· 经济数学基础 ·

线性代数

胡金德　编著

中国人民大学出版社

·经济数学基础·

线性代数

胡金德　编著

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/胡金德编著.
北京：中国人民大学出版社，2006
(经济数学基础)
ISBN 7-300-07719-6

Ⅰ.线…
Ⅱ.胡…
Ⅲ.线性代数-高等学校-教材
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 125464 号

经济数学基础

线性代数

胡金德　编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010—62511242（总编室）		010—62511398（出版部）
	010—82501766（邮购部）		010—62514148（门市部）
	010—62515195（发行公司）		010—62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京鑫丰华彩印有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本	**版　　次**	2006 年 12 月第 1 版
印　　张	12.25　插页 1	**印　　次**	2006 年 12 月第 1 次印刷
字　　数	246 000	**定　　价**	16.00 元

总　　序

随着教学改革的不断深入和办学规模的扩大，我国各高校经济与管理类专业的学生情况、不同专业对公共数学基础课的要求都有很大变化，教学内容的更新、教学课时量的调整都对数学基础课的教学工作和教材建设提出了新的要求。与此同时，全国硕士研究生入学统一考试的规模不断扩大，其中数学考试对于高校公共数学基础课的影响也愈来愈大。对于许多院校经济与管理类专业而言，经过多年调整，实际教学大纲与经济类研究生入学统一考试的考试大纲所涉及的内容已日趋一致。经济数学基础系列丛书正是适应我国高校经济和管理类专业教学改革的新形势、新变化，适时推出的一套教材。全套教材分为五个分册:《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《实用运筹学》和《高级经济数学教程》。

本套教材具有以下特点:作为经济和管理类专业公共数学基础课的主干课程,《微积分》分册、《线性代数》分册、《概率论与数理统计》分册的编写大纲，融括了目前各高校经济和管理类专业普遍采用的教学大纲和教育部颁布的经济类研究生入学统一考试考试大纲所要求的范围;突出了对其中所涉及的基本概念、基本理论和基本方法的介绍和训练;内容完整紧凑，难度适中，便于组织教学，能够在规定的课时内达到各个专业对公共数学基础课教学的基本要求和目的。

考虑到一些经济和管理类专业对公共数学基础课有更高的要求和分级教学的需要，本套教材推出了《高级经济数学教程》分册，该书将为相关专业的学生提供更多面向经济学的高等数学知识。另外，作为高等数学知识的进一步延伸和扩展，本套教材同时推出了《实用运筹学》分册，该书将为经济和管理类专业提供数学在经济和管理中应用的实用知识，并同时介绍相关的计算机应用软件。

本套教材还有一个重要特点是，基础课教材每个分册都配套推出学习辅导书。辅导书主要通过精选典型例题，对教材的每个章节进行系统的归纳总结、说明重点难点、进行答疑解惑，其中包括对教材中多数习题提供解答，以便于学生自习。另一方面，《微积分学习指导》、《线性代数学习指导》、《概率论与数理统计学习指导》三个分册还要着重对教材中的题目类型做必要的补充，增加相当数量的研究生入学考试试题题型，力求在分析问题和综合运用知识解决问题的能力培养方面，帮助学生实现跨越，达到并适应经济类全国硕士研究生入学考试对数学的要求。因此，这三个分册完全具备硕士研究生入学考试数学复习参考书的

功能，将在读者日后备考研究生时发挥积极作用。

经济数学基础丛书的编写人员由中国人民大学、北京大学、清华大学的专家、教授组成，绝大多数编者具有20年以上从事经济数学研究和公共基础课教学的工作经历，还有许多人从事过多年研究生入学考试数学考前辅导工作，有相当高的知名度。因此，作者在把握经济和管理类公共数学基础课程的教学内容和要求、课时安排和难易程度，以及教学与考研之间的协调关系等方面均具有丰富的经验，这为本套教材的编写质量提供了非常可靠的保障。

我们知道，一套便于使用的成熟的教材往往需要多年不断的磨练和广大读者的支持与帮助，我们热诚欢迎广大读者在使用过程中对本套教材存在的错误和不足之处提出批评和建议。

经济数学基础丛书编写组

2006年10月

目　录

第1章　行　列　式

在线性代数中，行列式是一个重要的工具，它在矩阵、方程组、特征值、特征向量及二次型中有许多重要应用. 本章介绍 n 阶行列式的概念、性质、计算方法及解 n 个未知数 n 个方程的线性方程组的克莱姆法则.

§1.1　二阶与三阶行列式

对二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

用加减消元法，可以得到

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1,$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时，方程组(1.1)有唯一解

$$\begin{cases} x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \end{cases}$$

不难看出，方程组(1.1)的解，当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时，是一个分式，其分子、分母均是两两乘积的差. 为了方便，引进记号

$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \tag{1.2}$$

称为**二阶行列式**，其中，a,b,c,d 称为行列式的元素，a,b 是行列式的第一行，c,d 是第二行，a,c 是行列式的第一列，b,d 是第二列，且这个行列式的值为 $ad-bc$.

例如，由二阶行列式的定义，我们有

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 2\times 3 = -2,$$

$$\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x - (-\cos^2 x) = 1.$$

把二阶行列式用于方程组(1.1),我们称二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

为方程组(1.1)的系数行列式,当 $D\neq 0$ 时,方程(1.1)的解是

$$\begin{cases} x=D_1/D=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \\ y=D_2/D=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中,D_1 是把系数行列式 D 中 x 的系数用常数项替换后得到的,D_2 是把 D 中 y 的系数用常数项替换后得到的.

例 1 用行列式解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 2x+3y=0. \end{cases}$$

解 由于系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=5\neq 0,$$

故方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=15,\quad D_2=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-10,$$

得方程组的解是

$$x=D_1/D=3,\quad y=D_2/D=-2. \qquad \blacksquare$$

完全类似地,对三元一次方程组也有相应的结果. 为了便于推广,这里将未知量表示成 x_1,x_2,x_3,未知量的系数用带有两个下标的 a_{ij} 表示,其中第一个下标 i 表示该项在第 i 个方程,第 2 个下标 j 表示它是未知量 x_j 的系数,这样一个三元一次方程组可以写成

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.4}$$

利用加减消元法,消去 x_2,x_3 后,可以得到

$$\begin{aligned}(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1 \\ =b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{32}a_{23}.\end{aligned}$$

同样地,消去 x_1,x_3 可以得到 x_2 的完全类似的关系式,消去 x_1,x_2 可以得到 x_3 的完全类似的关系式. 这个结果很难记,为此引进三阶行列式的定义,我们称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

是一个**三阶行列式**，其值规定为

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.5}$$

这里 a_{ij} 称为行列式位于第 i 行第 j 列的元素. 由三阶行列式的定义可知，它是一个代数和，共有 $3\,!=6$ 项，每项都是 3 个元素的乘积，每项中三个元素的第一(行)下标及第二(列)下标均无重复，故这三个元素取自不同的行和不同的列，且其中三项前面带正号，三项前面带负号.

三阶行列式表示的代数和可以用图 1-1 来记. 沿各实线相连的三个元素的积取正号，沿虚线相连的三个元素的积取负号，这个记忆法称为**沙路法**.

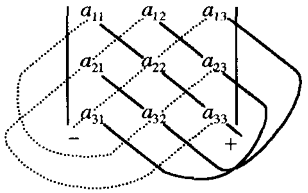

图 1-1

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times 9 + 2 \times 6 \times 7 + 3 \times 4 \times 8 - 3 \times 5 \times 7 - 2 \times 4 \times 9 - 1 \times 6 \times 8$$
$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - a - a - a = a^3 - 3a + 2.$$

利用三阶行列式，当方程组(1.4)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,方程组(1.4)的唯一解可以简洁地用行列式表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}, \tag{1.6}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 2 解三元一次方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2, \\ -2x_1+x_2-x_3=1, \\ x_1-4x_2+2x_3=3. \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} &=1\times1\times2+2\times(-1)\times1 \\ &+1\times(-2)\times(-4)-1\times1\times1-(-1)\times(-4)\times1-2\times(-2)\times2 \\ &=2-2+8-1-4+8=11\neq0. \end{aligned}$$

故

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{11}=-\frac{21}{11},$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{11}=\frac{4}{11},$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix}}{11}=\frac{35}{11}.$$

§ 1.2　n 阶行列式的定义

鉴于二、三阶行列式在讨论二、三个未知量(元)的方程组时所起的作用,在讨论 n 个未知量(元)的线性(一次)方程组之前,我们先研究二、三阶行列式之间的联系,然后再把二、三阶行列式的概念推广到 n 阶(n 是任意正整数)行列式.

由三阶行列式的定义,整理得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},\end{aligned}$$

故知三阶行列式可以通过三个二阶行列式来表示.

记

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = M_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = M_{12}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = M_{13},$$

M_{11},M_{12},M_{13}分别称为三阶行列式中元素 a_{11},a_{12},a_{13}的余子式(即 M_{11}是三阶行列式中划去 a_{11}所在的第一行和第一列的元素,剩余的元素组成的子行列式,M_{12},M_{13}也类似),记

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12}, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13},$$

分别称为三阶行列式中元素 a_{11},a_{12},a_{13}的代数余子式.由代数余子式,我们可以把三阶行列式表示成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

由二、三阶行列式的上述关系,推广到一般情况而得到 n 阶行列式的定义.

定义 1.1　由 n^2 个数(元素)$a_{ij}(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,n)$排列成 n 行 n 列,并在左右各划一竖线,即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

称为一个 n **阶行列式**,它代表一个确定的运算关系所得到的一个数. 当 $n=2$ 时,

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

当 $n>2$ 时,

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}, \tag{1.8}$$

其中

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}.$$

而 M_{1j} 是 D_n 中去掉第 1 行第 j 列元素后按原顺序排成的 $n-1$ 阶行列式,即

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3\,j-1} & a_{3\,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad j=1,2,\cdots,n,$$

并称 M_{1j} 为元素 a_{1j} 的**余子式**,A_{1j} 为元素 a_{1j} 的**代数余子式**.

一般地,元素 a_{ij} 的余子式为 M_{ij},

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{n\,n} \end{vmatrix},$$

a_{ij} 的代数余子式为 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

注意: a_{ij} 的余子式、代数余子式与 a_{ij} 及 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列元素无关,只与 a_{ij} 的位置有关.

显然,由 n 阶行列式的定义可知 n 阶行列式逐阶展开后,共有 $n!$ 项,其中每一项都是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积,全部 $n!$ 项中,带正号的和带负号的各占一半,同时根据定义,n 阶行列式代表一个数值,可由第一行元素与其相应的代数余子式的乘积之和求得,这通常称为**按第一行展开**.

例 1 设

$$D_4=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 5 \end{vmatrix},$$

求 M_{42},A_{42} 及 D_4.

解 $M_{42}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$+(-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-10-7=-17,$$

$$A_{42}=(-1)^{4+2}M_{42}=-17,$$

$$D_4=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 7 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=2\left((-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}+5(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}\right)$$

$$+\left(7(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}+(-1)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\right)$$

$$=2(-5+5(-18-4))+7(-18-4)+(6-1)$$

$$=-379.$$

例 2 计算 n 阶下三角形行列式 D_n 的值($a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$所在的线称**主对角线**,主对角线以上的元素全为零的行列式称为**下三角形行列式**).

其中

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 按行列式的定义,按第一行展开有

$$D_n=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理可得,**对角形**及**上三角形行列式**为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 3 计算右下三角形行列式 D_n 的值(元素 $a_{1n},a_{2\,n-1},\cdots,a_{n1}$所在的线称为**副对角线**,副对角线以上元素全为零,称为**右下三角形行列式**).

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{n\,n} \end{vmatrix}.$$

解 由定义,按第一行元素展开

$$D_n = (-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2\,n-1} \\ 0 & \cdots & a_{3\,n-2} & a_{3\,n-1} \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,n-2} & a_{n\,n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+n}a_{1n}(-1)^{1+n-1}a_{2\,n-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{3\,n-2} \\ 0 & \cdots & a_{4\,n-3} & a_{4\,n-2} \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,n-3} & a_{n\,n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+n}(-1)^{1+n-1}(-1)^{1+n-2}\cdots(-1)^{1+2}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{n+1+(n+(n-1)+\cdots+2+1)-1}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$ ▌

显然,**左上三角形行列式**、**副对角线行列式**也成立,即

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

注意:上述行列式不等于$-a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$,即对一般的 n 阶行列式,沙路法

已不成立，n 阶行列式中副对角线元素乘积一项的正负号由$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$来决定，当 $n=2,3,6,7,10,11,\cdots$时取负号，$n=4,5,8,9,\cdots$时取正号.

§1.3 n 阶行列式的性质

直接用行列式的定义计算行列式，一般是很繁琐的，因此要分析研究行列式的基本性质，以便利用性质来简化行列式的计算.

性质 1 行列式的行与列互换，其值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.9}$$

这条性质表明，在行列式中，行与列的地位是对称的，如果行有某个性质，则对列也适用. 以下我们仅对行讨论行列式的性质.

至于性质 1 的证明，可以用数学归纳法证. 但这里我们略去证明.

性质 2 行列式(1.7)对任一行展开，其值相等，即

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n). \tag{1.10}$$

证法类似于性质 1，也略去不证.

例如，计算四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

时，注意到第二行中有 $a_{21}=a_{22}=a_{24}=0$，由性质 2，D_4 按第二行展开后再按第二行展开，得

$$D_4 = 4(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -4 \times 3(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 12 \times (-11) = -132.$$

下面三条性质(性质 3～性质 5)与一行元素有关，利用性质 2 直接按该行展开即可得到证明.

性质 3 某行元素全为零，则该行列式的值为零.

性质 4 行列式 D 中第 i 行元素都乘 k，其值等于 kD，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.11}$$

性质 5 行列式 D 中第 i 行每个元素都是两数之和 $a_{ij}+b_{ij}$，$j=1,2,\cdots,n$，则该行列式等于下列两个行列式之和：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.12}$$

下列三条性质(性质 6～性质 8)与 D 中两行元素有关.

性质 6 行列式中两行对应元素成比例(包括 1：1 时，两行元素对应相等)，则行列式的值为零，即当 $a_{il}=ka_{jl}$ $(l=1,2,\cdots,n)$时，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{1.13}$$

证明 用数学归纳法. $n=2$ 时，二阶行列式显然成立，假设 $n-1$ 时成立，证明 n 时成立，对行列式(1.13)，利用性质 2，按第 $k(k\neq i,j)$行展开，则

$$D = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}.$$

由于余子式 M_{kl} $(l=1,2,\cdots,n)$中都是 $n-1$ 阶行列式，且都有两行元素成比例，由归纳假设，有 $M_{kl}=0(l=1,2,\cdots,n)$，从而有 $A_{kl}=(-1)^{k+l}M_{kl}=0$ $(l=1,2,\cdots,n)$，故 $D=0$. ▍

性质 7 行列式中，把某行的各元素分别乘非零常数 k，再加到另一行的对应元素上，行列式的值不变.(简称：对行列式作倍加行变换，行列式的值不变.)即