中国力学学会
第一次板壳理论学术讨论会
论文选集

（内部資料）

中国力学学会編輯
科学出版社出版

中国力学学会
第一次板壳理論学术討論会
論文选集

中国力学学会编辑

*

科学出版社出版
北京朝阳門内大街 117 号
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行

*

1965 年 8 月第一版　开本：787×1092 1/16
1965 年 8 月第一次印刷　印张：8 7/8
印数：0001—1,000　字数：202,000

統一书号：13031・2170
本社书号：3305・13—2

定价：1.40 元

前　　言

中国力学学会于 1962 年 10 月在西安举行了全国第一次板壳理論学术討論会．会上共宣讀論文44篇，內容分三方面：板壳一般理論、板壳塑性理論及建筑板壳．为了更广泛地交流經驗，促进我国力学的发展，現将会議中宣讀过而又較好的論文汇編出版．

本选集共收集了 11 篇論文全文刊登作为第一部分；凡已在全国性学报或高等院校学报发表过的論文，为了避免重复，本选集只刊登摘要作为第二部分；还有一部分在会議上宣讀过的論文，只刊登題目作为第三部分，以供讀者参考．

全文刊登的文章[1]，出版前均經过审查并由作者作了必要的补充和修改．在此謹向大力支持本选集出版的編輯委員会、审稿者、作者及科学出版社表示深切的謝意．

中国力学学会

1964 年 10 月

1）论文刊登次序按照学术讨论会上宣读先后次序排列．

目　录

第一部分（全文刊登）

第二部分（摘要刊登）

第三部分 (題目刊登)

第 一 部 分

关于平板弯曲的二維形式进一步理論的探討

杜 庆 华
(清 华 大 学)

提　　要

本文提出了平板問題化为二維問題所必須具有的命題簡化．然后利用

$$u(x, y, z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{n!} u_n(x, y),$$

$$v(x, y, z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{n!} v_n(x, y),$$

$$w(x, y, z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{n!} w_n(x, y)$$

形式的位移式，说明如何建立最簡单的 S. Germain-Lagrange 方程；进一步考虑了剪切和与板面垂直方向可压缩性的影响．说明了考虑剪切影响时第二级近似应有的结果． Reissner[3] 等的结果实质上还包括了一些未经指明的矛盾．并且指出了，这是取有限个二维待定量方式的近似所不可避免的．

一、引　言

关于作为薄板經典的实用理論的平板理論而言，自从1811年提出 Germain-Lagrange[1] 方程后，包括有关的假設在內，經过了一系列的討論，才逐漸明确了这种理論的实质，而且明确了这种理論的实用范围是寬广的． 对于 1850 年后提出的 Kirchhoff-Love 假設在平板中的应用，例如在文献［2］中有較明确的直观解释．但是有关进一步的精确理論却并不非常清楚．自从中厚板理論及厚板理論在实践中得到初步发展后，特别是輕結构理論中所要求的考慮剪切变形影响的平板理論被提出后，对于平板理論的进一步的分析，就其理論意义而言就成为很重要的了．Reissner 在文献［3］中应用变力的能量原理提出了进一步考虑这一問題的方案．但是，这个方案的明显的缺点是在力与变形之間的关系式中不寻常地存在着給定的載荷項． 其后，Власов[4] 討論了 Reissner 的結果，認为抛物綫的剪应力分布是与直法綫假設不相容的． 他利用考虑剪切影响的板面方向位移的表达式，部分地修正了 Reissner 的結果． 但是正如文献［5］所指出的文献［4］在这一間題上应用位移形式的能量原理时，存在与文献［3］完全相当的假設．

事实上，从現有的工作中可以明显地指出某些方式上的共同点，这就是从应力出发利用能量原理（例如文献［3］）平衡条件自然得到保証．再从变分的极值要求得到了連續条件；而經典的实用理論則从位移出发使連續条件自然满足，变分的极值要求导出了平衡条

件(例如用能量原理得到了 Germain-Lagrange 方程及相应的边界条件). 作者們注意利用变分原理来求得相应的自然边界条件，但是应該指出，能量原理中的能量表达式一旦建立，力与变形关系就被規定，其本身的矛盾却在“近似理論”的标題下未經細致分析. 至于文献[4]能量变分中在假設上的不一致，則是可以加改正的，例如将文献[4]中 (3.1) 式的广义位移加以新的标明，或改用混合的变分同时变位移与变剪应力. 但是即使改正后不論文献[3]或文献[4]本身的矛盾依然存在，这种从前提上存在的矛盾完全可以从以下簡单的分析中加以明确.

本文提出了一种一般性的利用二維形式的待定量解平板問題的从位移出发的方案. 文中指出了将这种方案用在平板問題上所必須进行的簡化. 在选取有限个待定参数时，作为不同阶段的近似，可以証明将得到 Germain-Lagrange 方程和 Reissner 方程，以及进一步考虑板面垂直方向的可压縮(伸长)性的途径. 文中明确地指出了各种近似所存在的矛盾，进一步近似到三維的弹性力学空間理論以前所不可避免的一些矛盾.

作者希望这一工作能对闡明这一問題，以及发展厚板，特別中厚板的理論有所裨益.

二、平板理論命題的建立与簡化

平板本身正象一切物体一样是三維的. 将一个三維問題化为包含一系列二維的待定量来处理，当然要引进一定的簡化与假設. 不論是否明确地提出这些假設，这种处理所导致的某些矛盾将是不可避免的.

厚度为 h 的平板在未变形以前在几何意义上是以两个平行于 x-y 的平面($z=\pm h/2$)和一个或几个柱面 ($F_1(x, y)=0$, $F_2(x, y)=0$, $\cdots$) 所包含的介质空間. 图 1 示出其几何形状，其中 $F_1(x, y)=0$ 代表外边緣，$F_2(x, y)=0$, $F_3(x, y)=0$, $\cdots$ 代表板孔边緣.

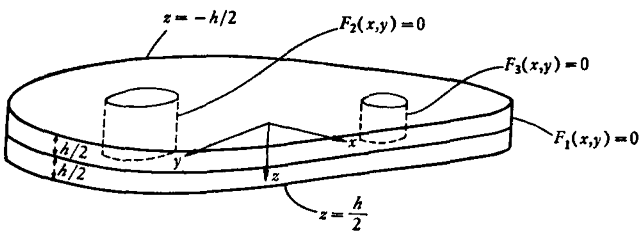

图 1

有时考虑到实际工作必須严格地分析板孔边緣 ($F_2(x, y)=0$, $F_3(x, y)=0$, $\cdots$) 或外边緣 ($F_1(x, y)=0$)的边界附近的局部应力分布. 但我們認为这将使問題变为三維的弹性力学空間問題.

現在我們来考虑平板在实际受力与支撑的情况下可能利用以 x, y 作为自变数的函数形式的求解方法. 应該指出，所謂二維形式的平板解，也就是对于位移或应力沿厚度的变化作了某些具体限制，从而最終只要求出以 (x, y) 函数形式的力或变形的待定量，問題即告解决. 在进入这种处理方法以前我們来分析一下平板的边緣情况.

在平板的上下面，$z=\pm\dfrac{h}{2}$ 处

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma\big]_{z=\pm\frac{h}{2}} &= \sigma_{z\pm}(x,\ y),\\
\tau_{xz}\big]_{z=\pm\frac{h}{2}} &= \tau_{xz\pm}(x,\ y),\\
\tau_{yz}\big]_{z=\pm\frac{h}{2}} &= \tau_{yz\pm}(x,\ y),
\end{aligned}\right\} \tag{1}
$$

式中 $\sigma_{z\pm}$，$\tau_{xz\pm}$，$\tau_{yz\pm}$ 为板的上下面所受的单位面积的外力. 在平板弯曲的間題中，可簡化为

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_z\big]_{z=\pm\frac{h}{2}} &= 0,\\
\sigma_z\big]_{z=-\frac{h}{2}} &= -q(x,\ y),\\
\tau_{xz}\big]_{z=\pm\frac{h}{2}} &= 0,\\
\tau_{yz}\big]_{z=\pm\frac{h}{2}} &= 0,
\end{aligned}\right\} \tag{2}
$$

这些情况如图 2 a 所示. 从以后的具体分析中可以看出，不进入三維的分析要滿足这些条件是有困难的. 受到一开始就对应力或位移上所作的沿厚度变化的假設的限制下，要求滿足这些力的边界条件必将在位移上的假設发生矛盾，反之亦然. 至于平板边緣上力的分布則在一般情况下是不明确的，要将平板間題作为二維間題来处理必須附加某些規定. 因此平板理論在应用二維形式求解之前必須将命題做如下的一些改变.

这些改变在本質上是属于用一种靜力相当系統的代替.

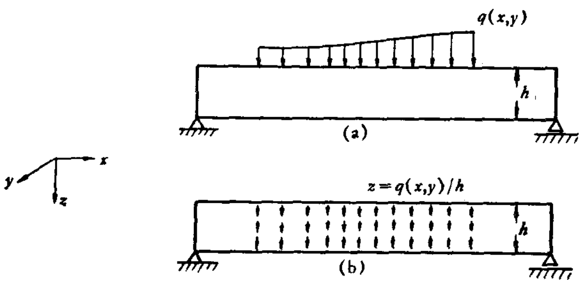

图 2

(1) 我們应将一个具有如(2)式所規定的边界力的間題改为如下零边界力，但是增加一項 z 方向的体积力的間題. 这也就是将图 2a 的情况改为图 2b 的情况，其有关的边界条件与体积力表示在公式(3)中：

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_z\big]_{z=\pm\frac{h}{2}} &= 0,\\
\tau_{xz}\big]_{z=\pm\frac{h}{2}} &= 0,\\
\tau_{yz}\big]_{z=\pm\frac{h}{2}} &= 0,\\
z &= \frac{q(x,\ y)}{h}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}
$$

(2) 对于能化为二維解的平板間題事实上还需要作边緣靜力相当系統代替的規定.

这也就是，板件边緣上的主向量及主矩一方面应与板面上的載荷构成平衡系統，另一方面只是合力的大小和主矩的大小可以用也只能用周边 $s(x,\ y)$ 的位置来給定. 也就是，在边緣部分上，即 $F_i(x,\ y)=0$ 处有

$$
\left.\begin{aligned}
&\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_n dz = \overline{T}_n(s),\\
&\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{ns} dz = \overline{T}_{ns}(s),\\
&\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_n z dz = \overline{M}_n(s),\\
&\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{ns} z dz = \overline{M}_{ns}(s),\\
&\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{nz} dz = \overline{Q}_n(s),
\end{aligned}\right\} \tag{4}
$$

但在 $F_i(x, y) = 0$ 上的 σ_n, τ_{ns}, τ_{nz} 将不能任意給出. 显然这里也具有 St. Venant 靜力相当系統的边界力效应的問題. 当然在这一問題上将許可利用三維解作局部的修正，以提高局部应力計算的精确度.

(3) 旣然不进入严格的三維分析，滿足三維的平衡微分方程也是不必要的. 我們将只要求板件单元的平衡.

这样也就是用滿足下列板件单元平衡方程式的靜力相当系統来代介質任何微单元的平衡:

$$
\left.\begin{aligned}
&\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) z dz = 0,\\
&\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right) z dz = 0,\\
&\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{q(x, y)}{h}\right) dz = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{5}
$$

对(5)式进行积分,并依靠由下式所規定的內力:

$$
\left.\begin{aligned}
M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz,\\
M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz,\\
H &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} z dz,\\
Q_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} z dz,\\
Q_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} z dz,
\end{aligned}\right\} \tag{6}
$$

再利用边界条件(3)式进行分部积分卽可得如下的平衡条件:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}-Q_x=0,\\
&\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}-Q_y=0,\\
&\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q(x,y)=0.
\end{aligned}\right\}\tag{7}
$$

如上所述，我們所要建立的平板理論的內力在域內將滿足(5)式或(7)式，給定或待求的边界力则应滿足(3)及(4)式的要求．这就是所提出的平板的平衡与边界条件．我們認为这就是已簡化的平板理論有关力的命題．

三、平板理論的基本方程式与边界条件

現在我們来寻求，当在板件的边緣上給定部分位移（某种形式的支撑）或不給定位移时（例如自由边或承載的边緣），将位移 $u(x,y,z)$，$v(x,y,z)$ 及 $w(x,y,z)$ 簡化为二維問題的方法．

我們可以不影响結果的一般性而令：

$$
\left.\begin{aligned}
u(x,y,z)&=u_0(x,y)+zu_1(x,y)+\frac{z^2}{2!}u_2(x,y)+\frac{z^3}{3!}u_3(x,y)\\
&\quad+\cdots=\sum_0^\infty\frac{z^n}{n!}u_n(x,y),\\
v(x,y,z)&=v_0(x,y)+zv_1(x,y)+\frac{z^2}{2!}v_2(x,y)+\frac{z^3}{3!}v_3(x,y)\\
&\quad+\cdots=\sum_0^\infty\frac{z^n}{n!}v_n(x,y),\\
w(x,y,z)&=w_0(x,y)+zw_1(x,y)+\frac{z^2}{2!}w_2(x,y)+\frac{z^3}{3!}w_3(x,y)\\
&\quad+\cdots=\sum_0^\infty\frac{z^n}{n!}w_n(x,y),
\end{aligned}\right\}\tag{8}
$$

然而注意到未經"上述（5）式的改变"即不受上述比較局限的平板元件保持平衡的限制情况下，应該利用位移形式的 Lame 平衡方程：

$$
\left.\begin{aligned}
&(\lambda+G)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+G\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u=0,\\
&(\lambda+G)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+G\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v=0,\\
&(\lambda+G)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+G\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w=0,
\end{aligned}\right\}\tag{9}
$$

式中

$$
G=\frac{E}{2(1+\mu)},\qquad \lambda=\frac{\mu E}{(1-2\mu)(1+\mu)}.
$$

从（8）式及（9）式中不难看出，u_0，v_0，w_0 为中面位移，而且可以将 $u(x,y,z)$，$v(x,y,z)$ 及 $w(x,y,z)$ 分为二組：

(1) u, v 为 z 的奇函数，w 为 z 的偶函数，

(2) u, v 为 z 的偶函数，w 为 z 的奇函数.

对于第 (2) 类情况，变形对中面 ($z=0$) 是对称的，这要求对于板中面有对称性的載荷以及相适应的支撑. 这一个非弯曲問題我們这里将不再討論.

下面我們对第(1)类情况，它相当于平板的弯曲，作进一步的分析.

将第(1)类对中面及对称的弯曲变形的位移重新改写如下：

$$\left.\begin{aligned}
u(x, y, z) &= -z\beta_x(x, y) - \frac{z^3}{3!}\gamma_x(x, y) - \frac{z^5}{5!}\delta_x(x, y) - \cdots, \\
v(x, y, z) &= -z\beta_y(x, y) - \frac{z^3}{3!}\gamma_y(x, y) - \frac{z^5}{5!}\delta_y(x, y) - \cdots, \\
w(x, y, z) &= w(x, y) + \frac{z^2}{2!}\varphi(x, y) + \frac{z^4}{4!}\psi(x, y) + \cdots,
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

式中的 $w_0(x, y)$ 的 0 附标略去，以便和已知結果作比較.

可以指出，$w(x, y, z)$ 中的 $\varphi(x, y)$ 及 $\psi(x, y)$ 等代表了垂直板面方面的可压縮(伸长)性；而以后的分析說明 γ_x, γ_y 等代表了剪切影响.

在利用 (5) 式及 (7) 式求出位移形式的平板条件之前，我們首先必須满足(3)式的要求. 为了满足(3)式中的

$$\sigma_z\Big]_{z=\pm\frac{h}{2}} = 0,$$

在平板理論中可以提出如下的假設：

$$\sigma_z = 0. \tag{11}$$

$\sigma_z=0$ 的这一假設，当然对于 $\sigma_z\Big]_{z=\pm\frac{h}{2}}=0$ 的要求而言，限制过多了一些. 但是它比一开始就令 $w(x, y, z)=w(x, y)$ 要合理一些，因为这时 $\dfrac{\partial w}{\partial z}=0$ (亦即令 $\varphi(x, y)=0$, $\psi(x, y)=0, \cdots$)，从而要求 $\sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_y)$，这样就会与(3)式的满足相冲突.

到这里为止，我們的問題变成在(10)式中选取有限个 $w(x, y)$, $\beta_x(x, y)$, $\beta_y(x, y)$, $\gamma_x(x, y)$, $\gamma_y(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ 以及 $\delta_x(x, y)$, $\delta_y(x, y)$, $\cdots$ 等以求满足 (5) 及 (7)式，但他們还应該满足(3)式中剩下的二个要求

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{xz}\Big]_{z=\pm\frac{h}{2}} &= 0, \\
\tau_{yz}\Big]_{z=\pm\frac{h}{2}} &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

下面我們来看一下，逐步的近似可以取得什么結果. 第一步我們若只保留

$$\beta_x(x, y), \beta_y(x, y), w(x, y), \tag{I}$$

则根据

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_z &= 0, \\
\sigma_x &= \frac{E}{(1-\mu^2)}[\epsilon_x + \mu\epsilon_y] = \frac{E}{(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial v}{\partial y}\right] \\
&= \frac{-zE}{(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \mu\frac{\partial \beta_y}{\partial y}\right], \\
\sigma_y &= \frac{E}{(1-\mu^2)}[\epsilon_y + \mu\epsilon_x] = \frac{E}{(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \mu\frac{\partial u}{\partial x}\right] \\
&= \frac{-zE}{(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \mu\frac{\partial \beta_x}{\partial x}\right],
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

同时

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right]=\frac{-zE}{2(1+\mu)}\left[\frac{\partial\beta_x}{\partial y}+\frac{\partial\beta_y}{\partial x}\right],\\\tau_{xz}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\left[\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right]=\frac{-zE}{2(1+\mu)}\left[\frac{\partial w}{\partial x}-\beta_x\right],\\\tau_{yz}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\left[\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right]=\frac{-zE}{2(1+\mu)}\left[\frac{\partial w}{\partial y}-\beta_y\right].\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

从(13)式及(14)式的第一式可以看出 σ_x, σ_y 及 τ_{xy} 对 z 而言是以中面处为零作直綫变化的. 由于 $w(x, y)$, $\beta_x(x, y)$, $\beta_y(x, y)$ 与 z 无关. τ_{xz} 和 τ_{yz} 一般不能满足(12)式,只有在满足下式时才例外:

$$\left.\begin{aligned}\beta_x&=\frac{\partial w}{\partial x},\\\beta_y&=\frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

若(15)式成立,则

$$u=-z\frac{\partial w}{\partial x},\quad v=-z\frac{\partial w}{\partial y},\quad w=w(x, y),\tag*{(I)$_a$}$$

显然由此可以得到

$$M_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_x z\,dz=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$M_y=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_y z\,dz=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$H=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{xy} z\,dz=-D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},$$

式中

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

然后根据平衡的要求,消去 Q_x 及 Q_y, 则自(7)式得

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=-q,$$

从而即可得到

$$D\nabla^4 w=q,\tag{16}$$

式中

$$\nabla^4=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

这就是 Germain-Lagrange 方程式.

这里我們注意到由于 $\beta_x=\frac{\partial w}{\partial x}$, $\beta_y=\frac{\partial w}{\partial y}$, 从(14)式将有 $\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$, 这是与 Q_x 及 Q_y 的存在相矛盾的,而(14)式也就是中面垂直法綫变形后保持垂直于中面的假設(I), (I)$_a$ 的結果, 它与剪应力的存在并不相适应. 但在一般薄板的情况下,我們只保証最主要的矛盾, 即平衡的要求. 变形的分析只是适用于有限范围的. 即 $\beta_x=\frac{\partial w}{\partial x}$, $\beta_y=\frac{\partial w}{\partial y}$ 适

用于表达 σ_x, σ_y 及 τ_{xy} 部分. 这样的理論認为 σ_x, σ_y 及 τ_{xy} 是对 z 为直綫变化的. 从这些应力出发,根据平衡的要求将有对 z 为抛物綫分布的剪应力.

相应于(16)式的边界条件为

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{簡支边:} \\
\qquad 1)\ w = 0, \qquad 2)\ M_n = 0, \\
\text{固定边:} \\
\qquad 1)\ w = 0, \qquad 2)\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = \beta_n = 0, \\
\text{自由边:} \\
\qquad 1)\ M_n = 0, \qquad 2)\ \dfrac{\partial M_n}{\partial n} + 2\dfrac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0,
\end{array}\right\} \tag{17}
$$

(17)式中的几何約束是按支撑条件給定的. 相应于 M_n 的轉角 $\dfrac{\partial w}{\partial n}$ 也是明显的. 需要对自由边的 Kirchhoff-Love 假設

$$
\frac{\partial M_n}{\partial n} + 2\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0 \tag{18}
$$

略加解释,既然我們假設

$$
\beta_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \beta_y = \frac{\partial w}{\partial y};
$$

則不能允許出現 Q_x 及 Q_y; 事实上, Q_x, Q_y 只能用靜力相当系統代替(显然不能令其为零,否則平衡条件就不可能滿足).因而利用 $Q_n = -\dfrac{\partial M_{ns}}{\partial s}$ 及一条边两端的1, 2点上存在有集中力 $R = M_{ns1} - M_{ns2}$ 作为相当力系統的代替. 将折算的剪力代入 n 方向諸內力之矩的平衡条件,即得(18)式. 这样就不出現 Q 形式的边界条件. 这也就是对(4)式中的第4及第5式又用了靜力相当系統作为代替的概念.

現在我們来研究第二步近似的可能性. 保留

$$
\beta_x(x, y), \beta_y(x, y), \gamma_x(x, y), \gamma_y(x, y) \text{及} w(x, y), \tag{II}
$$

則此时由于

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_z &= 0 \\
\sigma_x &= \frac{E}{(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial v}{\partial y}\right] \\
&= -\frac{zE}{(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \mu\frac{\partial \beta_y}{\partial y}\right] - \frac{z^3E}{3!(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \mu\frac{\partial \gamma_y}{\partial y}\right], \\
\sigma_y &= \frac{E}{(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \mu\frac{\partial u}{\partial x}\right] \\
&= -\frac{zE}{(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \mu\frac{\partial \beta_x}{\partial x}\right] - \frac{z^3E}{3!(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \mu\frac{\partial \gamma_x}{\partial x}\right], \\
\tau_{xz} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x\right) - \frac{z^2}{2!}\gamma_x\right], \\
\tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y\right) - \frac{z^2}{2!}\gamma_y\right],
\end{aligned}\right\} \tag{19}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right] \\
&= -\frac{zE}{2(1+\mu)}\left[\frac{\partial \beta_x}{\partial y}+\frac{\partial \beta_y}{\partial x}\right]-\frac{z^3E}{2\times 3!(1+\mu)}\left[\frac{\partial \gamma_x}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_y}{\partial x}\right].
\end{aligned}\right\}
$$

由于(3)式的边界条件要求

$$
\tau_{xz}\big]_{z=\pm\frac{h}{2}}=0, \quad \tau_{yz}\big]_{z=\pm\frac{h}{2}}=0.
$$

因而利用(19)式的第 4，5 式即得

$$
\left.\begin{aligned}
\gamma_x &= \frac{8}{h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\beta_x\right), \\
\gamma_y &= \frac{8}{h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\beta_y\right).
\end{aligned}\right\} \tag{20}
$$

若(20)式成立，則由(10)式有

$$
\left.\begin{aligned}
u &= -z\beta_x-\frac{z^3}{3!}\frac{8}{h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\beta_x\right), \\
v &= -z\beta_y-\frac{z^3}{3!}\frac{8}{h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\beta_y\right), \\
w &= w(x, y),
\end{aligned}\right\} \tag{II$_a$}
$$

将(20)式代入(19)式，則

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -\left(z-\frac{4z^3}{3h^2}\right)\frac{E}{(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial \beta_x}{\partial x}+\mu\frac{\partial \beta_y}{\partial y}\right]-\frac{4z^3}{3h^2}\frac{E}{(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right], \\
\sigma_y &= -\left(z-\frac{4z^3}{3h^2}\right)\frac{E}{(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial \beta_y}{\partial y}+\mu\frac{\partial \beta_x}{\partial x}\right]-\frac{4z^3}{3h^2}\frac{E}{(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right], \\
\tau_{xy} &= -\left(z-\frac{4z^3}{3h^2}\right)\frac{E}{2(1+\mu)}\left[\frac{\partial \beta_x}{\partial y}+\frac{\partial \beta_y}{\partial x}\right]-\frac{4z^3}{3h^2}\frac{E}{2(1+\mu)}\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right), \\
\tau_{xz} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\beta_x\right)\left[1-\frac{4z^2}{h^2}\right], \\
\tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\beta_y\right)\left[1-\frac{4z^2}{h^2}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{21}
$$

根据(21)式，則

$$
\left.\begin{aligned}
M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_x z\,dz = -\frac{4}{5}D\left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x}+\mu\frac{\partial \beta_y}{\partial y}\right)-\frac{D}{5}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\
M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_y z\,dz = -\frac{4}{5}D\left(\frac{\partial \beta_y}{\partial y}+\mu\frac{\partial \beta_x}{\partial x}\right)-\frac{D}{5}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\
H &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{xy} z\,dz = -\frac{4D(1-\mu)}{5}\times\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y}+\frac{\partial \beta_y}{\partial x}\right)-\frac{D(1-\mu)}{5}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}, \\
Q_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{xz}\,dz = \frac{Eh}{3(1+\mu)}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\beta_x\right), \\
Q_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{yz}\,dz = \frac{Eh}{3(1+\mu)}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\beta_y\right).
\end{aligned}\right\} \tag{22}
$$

将(22)式代入(7)式，或将(21)式代入(5)式，则得

$$\left.\begin{aligned}&D\nabla^2\beta_x+\frac{(1+\mu)D}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\beta_y}{\partial x}-\frac{\partial\beta_x}{\partial y}\right)\right]+\frac{D}{4}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w=\frac{5Gh}{6}\left(\beta_x-\frac{\partial w}{\partial x}\right),\\&D\nabla^2\beta_y+\frac{(1+\mu)D}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\beta_x}{\partial y}-\frac{\partial\beta_y}{\partial x}\right)\right]+\frac{D}{4}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w=\frac{5Gh}{6}\left(\beta_y-\frac{\partial w}{\partial y}\right),\\&\nabla^2 w-\left(\frac{\partial\beta_x}{\partial x}+\frac{\partial\beta_y}{\partial y}\right)=-\frac{3}{2Gh}q,\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

这就是 Власов Б. Ф. 在文献 [4] 曾写出的結果[1]. 这一方案不但要求 τ_{xz}, τ_{yz} 呈抛物綫分布，而且在 σ_x, σ_y 及 τ_{xy} 上也都包含了 z 及 z^3 項，如(21)式所示. Власов Б. Ф. 不加說明地运用 $\sigma_z=0$，并且根据考虑剪切影响令

$$\left.\begin{aligned}&u=-z\beta_x-\frac{4z^3}{3h^2}\frac{1}{G}\tau^0_{xz},\quad v=-z\beta_y-\frac{4z^3}{3h^2}\frac{1}{G}\tau^0_{yz},\\ \text{而}\quad&\tau^0_{xz}=G\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\beta_x\right),\quad\tau^0_{yz}=G\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\beta_y\right),\\&w=w(x,y),\end{aligned}\right\}\quad(24)$$

式中 τ^0_{xz} 及 τ^0_{yz} 为中面最大剪应力.

由于 Власов Б. Ф. 在位移表达中几何概念并不明确，所以他一方面指出相应于 Reissner 方案的应力分布和位移的不一致性，同时却在能量变分上应用和文献[3]一样的假設，最終也不能不仿照 Reissner 方式的 [6] 采取除了位移 β_x, β_y 外同时出現剪应力的 M_x, M_y, H 表达式. 这样也就使文献[4]中的 M_x, M_y, H 等表达式虽然与(22)完全相当但是形式上仍保留 $M_x(\beta_x, \beta_y, \tau^0_{xz}, \tau^0_{yz})$, $M_y(\beta_x, \beta_y, \tau^0_{xz}, \tau^0_{yz})$, $H(\beta_x, \beta_y, \tau^0_{xz}, \tau^0_{yz})$ 的形式.

对应于第二步近似的方案其边界条件可写成:

$$\left.\begin{aligned}&\text{簡支边:}\\&\quad 1)\ w=0,\quad 2)\ M_n=0,\quad 3)\ M_{ns}=0\ \text{ 或 }\ \beta_s=0,\\&\text{固支边:}\\&\quad 1)\ w=0,\quad 2)\ \beta_n=0,\quad 3)\ \beta_s=0\ \text{ 或 }\ M_{ns}=0,\\&\text{自由边:}\\&\quad 1)\ M_n=0,\quad 2)\ M_{ns}=0,\ 3)\ Q_n=0\left(\frac{\partial w}{\partial n}=\beta_n\right).\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

由于我們对 β_n, β_s 沒有什么限制，所以命題的靜力相当性質可以完全依照(3),(4)及(5)办到.

还应該指出 Reissner 和 Власов Б. Ф. 都沒有能将自己工作中存在的問題完全指出. 事实上例如文献[4]利用了 $\sigma_z=0$ 这一前提下的应力应变关系，它要求 $\epsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}=-\mu\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{E}$. 而这样由于 σ_x 及 σ_y 包括 z 及 z^3 項就与 $w=w(x,y)$, $\frac{\partial w}{\partial z}=0$ 互相矛盾.

---

1) 应该指出这一部分的结果对他的能量原理应用中的簡化并无影响.

这一矛盾，也不是不可以部分地加以解决的，正如从第一步到第二步我們引进更多的二維待定量就可以进一步得到更精确的解答一样.

很显然，为了满足 $\sigma_z=0$，必須使 $\epsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}=-\mu\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{E}$，但从(21)式已知 σ_x，σ_y 及 τ_{xy} 包含 z 及 z^2 項，故应将挠度 w 取为

$$w(x, y, z)=w(x, y)+\frac{z^2}{2!}\varphi(x, y)+\frac{z^4}{4!}\psi(x, y),$$

这样就变成考虑 $\frac{\partial w}{\partial z}\neq 0$ 的情况. 这也就是开始考虑到垂直板面方向的可压縮(伸长)性. 但是显然，当引进 $\varphi(x, y)$ 一項后則(20)式应改为

$$\left.\begin{aligned}\gamma_x-\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=\frac{8}{h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\beta_x\right),\\ \gamma_y-\frac{\partial\varphi}{\partial y}&=\frac{8}{h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\beta_y\right).\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

如果将 $\sigma_z=0$，$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\mu(\sigma_x+\sigma_y)}{E}$ 的要求，近似地用 z 項系数相等表达，則

$$\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\mu}{1-\mu}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]=\frac{\mu z}{1-\mu}\left[\frac{\partial\beta_x}{\partial x}+\frac{\partial\beta_y}{\partial y}\right]=z\varphi,$$

因而

$$\varphi=\frac{\mu}{1-\mu}\left[\frac{\partial\beta_x}{\partial x}+\frac{\partial\beta_y}{\partial y}\right].\tag{26a}$$

利用(26)式可消去 φ，这样所得的 M_x, M_y, H, Q_x, Q_y 中除了 Q_x, Q_y 仍同(22)式外，M_x, M_y 及 H 将包含可压縮(伸长)項 φ 的影响，但是仍旧只出现三个待定量 β_x, β_y 及 w，这样边界条件将同(25)式.

如果又引进 $\psi(x, y)$ 項，則剪应力

$$\tau_{xz}=\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$
$$\tau_{yz}=\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

可以保証有 z^4 項. 由于在 z 項上的相应，因而在 $u(x, y, z)$ 及 $v(x, y, z)$ 中还应引入 $\frac{z^5}{5!}\delta_x$, $\frac{z^5}{5!}\delta_y$. 这一步可以反复进行引入新的二維待定量.

总的說来，这种方法在两类表达式中总是有 z 項的不一致性的問題. 当我們列出应力表达式同时考虑应变，

$$\left.\begin{aligned}&1.\ \tau_{xz}=\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad \tau_{yz}=\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right).\\ &2.\ \sigma_z=0,\ \text{則}\ \frac{\partial w}{\partial z}=\mu\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{E}=-\frac{\mu}{1-\mu}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right].\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

可見(27)式的第一类公式要求 u 的 z 項比 w 的 z 項高一次. 而第二类公式又要求 w 的 z 項比 u 及 v 的 z 項高一次. 我們在近似的过程中总註一种矛盾遺留下来. 当然在近似的过程中，将 z 写成无量綱形式小参数，則当薄板厚度与板的大小尺寸很小时，其高次 z 項的收縮是很显著的，这一不一致的存在在誤差上将是很小的.

用这样的办法进一步細致考虑垂直于板面的可压縮(伸长)性是不困难的.

应該指出，Reissner 提出了三个边界条件,本身是有重要意义的. 但是为了保持綫性分布的 σ_x, σ_y 及 τ_{xy} 而直接依賴 $\beta_x(x, y)$, $\beta_y(x, y)$ 以及 $w(x, y)$ 去考虑剪切及可压縮的影响,将使应力表达与变形表达間的矛盾看不清楚. 可以指出由于文献[3]中引用了静力可定的 $\sigma_z = -\frac{q(x, y)}{2}\left[1-\frac{2z}{h}\right] + \frac{q(x, y)}{4}\left[1-\left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]\left(\frac{2z}{h}\right)$,这一表达式本身将不是反对称的. 即使改用根据

$$\sigma_z\big]_{z=+\frac{h}{2}} = +q(x, y)/2, \quad \sigma_z\big]_{z=-\frac{h}{2}} = -q(x, y)/2,$$

$$\sigma_z = -\frac{3}{4}\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\right)\left[\frac{2z}{h} - \frac{1}{3}\left(\frac{2z}{h}\right)^3\right],$$

它們都将与根据

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\sigma_z = \frac{\mu(\sigma_x + \sigma_y)}{E}$$

相冲突. 至于文献[4]对文献[3]所指出的矛盾, z 方向的剪应力表达式,倘若用 $u = -z\beta_x$, $v = -z\beta_y$, 則

$$\tau_{xz}(x, y) = \frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

$$\tau_{yz}(x, y) = \frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

显然将与

$$\tau_{xz} = \frac{Q_x}{2h/3}\left[1-\left(\frac{2z}{h}\right)^2\right], \quad \tau_{yz} = \frac{Q_y}{2h/3}\left[1-\left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]$$

发生矛盾. 但由于 Reissner 利用給定应力形式的变应力的变分原理,这一矛盾并不重要,因为事实上在文献[3]中, 对剪应力 τ_{xz}, τ_{xy} 考虑了 u, v 的 z^3 項, 而在 σ_x, σ_y 及 τ_{xy} 中則不計入 u, v 的 z^3 項. 但是应該指出, 在文献[3]中 $w(x, y, z)$ 以 $w(x, y)$ 代替的情况下考虑可压縮(伸长)性是沒有意义的.

作为本文的結束, 我們对已有的工作可以分析如下: 1) 选取最少的二維項, 利用位移形式来表达,則得到 Germain-Lagrange 方程及相应靜力相当边界条件. 2) Reissner 利用了包括剪力在內的力的形式二維变量,正确地考虑了剪切变形部分. 3) Власов Б. Ф. 尽管概念上与[3]相同,但正如文献[5]所指出的, 应用了不明确的能量变分表达式,将它的結果完全改用变位移的变分原理,其結果将如本文所給出的一样. 4) 应用本文所給出的位移表达式的方法将不难获得比較合理的計入可压縮性效应的結果.

本文为了討論平板問題前提中存在的問題,沒有利用能量原理. 显然, 如果利用能量原理对于解决一种具体簡化的二維方案是步序明确的, 而且对于边界条件的給出是合宜方便的.

参 考 文 献

[1] Todhunter, J. and Pearson, K., History of the theory of clasticity, vol. I, 147—247, 348; **2**, **part 1**, 263.

[2] Timoshenko, S., Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, 1940.