全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材

高等工程数学

主编　姚仰新　罗家洪　庄楚强

华南理工大学出版社

全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材

高等工程数学

主 编　姚仰新　罗家洪　庄楚强

华南理工大学出版社
·广州·

内容简介

本书为“全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材”，根据教育部颁发的“工科研究生数学教学大纲”及有关工程硕士数学教学的要求而编写，内容涵盖矩阵理论、数值分析、数理统计的各个方面．根据工程硕士研究生的特点，突出实用性和针对性，尽量做到清晰简明，通俗易懂．

本书适合工程类硕士研究生使用．

图书在版编目（CIP）数据

高等工程数学/姚仰新，罗家洪，庄楚强主编．—广州：华南理工大学出版社，2007.2

全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材

ISBN 978-7-5623-2536-9

Ⅰ．高…　Ⅱ．①姚…　②罗…　③庄…　Ⅲ．①工程数学-研究生-教材　②高等数学-研究生-教材　Ⅳ．①TB11　②O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 012760 号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
营销部电话：020-87113487　87110964　87111048（传真）
E-mail：scutc13@scut.edu.cn　　http：//www.scutpress.com.cn

责任编辑：袁　泽

印 刷 者：广东省阳江市教育印务公司

开　　本：787mm×960mm　1/16　**印张**：27.25　**字数**：612 千

版　　次：2007 年 2 月第 1 版　2007 年 2 月第 1 次印刷

印　　数：1～3 000 册

定　　价：39.00 元

前　言

随着我国经济建设的发展,经济和工程技术等领域都需要应用型和复合型的高层次的工程技术与管理人员,工程硕士研究生的培养肩负着为社会输送人才的重任.《高等工程数学》是工程硕士研究生培养中的一门重要的数学基础课.它包括矩阵理论、数值分析和数理统计等课程的基本内容.本门课程的目的是以掌握和应用高等工程数学问题的数学方法为主导,使工程硕士生能掌握一定的数学理论基础,且具有比较宽广的数学知识面,能为今后的进一步学习和解决工作中所遇到的实际工程数学问题打下坚实的基础.

本书是根据全国工程硕士专业学位教育指导委员会制定的工程硕士研究生数学课程大纲的基本要求,参考国内外有关教材,结合我校工程数学的教学实际,经过整理修改后编写而成.在编写过程中,考虑到易于教学,力求做到精选内容,循序渐进,重点突出,使读者能够比较容易理解和掌握.书中配有难度适中的习题,以便读者通过练习加深对知识的理解和应用.

本书由姚仰新、罗家洪、庄楚强任主编,参加编写的人员还有付一平、方卫东、雷秀仁、梁满发、黄凤辉.

阅读本书需要读者具有高等数学、线性代数和概率论等课程的基础知识,读者在具备相关知识后能顺利地学习本课程.

本书的出版,得到全国工程硕士专业学位教育指导委员会、华南理工大学研究生院以及华南理工大学出版社的关心和大力支持.同时,特别感谢全国工程硕士专业学位教育指导委员会数学组组长陆君安教授对本书的编写给予的支持.对北京科技大学应用科学学院廖福成教授、西安交通大学凌永祥教授在百忙之中审阅书稿并给出了很好的建议表示衷心的感谢!

书中不妥之处,恳请读者批评指正.

编　者

2006年9月

目　录

第一篇　矩阵理论

第二篇 数值分析

第三篇　数理统计

第一篇　矩阵理论

近年来,矩阵理论在自然科学、工程技术、控制理论和社会经济学等领域的应用日趋深广.应用矩阵的理论和方法来解决工程技术和社会经济领域中的实际问题越来越普遍,越来越引起人们的重视.因此,矩阵理论成为工程硕士研究生工程数学教学中的重要组成部分.基于此,根据国家教育部课程指导委员会“工程硕士研究生关于矩阵理论课程的基本要求”编写了本部分的教学内容.

该篇主要讨论线性空间和线性变换、方阵的约当标准形、矩阵分析及其应用等内容.由于课时数的限制及学习对象实践性强的特点,本教材主要讲述矩阵的基本理论和基本方法,尽量做到清晰简明,通俗易懂.通过对本课程的学习,读者可以掌握矩阵的基本概念、基本理论和基本运算,了解若干特殊矩阵的标准形式及其基本性质,了解近代矩阵理论中十分活跃的若干分支,为今后在应用数学和计算数学的进一步学习和研究打下扎实的基础;使读者在大学工程线性代数知识的基础上,进一步深化和提高矩阵理论知识.本课程着重培养学生将所学的理论知识应用于本专业的实际问题和解决实际问题的能力.

第一章　线性空间与线性变换

§1.1　线性空间

在引入线性空间这一重要概念之前,我们首先要给出数域的概念.

如果复数的一个非空集合 P 含有非零的数,且其中任意两数的和、差、积、商(除数不为零)仍属于该集合,则称数集 P 为一个数域.容易验证,有理数集合 $\mathbf{Q}$、实数集合 $\mathbf{R}$ 和复数集合 $\mathbf{C}$ 都是数域,分别称为有理数域、实数域及复数域.又如集合

$$Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$$

也构成一数域,请读者加以验证.但是,由所有整数组成的集合 $\mathbf{Z}$ 是不构成数域的.

数域有一个简单性质,即所有的数域都包含有理数域.特别地,每个数域都包含整数 0 和 1.现在我们可以给出线性空间的定义了.

定义 1.1　设 V 是一个非空集合,P 是一数域.如果:

(1) 在集合 V 上定义了一个二元运算(通常称为加法),即是说,V 中任意两个元素 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 经过这个运算后所得到的结果,仍是集合 V 中的唯一确定的元素,该元素称为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的和,并记作 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

(2) 在数域 P 与集合 V 的元素之间还定义了一种运算,叫做数量乘法,即是说,对于 P 中任意数 λ 与 V 中任意元素 $\boldsymbol{x}$,经这一运算后所得到的结果仍为 V 中一个唯一确定的元素,称为 λ 与 $\boldsymbol{x}$ 的数量乘积,记作 $\lambda\boldsymbol{x}$.

(3) 上述两个运算满足下列八条规则:

1) 对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$;

2) 对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$, $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$;

3) V 中存在一个零元素,记作 $\boldsymbol{\theta}$,对任意 $\boldsymbol{x} \in V$,都有 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{x}$;

4) 任一 $\boldsymbol{x} \in V$,都有 $\boldsymbol{y} \in V$,使得 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\theta}$,元素 $\boldsymbol{y}$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 的负元素,记作 $-\boldsymbol{x}$;

5) 对任一 $\boldsymbol{x} \in V$,都有 $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$;

$$\left.\begin{array}{l} 6)\ \lambda(\mu\boldsymbol{x}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{x} \\ 7)\ (\lambda + \mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x} \\ 8)\ \lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y} \end{array}\right\} \text{对任何 } \lambda, \mu \in P, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V.$$

则集合 V 称为数域 P 上的线性空间或向量空间.V 中的元素常称为向量.V 中的零元素称为零向量.当 P 是实数域时,V 叫实线性空间;当 P 是复数域时,V 叫复线性空间.数域

P 上的线性空间有时简称为线性空间.

由定义可以证明:

线性空间 V 中的零向量是唯一的,V 中每个元素 $\boldsymbol{x}$ 的负元素也是唯一的,并且有

$$0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta},\quad \lambda\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta},\quad (-1)\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x},$$

这里 $\lambda\in P,\boldsymbol{x}\in V$,又 V 中元素的减法可以定义为(对任何 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$):

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{y}).$$

例 1.1 若 P 是数域,V 是分量属于 P 的 n 元有序数组的集合

$$V=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\mid\forall\,\xi_i\in P\}.$$

若对 V 中任两元素

$$\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\qquad \boldsymbol{y}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$$

及每个 $\lambda\in P$(记作 $\forall\lambda\in P$),定义加法及数量乘法为:

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n),$$

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\cdots,\lambda\xi_n),$$

则容易验证,集合 V 构成数域 P 上的线性空间,记为 $\boldsymbol{P}^n$.

例 1.2 所有元素属于数域 P 上的 $m\times n$ 矩阵组成的集合,按通常定义的矩阵加法及数与矩阵的数量乘法,也构成数域 P 上的一个线性空间,并把它记为 $\boldsymbol{P}^{m\times n}$.

例 1.3 若 n 为正整数,P 是数域,则系数属于 P 而未定元为 t 的所有次数小于 n 的多项式的集合,这个集合连同零多项式在内按通常多项式的加法及数与多项式的乘法,构成数域 P 上的线性空间.我们用 $\boldsymbol{P}[t]_n$ 代表这个空间.若把“次数小于 n 的”这一限制取消,则也得到一个线性空间,并记为 $\boldsymbol{P}[t]$.

例 1.4 所有定义在区间 $[a,b](a\leqslant t\leqslant b)$ 上的实值连续函数构成的集合,按照函数的加法及数与函数的乘法,显然构成实数域上一个线性空间,记为 $\boldsymbol{R}[a,b]$.

定义 1.2 设 V 是数域 P 上的线性空间,$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\cdots,\boldsymbol{v}$ 是 V 的一组向量,如果 P 中有一组不全为零的数 $\alpha,\beta,\cdots,\delta$,使得

$$\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}+\cdots+\delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\theta}\tag{1.1}$$

则称向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\cdots,\boldsymbol{v}$ 线性相关;若等式(1.1)当且仅当 $\alpha=\beta=\cdots=\delta=0$ 时才成立,则称这组向量是线性无关的.

由定义得知,如果向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\cdots,\boldsymbol{v}$ 线性相关,则使得等式(1.1)成立的数 $\alpha,\beta,\cdots,\delta$ 中至少有一个不等于零,比如 $\alpha\neq0$,则有

$$\boldsymbol{x}=-\frac{\beta}{\alpha}\boldsymbol{y}-\cdots-\frac{\delta}{\alpha}\boldsymbol{v}.$$

这时,我们说向量 $\boldsymbol{x}$ 是向量 $\boldsymbol{y},\cdots,\boldsymbol{v}$ 的线性组合.或者说,向量 $\boldsymbol{x}$ 可由 $\boldsymbol{y},\cdots,\boldsymbol{v}$ 线性表示出.

一般地说,一组向量(含有限个向量)线性相关时,则其中至少有一个向量可由组中其它向量线性表出;反过来,如果这组向量具有这一性质,则这组向量必定线性相关.但不难推知,线性无关的一组向量,其任一向量都不可能由组中其余向量线性表出.

定义 1.3　设 V 是数域 P 上的线性空间.如果 V 中存在一组向量,满足:

(1) 向量组线性无关;

(2) V 中任一向量可由向量组线性表示.

则称该组向量构成 V 中的组基.

若基中向量个数为 n,称 n 为 V 的维数,记作 $\dim V = n$.若基中向量个数不是有限数时,称 V 是无限维向量空间.本书主要讨论有限维线性空间.在 n 维线性空间中,其任意的 n 个线性无关向量都构成它的一组基.

定理 1.1　设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间,$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 V 的一组基,则 V 中任一向量 $\boldsymbol{x}$ 都可以表示为这组基的线性组合,且表示式是唯一的.

证明

由定义 1.3 知
$$\boldsymbol{x} = \xi_1\boldsymbol{e}_1 + \xi_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \xi_n\boldsymbol{e}_n \tag{1.2}$$

如果 $\boldsymbol{x}$ 还有另一表示:
$$\boldsymbol{x} = \eta_1\boldsymbol{e}_1 + \eta_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \eta_n\boldsymbol{e}_n \tag{1.3}$$

则由(1.2)、(1.3) 两式即得
$$(\xi_1 - \eta_1)\boldsymbol{e}_1 + (\xi_2 - \eta_2)\boldsymbol{e}_2 + \cdots + (\xi_n - \eta_n)\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{\theta}.$$

因基向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关,所以
$$\xi_1 - \eta_1 = 0,\quad \xi_2 - \eta_2 = 0,\quad \cdots,\quad \xi_n - \eta_n = 0.$$

从而有 $\xi_i = \eta_i(i = 1,2,\cdots,n)$,这证明了表示式的唯一性.

定理证毕.

表示式(1.2) 中的数$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 称为向量 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下的坐标.这定理说明,取定一组基后,每个向量 $\boldsymbol{x}$ 在这组基下的坐标是唯一确定的.$\boldsymbol{x}$ 的第 i 个坐标 $\xi_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 也称为 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量.

我们再来看看前述几个例子中线性空间 $\boldsymbol{P}^n,\boldsymbol{P}^{m\times n},\boldsymbol{P}[t]_n$ 的维数.

首先,容易证明
$$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,\cdots,0),\quad \boldsymbol{e}_2 = (0,1,\cdots,0),\quad \cdots,\quad \boldsymbol{e}_n = (0,0,\cdots,1)$$
是线性空间 $\boldsymbol{P}^n$ 的 n 个线性无关向量,又 $\boldsymbol{P}^n$ 中任一向量
$$\boldsymbol{x} = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$$
都可由这 n 个线性无关向量线性表出:
$$\boldsymbol{x} = \xi_1\boldsymbol{e}_1 + \xi_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \xi_n\boldsymbol{e}_n,$$
从而得知 $\boldsymbol{P}^n$ 是 n 维线性空间,今后用得较多的是 $\mathbf{R}^n$ 及 $\mathbf{C}^n$.

再考察线性空间 $\boldsymbol{P}^{m\times n}$,若用 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 表示第 i 行,第 j 列上的元素等于 1 而其它元素均等于零的 $m\times n$ 矩阵,则下列的 mn 个矩阵
$$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\cdots,\boldsymbol{E}_{ij},\cdots,\boldsymbol{E}_{mn}\quad(i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n)$$
构成 $\boldsymbol{P}^{m\times n}$ 的一组基.故 $\boldsymbol{P}^{m\times n}$ 是 mn 维线性空间.今后用得较多的是 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 及 $\mathbf{C}^{m\times n}$,包括它们当 $m = n$ 时的特殊情况.

最后，由于 $1,t,t^2,\cdots,t^{n-1}$ 是 $\boldsymbol{P}[t]_n$ 的一组基，故 $\boldsymbol{P}[t]_n$ 是 n 维线性空间.

§1.2　基变换与坐标变换

设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 及 $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\cdots,\boldsymbol{e}_n'$ 是 V 的两组基. 假设这两组基的关系为

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{e}_2' = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{e}_n \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \boldsymbol{e}_n' = a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{cases} \tag{1.4}$$

写成矩阵形式记为

$$(\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\cdots,\boldsymbol{e}_n') = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{A} \tag{1.5}$$

我们把矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称为从基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 到 $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\cdots,\boldsymbol{e}_n'$ 基的过渡矩阵.

关于形式矩阵乘法，容易验证有以下性质：

$$\begin{cases} (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{B} \\ (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)(\boldsymbol{AB}) = ((\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} \end{cases}$$

亦即形式矩阵也满足矩阵的运算性质，只不过数与向量的“乘积”是数乘. 后面内积空间也会用到形式矩阵的记号及运算.

现设 $\boldsymbol{x}$ 为 V 中任一向量，且在此二组基下其表示式为：

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \boldsymbol{e}_k = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i' \boldsymbol{e}_i' = (\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\cdots,\boldsymbol{e}_n')\begin{pmatrix} \xi_1' \\ \vdots \\ \xi_n' \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

下面要研究向量 $\boldsymbol{x}$ 在基变换下，其坐标的变化规律.

由于基向量线性无关，并利用齐次线性方程只有零解的条件，便可证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的. 由(1.7)式和(1.5)式可得

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i' e_i' = (e_1', e_2', \cdots, e_n') \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \vdots \\ \xi_n' \end{pmatrix} = (e_1, e_2, \cdots, e_n) A \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \vdots \\ \xi_n' \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

由于 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性无关,(1.6)、(1.8) 两式右边 e_k 的系数应相等,亦即

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \vdots \\ \xi_n' \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

从而又有

$$\begin{bmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \vdots \\ \xi_n' \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

(1.9)、(1.10) 两式给出了基变换(1.5) 式下向量 x 的坐标变换公式.

§1.3　子空间与维数定理

线性空间有些性质需用子空间的性质来表达,所以研究线性空间的子空间是必要的.

定义 1.4　设 V 是数域P 上的线性空间,W 是V 的一个非空子集.如果 W 对于线性空间 V 所定义的加法运算及数量乘法运算,也构成数域 P 上的线性空间,则称 W 为V 的线性子空间,简称子空间.

定理 1.2　设 W 是数域P 上线性空间V 的非空子集,则 W 是V 的线性子空间的充要条件是:

(1) 若 $x, y \in W$,则 $x + y \in W$;

(2) 若 $x \in W, \lambda \in P$,则 $\lambda x \in W$.

换言之,线性空间 V 的非空子集W 是子空间的充要条件,W 关于V 中定义的两个运算是“封闭”的.

证明　条件的必要性是显然的,因为当 W 为 V 的子空间时,由定义 1.4 即知条件(1) 与(2) 自然是满足的.反过来,若定理 1.2 的两个条件已满足,则可推出零向量 $\theta \in W$(取 $\lambda = 0$ 并利用条件(2));又当 $x \in W$ 时,取 $\lambda = -1$ 便可以从条件(2) 推出 $-x \in W$.至于线性空间定义中的其它运算“规则”,由于对 V 中所有元素都成立,当然对子集 W 的元素也能成立.所以定理中的条件也是充分的.证毕.

例 1.5　在 n 维线性空间 P^n 中,子集

$$W = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n\}$$

构成 $\boldsymbol{P}^n$ 的一个 $n-r$ 维子空间，r 是 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{P}^{m\times n}$ 的秩.

例 1.6　设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 是数域 P 上线性空间 V 的 m 个向量，则这组向量的所有形如

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{x}_m \qquad (\lambda_i \in P)$$

的线性组合构成的集合非空，且对 V 中的加法及数量乘法皆封闭，故形成 V 的一个子空间，称为由这组向量生成的子空间，并记为 $L(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m)$.

定理 1.3　设 V_1, V_2 是数域 P 上线性空间 V 的两个子空间，则它们的交 $W = V_1 \cap V_2$ 也是 V 的子空间.

证明　由于每个子空间都包含零向量，所以零向量必定属于这两个子空间的交，即 W 不会是空集.

现在取 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$，则 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_i$，而 V_i 是子空间，所以 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V_i (i = 1,2)$，从而 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$.

又对任一 $\lambda \in P$ 及任一 $\boldsymbol{x} \in W$，则又有

$$\lambda \boldsymbol{x} \in V_i \quad (i = 1,2),$$

从而 $\lambda \boldsymbol{x} \in W$. 定理证毕.

定理 1.4　设 V_1, V_2 是数域 P 上线性空间 V 的两个子空间. 则它们的和

$$V_1 + V_2 = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in V_1, \boldsymbol{y} \in V_2\}$$

也是 V 的子空间.

证明　首先 $V_1 + V_2$ 不是空集，因为零向量属于 V_1 及 V_2，且 $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \in V_1 + V_2$. 其次，如果 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 是 $V_1 + V_2$ 中的任意两个向量，且设

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2,$$

这里 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V_1, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in V_2$. 由于 V_1, V_2 是子空间，故

$$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in V_1, \quad \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \in V_2,$$

从而

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) + (\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) \in V_1 + V_2.$$

同样地，对任一 $\lambda \in P$，则有

$$\lambda \boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{x}_1 + \lambda \boldsymbol{y}_1 \in V_1 + V_2,$$

即 $V_1 + V_2$ 是 V 的子空间. 定理证毕.

例 1.7　$L(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_s) + L(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_t) = L(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_t)$

下面讨论子空间的交与和的维数. 线性空间的维数常记为 $\dim(V)$ 或 $\dim V$.

定理 1.5(维数公式)　设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，V_1, V_2 是它的两个子空间，则有维数公式：

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2),$$

或写作

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2).$$

证明　假设

$$\dim V_1=r,\ \dim V_2=s,\ \dim(V_1+V_2)=k,$$
$$\dim(V_1\cap V_2)=t.$$

现在 $V_1\cap V_2$ 中选取一组基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_t$,并扩充它,使 r 个线性无关向量

$$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_t,\boldsymbol{e}_{t+1}',\cdots,\boldsymbol{e}_r'$$

成为 V_1 的一组基;同样地,使 s 个线性无关向量

$$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_t,\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_s$$

成为 V_2 的一组基.

如能证明

$$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_t,\boldsymbol{e}_{t+1}',\cdots,\boldsymbol{e}_r',\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_s \tag{1.11}$$

为 V_1+V_2 的一组基,那就有

$$\dim(V_1+V_2)=r+s-t.$$

从而定理便得证.

首先证明 V_1+V_2 中任一向量可由(1.11)式线性表出.为此,任取 $\boldsymbol{u}\in V_1+V_2$,则有 $\boldsymbol{x}\in V_1$ 及 $\boldsymbol{y}\in V_2$,使得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}&=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\\&=(\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+\lambda_t\boldsymbol{e}_t+\mu_{t+1}\boldsymbol{e}_{t+1}'+\cdots+\mu_r\boldsymbol{e}_r')+(\lambda_1'\boldsymbol{e}_1+\cdots+\lambda_t'\boldsymbol{e}_t+\gamma_{t+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}+\cdots\\&\quad+\gamma_s\boldsymbol{\varepsilon}_s)\\&=(\lambda_1+\lambda_1')\boldsymbol{e}_1+\cdots+(\lambda_t+\lambda_t')\boldsymbol{e}_t+\mu_{t+1}\boldsymbol{e}_{t+1}'+\cdots+\mu_r\boldsymbol{e}_r'+\gamma_{t+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}+\cdots+\gamma_s\boldsymbol{\varepsilon}_s,\end{aligned}$$

亦即 $\boldsymbol{u}$ 可由向量组(1.11)线性表出.

现在再来证明向量组(1.11)是线性无关的.事实上,如果有

$$\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+\lambda_t\boldsymbol{e}_t+\mu_{t+1}\boldsymbol{e}_{t+1}'+\cdots+\mu_r\boldsymbol{e}_r'+\gamma_{t+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}+\cdots+\gamma_s\boldsymbol{\varepsilon}_s=\boldsymbol{\theta},$$

则可得

$$\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+\lambda_t\boldsymbol{e}_t+\mu_{t+1}\boldsymbol{e}_{t+1}'+\cdots+\mu_r\boldsymbol{e}_r'=-\gamma_{t+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}-\cdots-\gamma_s\boldsymbol{\varepsilon}_s \tag{1.12}$$

这等式左边确定了一个属于 V_1 的向量 $\boldsymbol{v}$,而由右边又可见 $\boldsymbol{v}$ 亦属于V_2,从而 $\boldsymbol{v}\in V_1\cap V_2$,故 $\boldsymbol{v}$ 可由 $V_1\cap V_2$ 的基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_t$ 线性表示:

$$\boldsymbol{v}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_t\boldsymbol{e}_t \tag{1.13}$$

由(1.12)、(1.13)两式得

$$a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_t\boldsymbol{e}_t+\gamma_{t+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}+\cdots+\gamma_s\boldsymbol{\varepsilon}_s=\boldsymbol{\theta},$$

由此即得

$$a_1=\cdots=a_t=\gamma_{t+1}=\cdots=\gamma_s=0 \tag{1.14}$$

代入(1.13)式即得 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\theta}$.再应用(1.12)式且因基向量线性无关,于是又得