不全面导致出错.我们只有真正理解二次函数的定义才能避免类似错误.

【例3】 已知函数 $y=(m-1)x^{m^2+1}+2x+1$ 是二次函数,求 m 的值.

错解:因为函数 $y=(m-1)x^{m^2+1}+2x+1$ 是二次函数,所以 $m^2+1=2$,$m^2=1$,所以 $m=\pm 1$.

错解分析:解题过程忽略了二次项系数不为0这一重要条件,出现多余解.

正确解法:因为 $y=(m-1)x^{m^2+1}+2x+1$ 是二次函数,所以 $m^2+1=2$ 且 $m-1\neq$