继续教育（函授）专科公共课系列教材

微积分基础

上

孙淑珍　潘志　编

Wei jifen Jichu

中国电力出版社
www.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书根据继续教育（函授）专科学生以自学为主的特点，本着由浅入深、循序渐进、通俗易懂、重点突出、难点分散、范例较多的原则，各个章节配有一定数量的习题，为了检验学生的学习效果还配备了自测题。有些经典范例具有一定的难度，对于那些有志深造的成人学员也有一定的参考价值。

本书分上、下册出版。上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用等七章，书末附有几种常见的曲线图、积分表和习题参考答案与提示。

本书力求用通俗的语言和实际背景使学生理解其真正意义，是继续教育（函授）专科学生的教材，也可作为各成人教育和自考学生的自学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

微积分基础．上/孙淑珍主编．—北京：中国电力出版社，2005

（继续教育（函授）专科公共课系列教材）

ISBN 7-5083-3335-7

Ⅰ．微…　Ⅱ．孙…　Ⅲ．微积分-函授大学-教材　Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 028711 号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路 6 号　100044　http://www.cepp.com.cn）

北京同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2005 年 5 月第一版　2005 年 5 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米　16 开本　17.25 印张　391 千字

印数 0001—4000 册　定价 **25.00** 元

前言

《微积分基础》是继续教育（函授）专科各专业的公共基础课，本书是按照教育部颁布的有关教学大纲编写，体现了各专科专业在微积分方面所必须具备的基本知识和基本能力的要求。并根据成人教育的特点，其选材在符合科学性，系统性的基础上，恰当地把握了内容的广度和深度，力求做到深入浅出，重点突出，尽可能用通俗的语言和实际背景使学生理解其真正意义。

本书每一节都附有适量的习题，书后有全部习题答案。书中还有阶段自测题，使学生能适时检测自己的学习情况，找出不足之处以便更好地掌握全书内容。

本书上册主编孙淑珍教授、副主编潘志副教授。上册分七章，其中第一章由孙淑珍编写，第二章由张可铭编写，第三、七章由公静编写，第四章由潘志编写，第五、六章由刘世普编写。

下册主编张希荣教授、副主编彭武安副教授。共分五章，第八章由张可铭编写，第九章由张希荣编写，第十章由彭武安编写，第十一章由张希荣和张可铭编写，第十二章由麻娜编写。

全书由中国人民大学朱来义教授主审，在此我们对他提出的宝贵意见表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，加之成书时间略显仓促，全书难免有错误和不妥之处，希望读者不吝指正。

编　者

目录

第一章

函　数

函数是微积分（高等数学）研究的主要对象，本章对函数的概念和各种属性、初等函数和非初等函数都作了比较详尽而浅显的论述。在高等数学课程中，函数中的自变量和因变量都是实数，研究函数，包括函数定义和性质，特别是研究函数的变化趋势都涉及实数集的性质，所以学习微积分必须掌握有关实数理论中那些最基本的内容。另外，本章还叙述了平面上的直线方程式，因为微积分的抽象概念和原理需要用直观的几何图形加以解释和表现。直观的几何图形还可以作为辅助工具，帮助读者更好地分析、解决问题。可以认为本章内容是学习高等数学课程的必要的准备知识。

第一节　实　数

一、集合

一个集合 S 是某些个体的总和，这些个体或者符合某种规定，或者具有某些可以识别的属性。集合 S 中的每一个体称为S 的元素，如果 α 是S 的一个元素，记为 $\alpha \in S$，读作"α 属于S"；如果 α 不是S 的元素，则记为 $\alpha \notin S$，读作"α 不属于S"。

一般情况下，集合有两种表示方法，这两种表示方法可以通过下面的例子来说明。

例 1-1　考察由元素 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 组成的集合 S，可以将其表示为

$$S=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

这种表示集合的方法，即将集合 S 中的所有元素都列举出来，称为列举法。

集合 S 也可以表示为

$$S=\{n \mid n \text{ 是小于 10 的非负整数}\}$$

在这里我们用"n 是小于 10 的非负整数"这个命题来描述集合 S 中所有元素 n 的属性，这种表示集合的方法，称为描述法。

在数学中经常用描述法表示一个集合，即用$\{x \mid p(x)\}$表示所有满足命题 $p(x)$的实数 x 组成的集合，例如，$\{x \mid x^2+1=2\}$ 表示所有满足等式 $x^2+1=2$ 的实数 x 构成的集合；$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 表示所有满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数x 构成的集合。

现在考察下面集合：

$$A=\{1,2\} \qquad B=\{1,2,3,4\}$$

可以看出，A 中的每一个元素都属于B。一般情形，如果集合 A 中的所有元素都属于集合B，则称 A 包含于B，并且记作 $A \subset B$。例如：

$$\{2\} \subset \{1,2\} \quad \{3,5\} \subset \{1,2,3,4,5\} \qquad (0,1) \subset [0,1]$$

当 $A \subset B$ 时，称 A 是 B 的一个子集。

空集是不包含任何元素的集合，空集的记号是 ϕ。例如，在实数范围内，集合 $\{x \mid x^2+1=0\}$ 就是空集，空集是任何一个集合 S 的子集。

设 A，B 是两个集合，由这两个集合中的所有元素组成的集合称为 A 和 B 的并集，记作 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

A 和 B 的所有公共元素构成的集合称为 A 和 B 的交集，记作 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

例如，$\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{1, 3, 5\}$$

二、实数

高等数学课程主要是在实数范围内讨论问题，因此，需要对于实数和实数集有足够的认识。

数轴是研究实数的重要工具，有关实数的许多性质，都可以通过数轴直观地表现出来，下面首先建立数轴的概念。

在一条直线上取定一点，记作 O，称其为原点；取直线的一个方向为正向，并用箭头表示；再取一个单位长度，就可以构成数轴。数轴上的任意一个点 P，都对应于一个实数 x，这个实数 x 是这样确定的：假定 P 点与原点 O 重合，则 $x=0$。假定点 P 不与原点 O 重合，用 $|OP|$ 表示线段 OP 的长度，如果点 P 位于原点的右侧（正向），则取 $x=|OP|$；如果点 P 位于原点的左侧，则取 $x=-|OP|$。反之，任何一个实数 x，都可以在数轴上找到一个点 P，使得点 P 所对应的实数为 x。这样一来，数轴上的点就与全体实数建立了一一对应的关系（见图 1-1）。

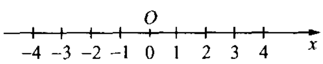

图 1-1

数轴也称为实数系的坐标系，数轴上与点 P 所对应的实数 x 称为 P 的坐标。图 1-2 标出了坐标为实数 $\sqrt{2}$，π，$-\pi$ 的点。

人们对于数的认识是逐步发展的，首先认识的是正整数 1，2，3，…和整数 0，±1，±2，…，然后是有理数，再后来是无理数。

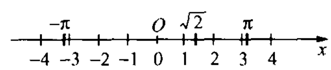

图 1-2

通常，用 N 表示所有非负整数构成的集合；Z 表示全体整数组成的集合；Q 表示全体有理数组成的集合。在数轴上，与有理数对应的点称为有理点。

有理数集包括所有整数与分数 $\frac{p}{q}$（其中 p，q 为整数，$q \neq 0$）。在有理数集中定义了四则运算（除数不等于零），有理数集对于四则运算是封闭的。也就是说，对于有理数进行有限次加、减、乘、除法运算（零不能作为除数）得到的结果仍然是有理数。

此外，有理数集 Q 还有两个重要的性质：一是有序性，即有理数集 Q 是一个有序集，在数轴上，所有的有理点是按照从小到大的顺序自左至右排列的；二是稠密性，即任

意两个有理数之间都有无穷多个有理数，有理数在数轴上是处处稠密的，即任意一个非空的开区间内都有无穷多个有理点。

虽然有理点在数轴上是处处稠密的，但是它们不能充满整个实轴。例如，设边长为 1 的正方形的对角线长是 a，则 $a^2=2$。以数轴上的原点为圆心、a 为半径作圆，则圆周与实轴的交点就不是有理点（见图 1-3）。实际上，我们已经知道这个点是无理数$\sqrt{2}$。于是，在数轴上除了有理点之外还有许多空隙，这些空隙的点称为无理点。无理点所代表的数称为无理数，所有无理数构成的集合称为无理数集。

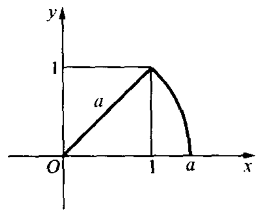

图 1-3

每个有理数可以表示为一个有限小数，或者一个无限循环小数；每个无理数可以表示为一个无限不循环小数，但是经常用有限小数作为无理数的近似值，例如$\sqrt{2}\approx 1.4142136$，$\pi\approx 3.1415927$ 等。

有理数和无理数统称为实数，所有实数构成的集合称为实数集，全体实数构成的集合记作 R。数轴上的点与实数之间是一一对应的关系，因此通常将实数 x 与数轴上坐标为 x 的点不加区分。例如，实数 x 也称为点 x，反之亦然。

在实数集中定义了四则运算，而且实数集对于四则运算也是封闭的，实数集同样具备有序性和稠密性。除此之外，实数集还有另外一个重要性质，即实数集的连续性。实数集与数轴上的点是一一对应的，如果一个点在数轴上连续运动，那么，它经过的每一个位置都代表一个实数。有理数集不具备这个性质。

三、实数的绝对值

对于任意一个实数 x，它的绝对值为

$$|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

绝对值$|x|$有明显的几何意义，实数 x 的绝对值$|x|$等于数轴上的点 x 到原点的距离。

绝对值有如下性质：（以下 x，y 为任意实数）

(1) $|x|=\sqrt{x^2}$

(2) $|x|\geqslant 0$，仅当 $x=0$ 时，$|x|=0$

(3) $|x|\leqslant a \Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a$

(4) $|-x|=|x|$

(5) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$

(6) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$

(7) $||x|-|y||\leqslant |x-y|$

(8) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$

(9) $\left|\dfrac{y}{x}\right|=\dfrac{|y|}{|x|}\quad (x\neq 0)$

性质（1）～（5）可以由绝对值的定义直接得到。下面仅证明性质（6）和性质（7），其他留给读者。

性质（6）的证明：由性质（5），有如下不等式

$$-|x|\leqslant x\leqslant|x|,\quad -|y|\leqslant y\leqslant|y|$$

将上述两式相加，由性质（3）就得到

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|$$

于是有

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|$$

性质（7）的证明：注意到$x=(x+y)-y$,在性质(6)中用 $x-y$ 取代x,可以得到

$$|x|\leqslant|x-y|+|y|$$

即

$$|x|-|y|\leqslant|x-y| \tag{1-1}$$

用同样的方法又可以得到

$$|y|-|x|\leqslant|x-y| \tag{1-2}$$

联合式(1－1)和式(1－2)，就得到性质（7）。

四、若干常见实数集

今后我们经常要考虑实数集 R 的子集，接触最多的是各种区间，它们是：

开区间：$(a,b)=\{x|a<x<b\}$

闭区间：$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$

半开半闭区间：$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\},(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$

无穷区间：$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\},(a,+\infty)=\{x|x>a\}$

$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=R$

通常用大写英文字母 I 表示区间。

例 1－2 利用区间表示集合 $S=\{x|x^2+x-12>0\}$。

解 对 x^2+x-12 进行因式分解，则不等式有等价形式：

$$(x-3)(x+4)>0$$

不等式左端是两个因子的乘积，为了使这个乘积为正数，必须且只需使它们的符号相同，即：或者$(x-3)>0$，$(x+4)>0$，或者$(x-3)<0$，$(x+4)<0$。也即：或者 $x>3$，$x>-4$同时成立，或者 $x<3$，$x<-4$ 同时成立。前一种情形意味着$x\in(3,+\infty)$，后一种情形意味着$x\in(-\infty,-4)$。也就是说，不论 $x\in(3,+\infty)$，还是 $x\in(-\infty,-4)$,都满足不等式 $x^2+x-12>0$。因此有

$$S=\{x|x^2+x-12>0\}=(-\infty,-4)\cup(3,+\infty)$$

设 S 为一个非空数集，如果存在正数 M，使得对于所有的 $x\in S$，都有$|x|\leqslant M$，则称 S 为有界集。

集合 A 中如果有最大的数b，则称 b 为A 的最大值。A 的最大值记作 $\max A$。集合 A 中如果有最小的数c，则称 c 为A 的最小值。A 的最小值记作 $\min A$。

例如，闭区间$[a,b]$和开区间(a,b)都是有界集。闭区间$[a,b]$的最小值和最大值分别是 a 和b，而开区间(a,b)既无最大值，也无最小值，这说明，有界数集未必有最大值和最小值。

五、平面上的点

在平面上作两条互相垂直的直线 Ox 和 Oy 交于 O 点，每条直线当作一条实轴，原点都在点 O 处，并且两条实轴的单位相等。这样就构成平面上的一个直角坐标系 xOy，其中水平轴称为 x 轴或者横轴，竖直轴称为 y 轴或者纵轴。设 M 是平面上任意一点，自点 M 分别向 x 轴和 y 轴引垂线，得到两个垂足 P 和 Q。由于 P 和 Q 都是实轴上的点，它们分别惟一地对应实数 x 和 y（见图 1－4）。

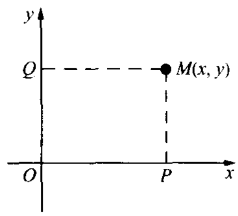

图 1－4

这就是说，平面上每一点 M 都惟一地对应一个有序实数组 (x,y)，其中实数 x 称为点 M 的横坐标，实数 y 称为点 M 的纵坐标。反之任意给定一个有序实数组 (x,y)，可以在平面上找到一个点 M，使得 M 的横坐标和纵坐标分别为 x 和 y。点 M 可以这样求出：设 P 是横轴上代表实数 x 的点，Q 是纵轴上代表实数 y 的点，过点 P 和 Q 分别作横轴和纵轴的垂线，两条垂线相交于点 M，则 M 就是以 x 和 y 为横坐标和纵坐标的点。这样的点 M 是惟一的。因此，在建立了直角坐标系之后，平面上的点 M 与有序实数组 (x,y) 之间建立了一一对应的关系。平面上的任何一个点 M 都可以惟一地用一个有序实数组 (x,y) 来表示；反之，任一个有序实数组 (x,y) 都惟一地表示平面上的一个点 M。点 M 对应的有序实数组 (x,y) 称为点 M 的坐标。x 轴将平面分成上下两半。x 轴以上的部分称为上半平面，x 轴以下的部分称为下半平面。同样，y 轴将平面分成左右两半，y 轴以左的部分称为左半平面，y 轴以右的部分称为右半平面。两个坐标轴又将平面分成四个象限。由右上角按逆时针方向旋转，分别称为第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ象限（见图 1－5）。

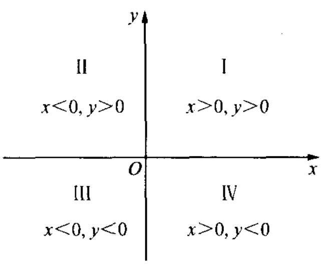

图 1－5

设 P 和 Q 是平面上两点，称连接两点的线段 PQ 的长度为两点之间的距离。用 $d(P,Q)$ 表示 P 和 Q 之间的距离。如果点 P 和 Q 的坐标分别为 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2)，则有

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

例 1－3 求点 $A(3,-4)$ 到点 $B(-2,3)$ 的距离；求任一点 $M(x,y)$ 到原点 $O(0,0)$ 的距离。

解 点 $A(3,-4)$ 到点 $B(-2,3)$ 的距离为

$$d(A,B)=\sqrt{[3-(-2)]^2+[(-4)-3]^2}=\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{74}$$

点 $M(x,y)$ 到原点 $O(0,0)$ 的距离为

$$d(M,O)=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

六、平面上的直线

平面上任意一条直线 l，如果它不与 y 轴平行，则该直线的方程一定是

$$y=mx+b \tag{1-3}$$

其中 m 是它的斜率，b 是直线在 y 上的截距，即直线 l 通过平面上的点 $(0,b)$（见图 1－6）。如果直线 l 与 y 轴平行，则该直线的方程是 $x=a$（见图 1－7）。

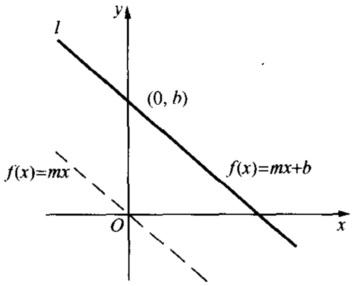

图 1－6

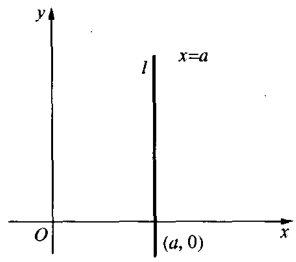

图 1－7

直线 l 的斜率 m 等于该直线与 x 轴正向夹角的正切，斜率 m 可以用如下方法求得：

在直线上任意取两个点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$，并记

$\Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1$ 则 $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$（见图 1－8）。

竖直直线（即直线与 y 轴平行）没有斜率。

如果已知直线 l 通过一点 (x_0,y_0) 并且它的斜率为 m，则该直线的方程就是

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

在方程(1－3)中，如果 $b=0$，则 $y=mx$ 的图像是 xOy 平面上通过原点的一条直线，其斜率等于 m。图 1－9 画出了有不同斜率的直线。

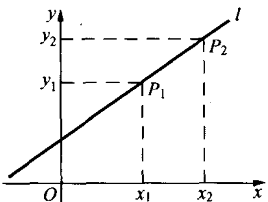

图 1－8

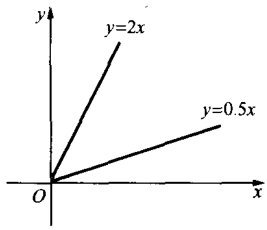

图 1－9

与直线 $y = mx + b$ 垂直的直线，其斜率等于 $-\dfrac{1}{m}$ $(m \neq 0)$。因此，如果已知某直线通过点 (x_0,y_0) 并且与直线 $y=mx+b$ 垂直，则它的方程为

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$$

七、邻域

今后会经常提到“邻域”这样一个术语。设 δ 是任意一个正数，集合 $\{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$ 就是点 x_0 的一个邻域。这是一个以点 x_0 为中心，以 δ 为半径的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$；这个集合中所有的点 x 与 x_0 的距离都小于 δ。

如果在邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中除去点 x_0，则得到集合 $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$，称这个集合为 x_0 的一个去心邻域，它是两个开区间的并集：$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$。

今后如果说到点 x_0 的一个邻域，就是指某个开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$；如果说到点 x_0 的一个去心邻域，就是指某个 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$，其中 δ 是某个确定的正数，但有时没有必要指出这个正数 δ 的具体数值。

习题1-1

1. 用区间表示下列不等式的解集合（其中 x_0 为常数，δ 为正数）：

(1) $|x|\geqslant 3$　　(2) $\left|5-\frac{1}{x}\right|<1$

(3) $x^2-6\leqslant 0$　　(4) $x^2-x-6>0$

2. 下列数集中哪些有界？

(1) 自然数集　　(2) 整数集

(3) $A=\left\{\frac{1}{x}\,\middle|\,1\leqslant x<+\infty\right\}$　$B=\left\{\frac{1}{x}\,\middle|\,0<x<1\right\}$

(4) 介于0和1之间的所有无理数集合

3. 在平面上标出下列各组点，并求它们之间的距离。

(1) $P_1(3,-4),P_2(-3,1)$　　(2) $P_1(-5,2),P_2(6,-5)$

(3) $P_1(0,-4),P_2(7,0)$　　(4) $P_1(7,2),P_2(6,-4)$

4. 按照下列直线 l 的斜率 m 和 l 通过的点 $P(x_0,y_0)$ 写出 l 的方程，并求 l 与两个坐标轴的交点。

(1) $m=2,P(-2,3)$　　(2) $m=-\frac{2}{3},P(1,-1)$

(3) $m=-3,P(3,-2)$　　(4) $m=\frac{1}{4},P(1,3)$

5. 已知直线 l 经过下列给出的两个点，请写出 l 的方程式。

(1) $(-3,4)$和$(2,5)$　　(2) $(2,-1)$和$(1,4)$

(3) $(-4,0)$和$(0,5)$　　(4) $(6,1)$和$(-2,5)$

6. 求下列直线斜率及与两坐标轴的交点。

(1) $y=-2x$　　(2) $y=2x+3$

(3) $y=-3x-4$　　(4) $x-2y=2$

(5) $2x+3y+1=0$　　(6) $y=3$

(7) $x=-2$　　(8) $x+y=2$

7. 已知直线 l 的方程为 $2x+y=1$，求满足下列要求的直线。

(1) 过原点且与 l 垂直。

(2) 过点$(3,2)$且与 l 垂直。

(3) 过原点且与 l 平行。

(4) 过点$(3,2)$且与 l 平行。

第二节　函数的定义与性质

一、函数概念

在研究自然的、社会的以及工程技术的某个过程时，经常会遇到各种不同的量。例如

时间、速度、质量、温度、成本和利润等。这些量一般可以分成两类，其中一类量在所研究过程中保持不变，这样的量称为常量。另一类量在所研究的过程中是变化的，这样的量称为变量。

例如在自由落体过程中，物体垂直下落的距离与时间的关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中 t 为时间，g 为重力加速度。在这个过程中，时间 t 和距离 s 为变量，重力加速度 g 为常量，但严格地说，g 也应当是一个变量。因为，每点的重力加速度 g 与该点所处位置和地心距离有关。然而，如果在一个运动过程中，物体垂直下落的距离不是很大，那么重力加速度 g 的变化就很小，因而可以近似地看作常数。

在同一个过程中，往往有几个变量同时变化，且它们的变化不是孤立的，是按照一定的规律互相联系着的。其中一个量的变化会引起另一个量变化，当前者的值确定时，后者的值按照某种关系亦随之而定。下面要介绍的函数概念，其本质就是变量之间的互相依赖关系。

函数是最重要的数学概念之一，也是高等数学课程研究的主要对象。可以这样说，整个高等数学课程的主要内容就是研究各类函数（包括初等函数和非初等函数、显函数与隐函数等）的各种性质，特别是函数的分析性质，例如函数的导数和积分等。

人们对函数的认识是随着科学技术的发展以及对客观世界的认识而不断深化的。17世纪人们所理解的函数，基本上就是曲线。直到18世纪，占统治地位的思想仍然认为函数是用一个公式表示的。这样的认识基本上局限于初等函数。然而，随着人们对于客观世界的认识不断深入，不断地出现新的类型的函数。数学家们必须为函数下一个一般的定义，这样的定义应当包括人们已知的所有类型的函数。不论是对于数学的理论，还是对于数学的应用，这都是一件非常重要的事情。数学家们为此探索了几个世纪，直至1837年，德国数学家狄里克雷（1805～1859）才对于函数给出了一个与现在十分接近的定义。他说：如果对于给定区间上的第一个 x 的值，有惟一的 y 值与其对应，则 y 就是 x 的一个函数。狄里克雷还强调指出，在整个区间上，y 是否按一种或多种规律依赖于 x，以及 y 依赖于 x 的方式能否用数学表达式来表达，都是无关紧要的。

对于一个自变量的函数（即一元函数），可以给出下述定义。

定义 1-1　设 D 为一实数集。如果按照某种确定的法则（或关系）f，对于每个 $x\in D$，都有惟一的一个实数 y 与其对应，则称这个对应关系 f 为定义在 D 上的函数，记为 $y=f(x),x\in D$。

称 x 为自变量，y 为因变量，$f(x)$是当自变量为 x 时这个函数的函数值，自变量 x 的取值范围 D 为函数 f 的定义域。当自变量 x 在定义域 D 上变化时，函数值 $y=f(x)$全体构成的集合称为函数 f 的值域。

按照上述定义，f 与 $f(x)$的含义是有区别的。f 表示自变量与因变量的对应关系（或法则）；而 $f(x)$则是与自变量 x 对应的函数值，因此，对于任意的 x，$f(x)$是一个实数。但是，出于叙述的方便，有时也将 $f(x)$说成是函数。在一个问题中，$f(x)$到底是指一个函

数，还是指一个函数值？它的具体含义，可以结合上下文理解。

如果 x_0 是一个确定的点（即事先指明的点），则 $f(x_0)$ 表示当自变量 x 等于 x_0 时的函数值，如果用 y 表示因变量[即 $y=f(x)$]，也可以用 $y(x_0)$ 或者 $y|_{x=x_0}$ 表示 $f(x_0)$。

由函数定义可以看出，函数关系和定义域是函数的两个要素。在描述任何一个函数时，必须同时说明这两个要素。

例如指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$，$[x\in(-\infty,+\infty)]$，这里 $y=a^x$ 表示自变量与因变量的对应关系(或法则)，而 $f(x)=a^x$ 这个函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$。

又如对数函数 $y=\log_a x\,(x>0)$，这里 $\log_a x$ 表示对应关系(或法则)，这个函数的定义域是 $(0,+\infty)$。为什么对数函数的定义域是 $(0,+\infty)$ 呢？这是因为只有当 $x>0$ 时，对数运算才有意义。

例 1－4　研究 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是否为同一函数。

解　$y=x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 而 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$。因此，虽然这两个函数在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的值是相同的，但由于它们的定义域不相同，因而不是同一函数。

例 1－5　研究 $y=\cos x$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$ 是否为同一函数。

解　注意到 $\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$，所以，当

$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\,(k\in Z)$ 时，有

$$\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x$$

当 $(2k+1)\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}\,(k\in Z)$ 时，有

$$\sqrt{1-\sin^2 x}=-\cos x$$

因此只有当 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\,(k\in Z)$ 时，两个函数的值才相等。这就是说，虽然它们的定义域都为 $(-\infty,+\infty)$，但由于它们的对应法则不相同，因而不是同一函数。

函数的表示方法一般有三种：图形法、表格法和公式法。

下面用三个例子说明。

例 1－6　气象站用自动温度仪记录一昼夜中温度变化情况。温度记录仪在坐标纸上描出一条反映温度变化的曲线(见图 1－10)。图中的横坐标是时间 t(h)；纵坐标是温度 T(℃)，图 1－10 中的曲线反映了一昼夜中的温度随时间变化的情况。温度 T 是时间 t 的函数。对于一昼夜中的每个时间 t(h)，都可以在曲线上查到这个时刻的温度。这种用图形表示函数关系的方法称为图形法。

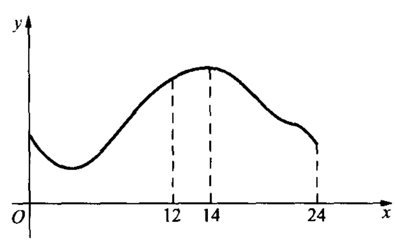

图 1－10

例 1－7　一块钢坯从温度为 1000℃ 的炉中取出后，放入温度为 0℃ 的冷水中进行冷

却，每隔一分钟测量一次钢坯的温度，测得到的数据如表 1－1 所示。

表 1－1

时间（分）	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
温度（℃）	607	367	223	135	82	50	30	18	11	6	3.5	2.5	1.8	1.3	0.9	0.6

从这个表格可以清楚地看出钢坯的温度随时间变化的规律，随着时间的推移，钢坯的温度逐渐下降，越来越接近冷水的温度 0℃。这种用表格表示函数关系的方法称为表格法。

例 1－8　$y=\sqrt{x^2+1}+\sin x$

这是一个用公式法表示的函数。这个函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$，在这个集合中每给定一个 x，就可以由公式计算得到函数 y 的一个值。

二、函数定义域与图形

函数的对应关系和定义域是函数的两个要素。在给出一个函数时，必须同时说明这个函数的定义域和对应关系，这样才能构成一个完整的函数，函数的定义域是自变量的取值范围，也是函数关系成立的范围。

那么应当如何确定一个函数的定义域？在纯数学的研究中，一个函数经常涉及到一定的数学运算，函数的定义域就是那些能使有关的运算得以成立的实数构成的集合。由这种方式确定的函数定义域称为函数的自然定义域，例如 $y=\sqrt{x}$的定义域是 $[0,+\infty)$，因为负数不能开偶次方。又如 $y=\log_a x$ 的定义域是$(0,+\infty)$，因为零和负数的对数没有意义等等。这样的定义域称为函数的自然定义域。

但是由实际问题得到的函数，其定义域需要由问题本身的意义来确定。例如，在自由落体运动中，垂直下落的距离 s 是时间 t 的函数：$s=\frac{1}{2}gt^2$。从纯数学的角度看，这个函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$，但是实际上运动是在某个时刻 t_0 开始的，并且在另一时刻 t_1 结束(落地时刻)，因此定义域应当是$[t_0,t_1]$。

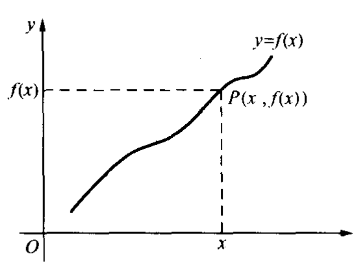

图 1－11

函数 $y=f(x)$的图形是平面上所有以 x 为横坐标，以 $y=f(x)$为纵坐标的点构成的点集。也就是平面上所有满足方程 $y=f(x)$的点构成的点集(见图 1－11)。函数图形也称为函数图像，正确地描绘函数图形对于理解函数性质，分析研究各种问题有很好的辅助作用。

三、函数的一些重要属性

1．偶函数与奇函数

设函数 $y=f(x)$的定义域 D 是一个对称区间$(-a,a)$、$[-a,a]$$(a>0)$，或$(-\infty,+\infty)$。如果对于所有的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$为偶函数；如果对于所有的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$则称 $y=f(x)$为奇函数。

例如，函数 $y=\cos x$，$y=\sqrt{1+x^2}$是偶函数，$y=\sin x$，$y=x^3$ 是奇函数。对幂函数，当 μ 为偶数时，$y=x^\mu$ 是偶函数；当 μ 为奇数时，$y=x^\mu$ 是奇函数。

偶函数的图形关于纵轴是对称的，即如果点(x,y)在函数图形上，那么点$(-x,y)$也在函数图形上。奇函数的图形关于坐标原点是对称的，即如果点(x,y)在函数图形上，那么点$(-x,-y)$也在函数图形上(见图 1－12、图 1－13)。

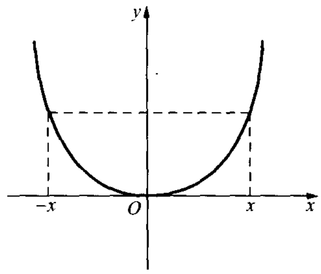

图 1－12

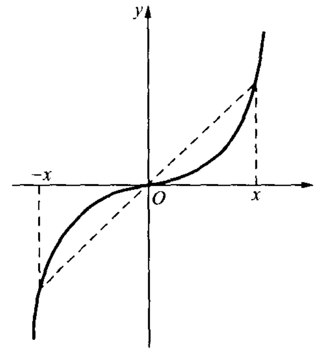

图 1－13

例 1－9 判定函数$f(x)=\dfrac{2^{-x}+2^{x}}{2}$与函数 $g(x)=\dfrac{2^{-x}-2^{x}}{2}$的奇偶性。

解 因为 $f(-x)=\dfrac{2^{x}+2^{-x}}{2}=f(x)$,所以 $f(x)$是偶函数；

又因为 $g(-x)=\dfrac{2^{x}-2^{-x}}{2}=-g(x)$,所以 $g(x)$是奇函数。

偶函数和奇函数仅仅是一种特殊类型的函数，但是，每一个定义在$(-\infty,+\infty)$的函数都可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和。事实上，令

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

则读者容易验证,$f_1(x)$是偶函数,$f_2(x)$是奇函数,并且

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

2. 单调函数

假定 f 是定义在集合D 上的函数，如果对于任意的 x_1，$x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 f 在D 上为单调增加函数;如果当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 f 在D 上为单调减少函数。

如果当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 f 在D 上为单调非减函数；如果当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 f 在D 上为单调非增函数。

例如，$y=\sin x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$单调增加，在$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$单调减少；函数 $y=\cos x$ 在区间$(0,\pi)$单调减少，在区间$(-\pi,0)$单调增加等等。

又如，当 $\mu>0$ 时，幂函数 $y=x^{\mu}$ 在$(0,+\infty)$单调增加；当 $\mu<0$ 时，$y=x^{\mu}$ 在$(0,+\infty)$单调减少。

当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 单调增加；当$0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 单调减少。当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 单调增加等等。

例 1－10 证明$f(x)=x^2$ 在$(0,+\infty)$单调增加,在$(-\infty,0)$单调减少。