职工高等工业专科学校教材

高等数学

上册

吴兰芳 主编

成都分院 古术华

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是根据原教育部1983年审订的"职工高等工业专科学校《高等数学教学大纲》(草案)"编写的.

全书分上、下两册出版. 上册内容包括函数与极限，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程. 下册内容包括矢量代数与空间解析几何，多元函数的微分学，多元函数的积分学，无穷级数. 每节末均配置适当的习题，书末附有习题答案.

职工高等工业专科学校教材

高 等 数 学

上 册

吴兰芳 主编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

文字六〇三厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 11.25 字数 270 000

1987年4月第1版 1990年3月第4次印刷

印数 34 041—45 660

ISBN 7-04-001258-8/O·408

定价 2.60 元

前　言

本书是根据原教育部1983年审订的"职工高等工业专科学校《高等数学教学大纲》(草案)编写的.

本书由陆庆乐教授(西安交通大学)主审. 参加审稿的还有叶乃膺(哈尔滨兵器工业职工大学),朱学炎(复旦大学),杨慧琍(江南大学),郭淑英(北京农业机械职工大学)和张献廷(重庆长安机器厂职工大学)等同志. 他们仔细审阅了原稿,并提出许多宝贵意见,在此谨向他们表示衷心谢意.

本书由吴兰芳(上海第二工业大学)主编,参加编写的有钱文侯(北京钢铁学院),林上珍(上海交通运输局职工大学)和张令松(上海第二工业大学)等同志. 限于编者水平,书中缺点和错误在所难免,恳请读者不吝赐教指正.

编　者

1986年7月

目　录

第一章　函数与极限

§1.1　函数概念

1. 变量·区间

在研究某些自然现象或技术问题时，会遇到各种各样的量，其中有些量在过程中保持不变，即取一定的数值，而另一些量却有变化，即可取不同的数值. 例如在飞机由上海飞往北京的过程中，飞机上乘客的数量、行李的件数都保持不变，而飞机与北京的距离、飞机的燃料的存量却在不断地改变.

在某一过程中，始终保持同一数值的量叫做**常量**；可以取不同数值的量叫做**变量**.

在上述飞机飞行过程中，乘客的数量、行李的件数是常量；而飞机与北京的距离、飞机的燃料的存量是变量. 一个量是常量还是变量，是相对于某一过程来说的.

变量的每一个值都是一个数，这些数的全体叫做变量的**变域**.

我们用小写字母 x, y, t 等表示变量，相应地用大写字母 X, Y, T 等表示其变域.

通常用区间表示变域. 所谓区间，是指介于两个实数之间的全体实数，这两个实数就叫做区间的端点.

设 a, b 是两个实数，且 $a<b$，那么把满足不等式

$$a<x<b$$

的实数 x 的全体叫做**开区间**，记为 (a,b)；把满足不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

的实数 x 的全体叫做**闭区间**，记为 $[a,b]$；把满足不等式

$$a \leqslant x < b \quad 或 \quad a < x \leqslant b$$

的实数 x 的全体叫做**半开区间**，分别记为 $[a,b)$ 或 $(a,b]$.

由于实数与数轴上的点一一对应，所以区间就和数轴上的线段一一对应，线段的端点就是区间的端点，如图 1-1 所示. 图中粗线表示区间，用黑点"·"表示该点属于所述区间，用空心点"∘"表示该点不属于所述区间.

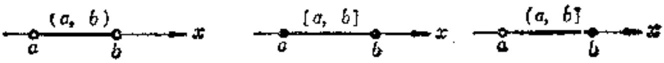


图 1-1

有时还要考虑无穷区间. 把满足不等式

$$-\infty < x < +\infty$$

的实数 x 的全体叫做**无穷区间**，记为 $(-\infty, +\infty)$；把满足不等式

$$-\infty < x < b \quad 或 \quad a < x < +\infty$$

的实数 x 的全体叫做**半无穷区间**，分别记为 $(-\infty, b)$ 或 $(a, +\infty)$. 无穷区间对应整个数轴.

注意，"$-\infty$"与"$+\infty$"分别读作"负无穷大"与"正无穷大"，它们只是记号.

2. 函数

(1) 函数的定义

在同一自然现象或技术问题中，往往同时有几个变量在变化，且这些变量不是互相独立的，而是存在着依赖关系. 我们先看几个例子.

例 1 在火箭升空的过程中，火箭与地面的距离 h 和火箭运行的时间 t 是两个变量. 自动测高仪画出了如图 1-2 的曲线. 图中横坐标表示时间 t，纵坐标表示高度 h，曲线上任一点 (a,b) 的坐标就表示火箭在时刻 $t=a$(秒) 的高度 $h=b$ (千米). 对于区间

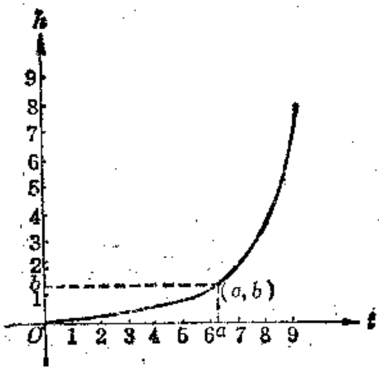


图 1-2

[0, 9]中的每一个 t 值，根据图中的曲线就能确定一个 h 值与之对应．这表明变量 t 与 h 之间存在着依赖关系．图 1-2 描述了这两个变量的对应规律．

例 2 由实验测得某金属轴在不同温度 τ(°C)下的长度 L(m)有如表 1-1 所示的对应关系．

表 1-1

τ(°C)	10	20	30	40	50	60
L(m)	1.00012	1.00024	1.00035	1.00048	1.00061	1.00072

这里 τ 和 L 是两个相互依赖的变量．对表中列出的每一个温度值 τ，根据表 1-1，相应的轴长 L 就完全确定．表 1-1 描述了变量 L 与变量 τ 之间的对应规律．

例 3 自由落体经过的位移 s 和下落时间 t 是两个变量，它们之间有关系式

$$s=\frac{1}{2}gt^2, \tag{1-1}$$

其中 $g=9.8$ 米/秒^2．假设物体着地时刻为 T(秒)，那么对于区间

$[0,T]$中任一时刻 t(秒)，落体对应的位移 s(米)就完全确定．例如 $t=2$ 秒时，$s=\frac{1}{2}g(2)^2=19.6$ 米．关系式(1-1)表达了变量 t 与 s 之间的对应规律．

上面三个例子虽是不同的问题，但具有共同的特性，即在每一个问题中都包含两个变量，它们之间相互依赖，且存在着确定的对应规律(用图、表格、式子等表示)．根据这个规律，只要其中一个变量在某个变域内取一个定值，另一个变量就有确定的值与之对应．类似这种变量间的依赖关系的例子是很多的，概括其共同特性，有如下函数定义．

定义 设 x 和 y 是两个变量．如果在 x 的变域 X 中任意取一确定值 x，变量 y 按照一定规律 f 有唯一确定的值与之对应，那么变量 y 叫做变量 x 的**函数**，记为 此定义适用单值函数。

$$y=f(x),$$

x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**．自变量的变域 X 叫做函数 $y=f(x)$ 的**定义域**．

自变量在定义域内取定某一值时函数的对应值叫做函数当自变量取此值时的**函数值**．

在例 1 中，火箭飞行高度 h 是时间 t 的函数．

在例 2 中，金属轴长度 L 是温度 τ 的函数．

在例 3 中，自由落体的位移 s 是时间 t 的函数．

从函数的定义看到，一个函数有两个要素，即对应规律和定义域．如果两个函数的对应规律和定义域都相同，那么它们就是同一函数．

(2) 函数记号与函数值

记号 $y=f(x)$ 应理解为 y 通过对应规律 f 与 x 对应．当我们用 $y=f(x)$ 表示函数 $y=x^2-3x+2$ 时，就有

$$f(x)=x^2-3x+2, \qquad (1-2)$$

这里 f 表示这样的对应规律：将 x 平方后减去 3 倍的 x 再加 2 就得到对应的 y 值.

对于一个函数，其自变量选用什么字母是没有关系的．例如(1-2)中选用 t 作为自变量,就可写成

$$f(t)=t^2-3t+2.$$

如果同时讨论几个不同的函数，为避免混淆起见，常用不同的函数记号来表示．如 $\Phi(x)$，$\psi(x)$等，有时也用记号 $y=y(x)$，$s=s(t)$等.

对于函数 $f(x)$当自变量 x 取某一定值 a 时，对应的函数值用记号 $f(a)$或 $f(x)\Big|_{x=a}$表示.

例如对函数(1-2)来说，当 $x=0$ 时，$f(0)=0^2-3\cdot0+2=2$；当 $x=1$ 时，$f(1)=1^2-3\cdot1+2=0$；当 $x=a$ 时，$f(a)=a^2-3a+2$.

又如由 $f(x)=5x^3-1$ 有 $f(0)=-1$；$f(2)=39$；$f(x_0)=5x_0^3-1$；$f(1/a)=5/a^3-1$.

3．函数的表示法·定义域

(1) 函数的表示法

我们说给出一个函数或表示一个函数，是指给定了自变量所能取得的全部数值和由这些自变量求函数值的对应规律．至于如何表示是可以多种多样的，最常见的有三种：

图形表示法　就是用坐标平面上的曲线表示函数，通常以横坐标表示自变量，纵坐标表示因变量．这种曲线叫做函数的**图形**．例 1 就是用图形来表示函数．在物理学和工程技术上经常用图形表示函数.

列表法　就是把一系列自变量值与其对应的函数值列成表格，如例 2．大家所熟知的对数表、三角函数表等都是用表格表示

的函数．列表法在自然科学与工程技术上也用得很多．

解析法　就是给出解析式，通过解析式中规定的运算，由自变量的值算出函数的对应值，如例3．又如

$$y=\frac{1-x^2}{1+x^2}, \qquad y=\lg(3x-2)$$

等都是用解析式表示的函数．解析法是最常用的函数表示法．

函数用解析法表示时，可能遇到这样的情形，对于自变量的某些值用一个解析式表示，而另一些值用另一解析式表示．例如

$$y=\begin{cases}x+1, x<0,\\ x-1, x\geqslant 0.\end{cases}$$

在这个例子中，当 x 取区间 $(-\infty, 0)$ 内的数值时，用解析式 $y=x+1$ 来计算对应的函数值；而当 x 取区间 $[0, +\infty)$ 内的数值时，用解析式 $y=x-1$ 来计算对应的函数值．总的来看，对于区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的每一个值 x，都有一个确定的值 y 与之对应，所以 y 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个函数．这种用两个以上的解析式表示的函数称为**分段函数**．

注意，在函数 $y=f(x)$ 的定义中，并没有要求当自变量 x 取不同的数值时，函数值 y 也取不同的数值．重要的是，当 x 在定义域 X 中任取一值时，y 有确定的值与之对应．因此 $y=k$（k 是常量）也是一个函数．因为当 x 取任何值时，y 恒以 k 与之对应．

（2）函数的定义域

实际意义

前面已经谈到，定义域是函数的一个要素．在实际问题中，函数的定义域由具体问题来确定．例如在自由落体运动过程中，函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域是 $[0, T]$，其中 T 是落体着地的时刻，在这区间以外来讨论自由落体运动是没有意义的．

对于用解析式表示的函数，在没有注明其定义域的情形下，

函数的定义域是使解析式有意义的自变量的一切实数值.

例 4 求函数 $y=x^2-3x+1$ 的定义域.

解 当 x 取任何实数时, y 都有一个确定的值与之对应, 所以函数 y 的定义域是全体实数, 即区间 $(-\infty, +\infty)$.

例 5 求函数 $y=\dfrac{2}{(x-1)(x-2)}$ 的定义域.

解 由函数的表示式可见, 当 $x=1$ 或 $x=2$ 时, y 没有确定的值与之对应; 当 x 取 1 与 2 以外的一切实数时, y 都有一个确定的值与之对应. 因此, 函数的定义域是除 $x=1$ 和 $x=2$ 的所有实数, 即区间 $(-\infty, 1)$、$(1, 2)$、$(2, +\infty)$.

例 6 求函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域.

解 因我们只在实数范围内讨论, 所以 x 只能取 -1 和 1 及介于其间的一切值, 即定义域为 $[-1, 1]$.

例 7 求函数 $y=\lg(3x-2)$ 的定义域.

解 因为正数才有对数, 所以 x 应满足不等式

$$3x-2>0 \quad 即 \quad x>\frac{2}{3}.$$

因此, 这个函数的定义域是区间 $\left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$.

4. 函数的几种特性

有些函数具有某种特性, 了解这些特性, 对研究函数有很大帮助. 现分别叙述如下:

(1) 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$. 如果存在常数 $T\neq 0$, 对任一实数 x, 有

$$f(x+T)=f(x),$$

那么函数 $y=f(x)$ 叫做**周期函数**, T 叫做函数的**周期**. 显然 $2T$, $3T$ 等也是函数的周期, 这就是说周期有无穷多个. 通常函数的周期是指最小正周期(如果存在的话), 例如我们熟知的三角函数 y

$=\sin x, y=\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数，三角函数 $y=\operatorname{tg} x, y=\operatorname{ctg} x$ 是以 π 为周期的周期函数(图 1-3)。

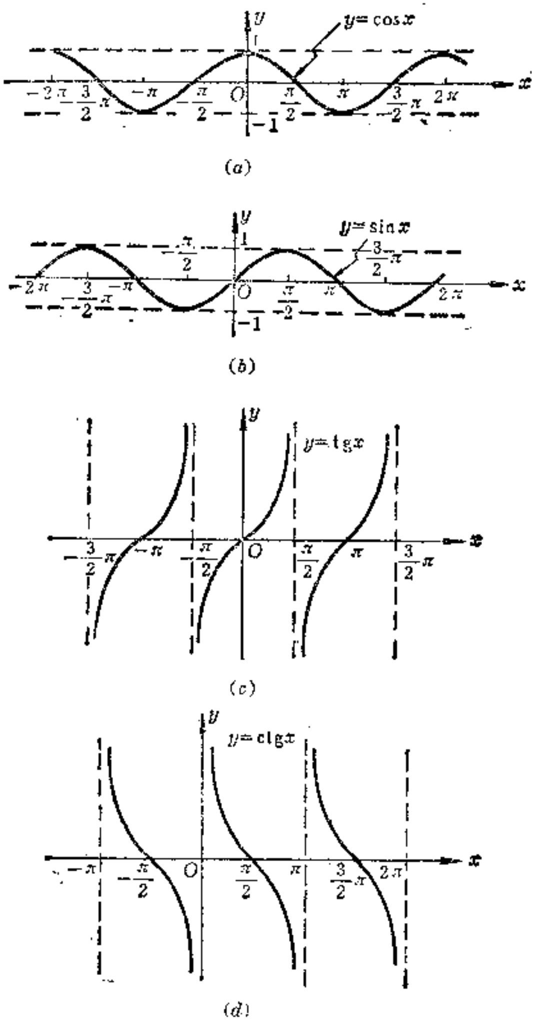


图 1-3

周期函数的图形呈周期重复，只要知道它在任一周期上的图形，就可以得到函数的全部图形.

(2) 函数的奇偶性

设 $f(x)$是定义在对称区间$(-l, l)$内的函数. 如果当自变量x改变符号时，函数值也改变符号，即 $f(-x)=-f(x)$，那么函数$f(x)$叫做在$(-l, l)$内的**奇函数**；如果当x改变符号时，函数值不变，即 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$叫做在$(-l, l)$内的**偶函数**. 例如

$$y=x, \quad y=x^3, \quad y=\sin x$$

都是$(-\infty, +\infty)$内的奇函数.

$$y=x^2, \quad y=x^4, \quad y=\cos x$$

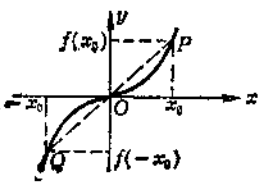
都是$(-\infty, +\infty)$内的偶函数.

$$y=x+\cos x$$

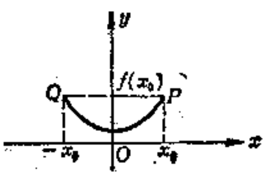
既不是奇函数，也不是偶函数，因此它是非奇非偶函数.

奇函数的图形对称于原点. 因为如果 $P(x_0, f(x_0))$是图形上的任一点，由于 $f(-x_0)=-f(x_0)$，点P关于原点的对称点$Q(-x_0, -f(x_0))$也在图形上(图 1-4(a)).

偶函数的图形对称于y轴. 因为如果点$P(x_0, f(x_0))$在图形上，由于 $f(-x_0)=f(x_0)$，点P关于y轴的对称点$Q(-x_0, f(x_0))$也在图形上(图 1-4(b)).



(a)



(b)

图 1-4

因此，只要知道一个函数的奇偶性以及它在$(0,l)$内的图形，就能得出这个函数在$(-l,l)$内的全部图形.

(3) 函数的单调性

在区间(a,b)内，如果函数值y随着x的增加而增加(或减少)，即对(a,b)内任意两点x_1与x_2，当$x_1<x_2$时，恒有$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$)，那么称函数$f(x)$是区间(a,b)内的**单调增加(或单调减少)函数**. 单调增加函数或单调减少函数统称为**单调函数**(图 1-5).

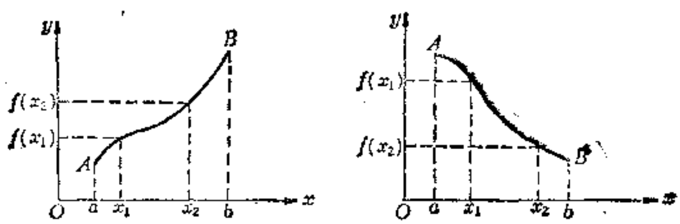


图 1-5

单调增加函数的图形是从左下方上升到右上方，所以也把它叫做**单调上升函数**. 单调减少函数的图形是从左上方下降到右下方，所以也叫做**单调下降函数**.

例如，$f(x)=x^2$在区间$(0,+\infty)$内是单调增加函数. 因为对区间$(0,+\infty)$内任意两点x_1,x_2，当$x_1>x_2$时，有

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0,$$

即

$$f(x_1)>f(x_2).$$

同样可验证在区间$(-\infty,0)$内$f(x)$是单调减少函数. 即函数$f(x)=x^2$在区间$(0,+\infty)$内单调增加，在区间$(-\infty,0)$内单调减少. 这时，我们也把区间$(0,+\infty)$叫做函数$f(x)=x^2$的单调增加区间，把区间$(-\infty,0)$叫做函数$f(x)=x^2$的单调减少区间.