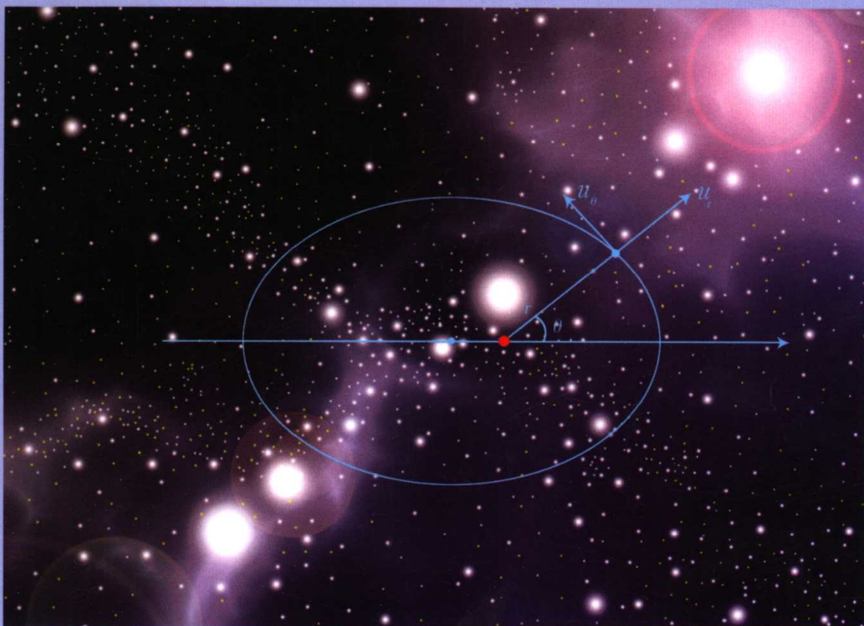
SHUXUE MOXING

数学模型

郑 煜 温广玉 主编



東北林業大學出版社

数 学 模 型

郑 煜 温广玉 主编

東北林業大學 出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学模型/郑煜，温广玉主编．—哈尔滨：东北林业大学出版社，2006.6
ISBN 7－81076－878－6

Ⅰ．数…　Ⅱ．①郑…②温…　Ⅲ．数学模型　Ⅳ．O 22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 074969 号

责任编辑：张红梅
封面设计：彭　宇

NEFUP

数学模型
Shuxue Moxing
郑　煜　温广玉　主编
东北林业大学出版社出版发行
（哈尔滨市和兴路 26 号）
东北林业大学印刷厂印装
开本960×787　1/16　印张13.75　字数237千字
2006年6月第1版　2006年6月第1次印刷
印数1—1 000册

ISBN 7-81076-878-6
O·79　定价：23.00元

内容提要

本书主要介绍实践中经常用到的数学方法。到目前为止，国内已出版许多有关数学模型与数学实验方面的教材，但阅读对象多是以理工科大学生为主，以参加数学建模竞赛为主要目的，农林院校大多数学生阅读起来感到很困难。而本书的特点，一是内容比较全面，应用书中的方法基本上能够解决实际中常见的数学问题；二是通俗易懂，使学过微积分、线性代数、概率论的读者容易掌握，对学过数理统计和线性规划的读者来说，阅读起来更方便。

主要内容有数学建模概述、初等模型、最优化模型、微分方程模型、稳定性模型、数学规划模型、概率统计模型。

本书可作为理工类大学，特别是高等农林院校数学建模课程的教材。

《数学模型》编委会

主　编　郑　煜　温广玉
副主编　王文龙　金恒璨
参　编　邓华玲　王学顺
主　审　张春蕊

前　言

在21世纪，数学越来越渗透到一切领域之中，各类科学技术成熟完备的突出标志是它的量化。数学模型就是用数学语言和方法对各学科中的实际问题的抽象和描述，就是研究通过对实际问题的合理简化，从而能够用一个数学结构来表达实际问题，并用数学方法加以分析和解决，即在实际问题和数学之间架设一道桥梁，因此它是应用数学来解决实际问题的基础。随着科学技术的发展，数学在发展高科技、提高生产水平和实现现代化管理等方面的作用越来越明显。因而，社会对数学地需求并不只是需要数学家和专门从事数学研究的人才，而是越来越多地需要有扎实数学功底的人才，能善于运用数学的知识及数学的思维方式来解决问题的人才。这就要求大学生们学会如何将实际问题经过分析、简化，转化为一个数学问题，然后用适当的数学方法去解决。

传统的数学课程，一般偏重于介绍数学的概念、理论和方法，而对实际问题涉及很少，致使不少学生虽然学会了不少数学知识，但不能将所学的数学知识运用到自己所学的专业中。因而为了使大学生能够较好地解决所学专业中的各种实际问题，大学数学的设置不能仅仅只为了教会学生们一些数学的定理和方法，更重要的是要教会学生怎样运用手中的数学武器去解决实际中的问题。而作为一门新型学科，数学模型正在显示其独特的魅力。

近年来，国内出版的以“数学模型”、“数学建模”为名的数学参考书已不少。这类书各有特色，是指导参加数学建模竞赛的学生的主要参考资料，比较适合于“尖子”学生，其内容的深度和广度不是一般学生所能接受的。面对时代的发展和社会的要求，“数学模型”已被列为大学生的必修课和选修课。因此，作为普及这门课的教材首先应该内容不要太深，能被一般学生读懂且能引起一般学生对这门课的兴趣，其次介绍给学生一些有用的数学方法，开拓学生视野，培养学生的观察力和想象力，与此同时还应该具有教师易教易用、学生易懂易学的特点。这本教材正是本着这个目的而编写的，在编写过程中涉及数学的理论知识时采取说明的方法阐述数学的原理和思想，省略了定义和定理的证明，尽量地做到通俗易懂。希望学生在学完“高等数学”、“线性代数”、“概率论与数理统计”三门课后通过学习“数学建模”这门课对数学有更深刻的理解和认识，将所学的数学知识与所学专业知识相结合，提高

解决实际问题的能力和综合创新的能力，从而达到素质教育的目的。

本教材适用于高等林业院校和高等农业院校各专业，也可适用于理工类大学的各专业，也可作为高职高专的参考书。本书共36~72学时，教师可根据学生专业的不同情况适当进行删减。

本教材编写分工如下：东北林业大学郑煜负责提出全书编写的总体思路，并编写了本书的第一章、第四章、第六章、第七章；东北林业大学温广玉根据多年的教学经验在全书的编写过程中提出了一些很有价值的想法和见解，并对本书做了认真的修改；东北林业大学王文龙编写了第五章；东北林业大学金恒璨编写了第三章；东北农业大学邓华玲和北京林业大学王学顺编写了本书的第二章及全部习题，并提出了一些好的建议。本书由张春蕊教授主审。

数学模型作为一门新的课程，其内容和方法还需要进一步完善，作为普及课程的教材其内容的取舍难以把握，加之编者才疏学浅，尽管我们尽了很大的努力，书中难免有不妥之处，热切地希望得到读者的反馈信息，不管是批评指正，还是建议完善，我们都非常欢迎。

编　者

2006.3

目　录

1　数学模型概述

随着社会的发展，数学在社会中的应用越来越广泛，作用越来越大，数学的形象有了很大的变化。数学已不再是数学家和少数物理学家、天文学家、力学家等人手中的神秘武器，它越来越深入地应用到各行各业中，几乎在人类社会生活的每个角落都展示了无穷威力。这一点尤其表现在生物、政治、经济以及军事等数学应用的非传统领域。数学不再仅仅作为一种工具和手段，而日益成为一种“技术”参与到实际应用问题中。近年来随着计算机的不断发展，数学的应用得到了突飞猛进的发展。

利用数学方法解决问题时，首先要进行的工作是建立数学模型，然后才能在此模型的基础上对实际问题进行理论求解、分析和研究。需要指出的是，虽然数学在解决实际问题时起到关键作用，但数学模型的建立却要符合实际情况。如果建立的模型本身与实际问题相差甚远，那么，即使在理论分析中采用怎样巧妙的数学处理，所得到的结果也会与实际情况不符。因此，建立一个较好的数学模型乃是解决实际问题的关键之一。

从1983年起，在美国就有一些有识之士开始探讨组织一项应用数学方面竞赛的可能性。经过论证、争论、争取资助，终于在1985年有了美国的第一届大学生数学建模竞赛，简称MCM(1987年以前的全称是Mathematical Competition in Modeling，1987年改为Mathematical Contest in Modeling，其缩写均为MCM)。竞赛由美国工业与应用数学学会和美国运筹学会联合主办。美国的MCM虽然只是美国的国内竞赛，但它欢迎其他国家的大学生组队参加，而且有越来越多国家的大学生参加这一竞赛。因此，在某种意义上MCM已经是国际性的竞赛了。我国最早是在1989年，由北京的三所大学组队参加美国的MCM。到后来，我国参加MCM的学校越来越多，经过酝酿、筹备和在一些城市试办，从1992年开始由中国工业与应用数学学会举办我国自己的全国大学生数学建模竞赛(CMCM)，原国家教委对这项活动十分重视，决定从1994年起由原国家教委高教司和中国工业与应用数学学会共同举办，每年一次。我国自己的MCM虽然举办的时间还不长，但发展非常迅速，在1995年的竞赛中，全国就有259所高校、1 234个队、3 702名学生参加。之后，数学建模竞赛更加受到了各高校和大学生的重视，参加的高校和学生人数逐年递增，到2005年，全国有795所院校8 492队参赛，比2004年的724所院校

6 881队分别增长了9.8%和23.4%。现在，全国各高校已经把参加全国数学建模竞赛作为推动学校教学改革的一个重要契机。并且全国各高校已把“数学建模”这门课列为必修课或选修课。

1.1 数学模型概念及应用

1.1.1 原型和模型

原型是指人们研究或从事生产、管理的实际对象，也就是系统科学中所说的实际系统，如电力系统、生态系统、社会经济系统等。而模型是指为了某一特定目的，将原型进行适当的简化、提炼而构成的一种原型替代物，它不是原型原封不动的复制品。原型有各个方面和层次的特征，模型只反映了与某种目的有关的那些方面和层次的特征。因此，同一个原型，为了不同的目的，可以建立多种不同的模型。例如，陈列在展览厅橱窗里的飞机模型，在外形上与飞机相似，但不会飞；而参加航模竞赛的飞机模型就必须能飞；对外形则不必苛求。

模型是客观事物的一种简化的标志和体现，它应具有如下的特点：

(1)它是客观事物的一种模仿和抽象；它的一个重要作用就是加深人们对客观事物如何运行的理解，为了使模型成为帮助人们合理进行思考的一种工具，因此要用一种简化的方式来表现一个复杂的系统和现象。

(2)为了协助人们解决问题，模型必须具备所研究系统的基本特征或要素。此外，还应包括决定其原因和效果的各个要素之间的相应关系。有了这样的一个模型，人们就可以在模型内实际处理一个系统的所有要素，并观察它们的效果。

模型可以分为实物模型和抽象模型，抽象模型又可分为模拟模型和数学模型，而我们感兴趣的是数学模型。

1.1.2 数学模型

一般地说，数学模型可以描述为，对实现世界的一个特定对象，为了一个特定的目的，根据特有的内在规律，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构。这里的特定对象，是指我们所要研究和解决的某一具体问题，这里的特定的目的是指当研究一个特定对象时所需要达到的特定目的，如分析、预测、控制、决策等。这里的数学工具是指数学各分支的理论和方法及数学的某些软件系统，这里的数学结构包括各种数学

方程、表格、图形等。

按照 E.A. Bender 的提法，数学模型乃是“关于部分现实世界为一定目的而做的抽象、简化的数学结构”。由于每个人的讲法不同，不必过于追求严格的定义。总之，数学模型是一种抽象的模拟，它用数学符号、数学式子、程序、图形等刻画可观的本质属性与内在联系，是对现实世界的简化从而进行本质上的描述。它或者能解释事物的各种形态、预测它将来的形态，或者能为控制这一事物的发展提供某种意义下的最优策略或较好策略。

1.1.3 数学模型的作用

分析与设计：例如描述药物浓度在人体内的变化规律以分析药物的疗效。

预报与决策：生产过程中产品质量指标预报、气象预报、伤口预报、经济增长预报等，都要有预报模型。

控制与优化：电力、化工生产过程的最优控制，零件设计中的参数优化都要以数学模型为前提，建立大系统控制与优化的数学模型，是迫切需要和十分棘手的课题。

规划与管理：生产计划、资源配置、输网络规划、库优化调度，以及排队策略、物资管理等，都可以用数学规划模型解决。

1.2 建立数学模型的过程、方法和步骤

1.2.1 建立数学模型的过程

建立数学模型的关键并不是求解数学表达式，而在于是否能十分有效地将实际问题转换成数学问题，使产生的模型可用于对实际问题的求解，这是建模的关键。至于数学问题，可通过各种计算机来数值地求解，所以建模的首要任务是全面地理解问题，然后将其转换成相应的数学形式。建模远比对由模型导出的公式进行求解难，因为实际的问题通常不以一种明显的数学形式存在，更困难的是问题中可能多个因素混杂在一起，不能完全分清。由于存在的问题不是纯数学问题，或者难以完整了解它的特性，所以应该注重对问题的透彻理解和可能做的各种变换，以及验证由模型导出结论的正确程度。所以数学建模的过程分为表述、求解、解释、验证几个阶段，并且通过这些阶段完成从现实对象到数学模型，再从数学模型回到现实对象的循环。建立数学模型的过程如图 1－1 所示。

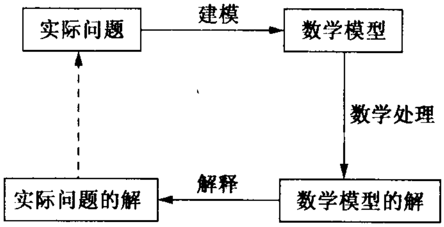


图 1-1　数学建模的过程

1.2.2　建立数学模型的方法

数学建模的方法按大类来分，大体上可分为三类。

1.2.2.1　*机理分析法*

机理分析法就是根据人们对现实对象的了解和已有的知识、经验等，分析研究对象中各变量(因素)之间的因果关系，找出反映其内部机理的规律的一类方法。使用这种方法的前提是我们对研究对象的机理应有一定的了解。

1.2.2.2　*测试分析法*

当我们对研究对象的机理不清楚的时候，可以把研究对象视为一个“黑箱”系统，对系统的输入输出进行观测，并以这些实测数据为基础进行统计分析来建立模型，这样的一类方法称为测试分析法。

1.2.2.3　*综合分析法*

对于某些实际问题，人们常将上述两种建模方法结合起来使用，例如用机理分析法确定模型结构，再用测试分析法确定其中的参数，这类方法称为综合分析法。

1.2.3　建模的步骤

建模是十分复杂的创造性劳动，尽管需要研究的事物和对象不可胜数，这些事物和对象分属多种不同的学科和门类，但是，经过建模工作者长期的努力，已经摸索出一种切实可行的规律，形成了一种大体上的规范。数学建模的一般步骤应该是：

(1) 模型准备(分析问题)。拿到问题之后首先是了解问题的实际背景，明确建模的目的，查阅已有的资料，研究对象的各种信息、数据，弄清对象的特征，并在此基础上探讨解决问题的办法。

(2) 模型假设。根据实际对象的特征和建模目的，对与研究对象有关联的多种因素进行分析，找出主要与次要因素，本质与非本质因素，并用精确

语言做出假设，这是建模的关键。不同的简化与假设会得到不同的模型，假设做得不合理或过于简单，会导致建模失败或部分失败，假设做得过多过细，会使模型太复杂，令下一步工作无法进行。

(3) 模型建立。根据所做假设，利用适当数学工具来描述各变量之间的关系，建立相应的数学结构(公式、表格、图形等)即模型。数学工具应根据问题特征、建模目的及建模者的擅长而定。同一问题可采用不同的方法建立起不同的模型，但应遵循一个原则，那就是尽量采用简单的数学工具，以便建立的模型能被更多的人了解和使用，因为建模的最终目的是为了解决问题。

(4) 模型求解。运用适当的数学工具对模型求解。它包括数值解、解析解、图解、逻辑推理、定理证明等，其中常常需要借助计算机来完成。

(5) 模型仿真分析。对求得的结果进行数学仿真分析，通过各种参数的变化，用模型来做出数学预测，自动寻优以获得最优决策与最优控制。

(6) 模型检验。将模型仿真分析的结果返回给实际模拟的对象，用实际的结果对模型的合理性、适用性、正确性、灵敏性和鲁棒性做出评价。一般还包括误差分析、新旧模型比较、实际可行性(条件、经费等)分析等，这是十分重要的一步。若检验中发现有问题，但建模与求解无误，通常问题出在假设上，就应返回到第二步，修改假设并重新建模，如此多次反复，直至检验认为可行。

(7) 写报告作结论。建立模型的步骤用图形表示如图 1-2 所示。

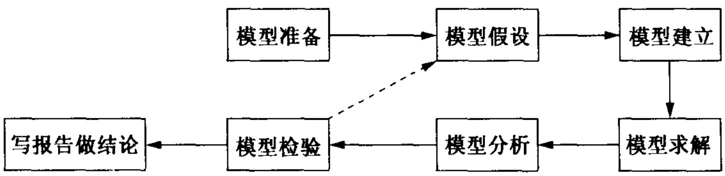


图 1-2 建立模型的步骤

应当指出并不是所有问题的建模都要经过这些步骤，有时各步骤之间的界限也不是那么分明。建模时不要拘泥于形式上的按部就班。

1.2.4 对数学建模的一般要求

(1)要有足够的精确度，就是要把本质的性质和关系反映进去，把非本质的东西去掉，而又不影响反映现实的本质的真实程度。

(2)模型既要精确，又要尽可能的简单。因为太复杂的模型难以求解，

而且如果一个简单的模型已经可以使某些实际问题得到满意的解决，那我们就没有必要再来建立一个复杂的模型。因为构造一个复杂的模型并求解它，往往要付出较高的代价。

(3)要尽量借鉴已有的标准形式的模型。

(4)构造模型的依据要充分，就是说要依据科学规律、经济规律来建立有关的公式和图表，并要注意使用这些规律的条件。

1.3 数学模型的特点和分类

1.3.1 特 点

1.3.1.1 模型的逼真性与可行性

这两者是一对矛盾，数学上总希望模型尽可能地接近研究对象，但逼真的数学模型往往伴随复杂的数学描述，导致很难甚至无法求解，更不用说通过数学模型对实际问题进行仿真、预测，进而实施决策和控制。另外，即使能通过较高层次的人力和物力的投入能求解，由于不能获得合理的经济效益，也是不可取的。所以建模是要在逼真与可行、投入与产出之间进行折中和抉择。

1.3.1.2 模型的渐进性

复杂问题的模型通常不可能一次成功，往往要经过建模过程的反复迭代，不断地完善才能逐渐地逼近满意的模型。

1.3.1.3 模型的鲁棒性

模型结构和参数取决于从对象获取的信息(数据)，而观测数据存在一定的误差，当数据在允许的范围内出现微小变化时，鲁棒性强的模型的结构与参数将只发生很小的变化，不会出现模型的坍塌和崩溃。

1.3.1.4 模型的可转移性

模型是现实对象的抽象化的产物，是现实对象共性的映射，因此它不为对象的所属领域独有，可以转移到相关的领域。

1.3.1.5 模型的非确定性

由于实际问题千变万化，寻求的目标值也存在差异，人的思维角度和借助工具也不尽相同，因此使得建模本身很难有标准答案。

1.3.1.6 建模的技艺性

建模与其说是一门技术，不如说是一门艺术，它类似一种雕塑，具有很强的技巧。经验、想象力、洞察力、判断力、直觉等在建模中会起到很大的

作用。

1.3.1.7 模型的局限性

第一，建模所得的结论虽然具有通用性和准确性，但是，因为模型是现实对象简化和理想化的产物，所以当将模型的结论应用于实际时，那些先前被忽视和简化了的因素必须考虑，来定性或定量地分析由此带来的误差，因此结论的通用和准确是相对的和近似的。第二，由于受人的认识能力和科学技术发展水平的限制，目前还有不少实际问题很难得到有实用价值的数学模型。至今还有一些领域中，尚未发展到能用建模方法寻找数值规律的阶段，例如传统的中医诊断技术、中药配伍技术等。

1.3.2 数学模型的分类

数学模型的分类方法有多种，下面介绍常用的几种分类。

1.3.2.1 按照建模所用的数学方法的不同分类

按照建模所用的数学方法的不同，可分为初等模型、运筹学模型、微分方程模型、概率统计模型、控制论模型等。

1.3.2.2 按照数学模型应用领域的不同分类

按照数学模型应用领域的不同，可分为人口模型、交通模型、经济预测模型、金融模型、环境模型、生态模型、企业管理模型、城镇规划模型等。

1.3.2.3 按照人们对建模机理的了解程度的不同分类

按照人们对建模机理的了解程度的不同可分为：

(1)白箱模型。主要指物理、力学等一些机理比较清楚的学科描述的现象以及相应的工程技术问题，这些方面的数学模型大多已经建立起来，还需深入研究的主要是针对具体问题的特定目的进行修正与完善，或者是进行优化设计与控制等。

(2)灰箱模型。主要指生态、经济等领域中遇到的模型，人们对其机理虽有所了解，但还不很清楚，故称为灰箱模型。在建立和改进模型方面还有不少工作要做。

(3)黑箱模型。主要指生命科学、社会科学等领域中遇到的模型。人们对其机理知之甚少，甚至完全不清楚，故称为黑箱模型。

在工程技术和现代化管理中，有时会遇到这样一类问题：由于因素众多、关系复杂以及观测困难等原因，人们也常常将它作为灰箱或黑箱模型问题来处理。

应该指出的是，这三者之间并没有严格的界限，而且随着科学技术的发展，情况也是不断变化的。

1.3.2.4 按照模型的表现特性分类

按照模型的表现特性可分为：

(1)确定性模型与随机性模型。两者区分在于：前者不考虑随机因素的影响，后者考虑了随机因素的影响。

(2)静态模型与动态模型。两者的区分在于：是否考虑时间因素引起的变化。

(3)离散模型与连续模型。两者的区分在于：描述系统状态的变量是离散的还是连续的。

1.4 数学建模对能力的培养

数学建模当然要用到数学知识，但却与以往所说的那种数学不同。它要用到计算机，甚至离不开计算机，但却不是纯粹的计算机技术；它涉及物理、化学、生物、医学、电子、军事、农业、管理等各学科、各领域的知识，但也不是这些学科和领域里的纯知识问题；它涉及各学科、各领域，但又不受任何一个具体的学科、领域的局限。它要用到各方面的综合知识，而且，建立数学模型不只是要有各方面的知识，还要有驾驭这些知识，应用这些知识来处理实际问题的能力。知识是无止境的，因此还必须有善于获得新的知识的能力。总之，数学建模既涉及各方面的综合知识，又涉及各方面的综合能力。它的特点就是综合，它的优点也就是综合。

因此，通过数学建模技术的学习和应用培养了学习和实践者以下的能力：

(1)洞察能力。建立数学模型时善于从实际工作提供的原型中抓住其数学本质。

(2)数学语言翻译能力。既能把实际问题用数学的语言表达，又能将数学推导和计算得到的结果用大众化的语言表述。

(3)综合应用能力。能将数学知识和其他学科的知识进行综合应用。

(4)抽象联想能力。对一些初看起来完全不同，但经过一定的简化抽象，可获得雷同的数学模型，培养了抽象思维和触类旁通的联想能力。

(5)自学和创新能力。在建立数学模型的全过程中，既学习到各种新知识、新技术，又掌握了对新知识和新技术实际应用的能力。同时建模得到的成果具有一定的创造性。

(6)团结协作能力。解决应用问题的建模成果需要多个数学与专业方面的研究者通力合作才能够完成，在此过程中团队作战至关重要。