21世纪独立院校本科规划教材 · 数学系列

丛书主编　郑玉美

高等数学

（下）

GAODENG SHUXUE（XIA）

主　编　姚志扬　马　军　尤正书

教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

21世纪独立院校本科规划教材·数学系列

丛书主编　郑玉美

高等数学(下)

主　　编　姚志扬　马　军
　　　　　尤正书
副主编　宋　翌　李　霞
　　　　　吴　跃

华中师范大学出版社

内 容 提 要

本教材以"三用"即够用、管用、会用为原则，以"三凸现"即凸现数学与文化、凸现数学的现代化、凸现数学的应用为特点编写而成，特别是在体现独立院校的"独"字上极富特色，全套教材从知识结构、难易程度、知识分量完全适合独立院校即"三本"学生之需。全书共五章，它们是常微分方程和差分方程简介、无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学。

本教材适用于独立院校本科高等数学课程教学，也可作为科技研究工作者的参考书。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下)/姚志扬 马军 尤正书主编.
—武汉：华中师范大学出版社，2006.8
(21 世纪独立院校本科规划教材 · 数学系列)
ISBN 7-5622-3415-9
Ⅰ. 高… Ⅱ. ①姚… ②马… ③尤… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. O13
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 059797 号

高等数学(下)

主编：姚志扬 马 军 尤正书©
责任编辑：曾太贵 **责任校对**：罗 艺 **封面设计**：罗明波
编辑室：第二编辑室 **电话**：027－67867362
出版发行：华中师范大学出版社
社址：湖北省武汉市珞喻路 152 号
电话：027－67863040(发行部) 027－67861321(邮购)
传真：027－67863291
网址：http://www.ccnup.com.cn **电子信箱**：hscbs@public.wh.hb.cn
经销：新华书店总经销
印刷：湖北京山德新印刷有限公司 **督印**：姜勇华
字数：387 千字
开本：787mm×960mm 1/16 **印张**：18.75
版次：2006 年 8 月第 1 版 **印次**：2006 年 8 月第 1 次印刷
印数：1－7 500 **定价**：28.00 元

欢迎上网查询、购书

21世纪独立院校本科规划教材·数学系列

丛书编写委员会

21世纪独立院校本科规划教材·数学系列

丛书主编　郑玉美

《高等数学》(下)编写委员会

主　　编　姚志扬(湖北大学知行学院)
　　　　　马　军(江汉大学文理学院)
　　　　　尤正书(湖北大学知行学院)
副 主 编　宋　翌(武汉生物工程学院)
　　　　　李　霞(武汉科技大学城市学院)
　　　　　吴　跃(武汉科技大学中南分校)
编　　者(以姓氏笔画为序)
　　　　　马　军(江汉大学文理学院)
　　　　　尤正书(湖北大学知行学院)
　　　　　许　虹(中国地质大学江城学院)
　　　　　宋　翌(武汉生物工程学院)
　　　　　李　霞(武汉科技大学城市学院)
　　　　　李圆媛(武汉工程大学)
　　　　　张汉萍(武汉职业技术学院)
　　　　　吴　跃(武汉科技大学中南分校)
　　　　　胡　楚(湖北大学知行学院)
　　　　　赵　慧(中国地质大学江城学院)
　　　　　彭虎峰(中南民族大学工商学院)

序　言

自1998年以来，短短几年里，我国高等教育的规模迅速扩大，各大学的独立院校异军突起，办学规模得到空前的发展，据权威部门统计，2005年，我国在校大学生为二千三百万，毛入学率为百分之二十一。关于连续扩招的是非得失已有不少议论见诸报端或网上，见仁见智，这里我们不予讨论。但可以肯定，今后一段时期，工作的重点是稳定规模、提高质量。

提高教学质量需要作持久的努力，需要做大量艰苦细致的工作。其中教材建设是一个很重要的方面。高等数学（包括线性代数、概率论初步等）作为大多数非数学类专业的一门必修的公共课，教学方法的改革与教材建设有许多工作要做。目前使用面较广且比较成熟的少数几种教材，一般来说内容偏多偏深，对于以培养应用型人才为主要目标的独立院校或高等数学课时较少的各类专业，不是很合适。作为公共课的高等数学教材，应该更多地注重概念的应用，使学生切实理解最基本的概念、背景和实质，并初步具备运用所学知识分析和解决实际问题的能力。为此，郑玉美教授领衔发起组织了十余所独立院校从事数学教学多年的、经验丰富的老师，对独立院校数学课程的改革作了认真的探讨，在此基础上编写了展现在读者眼前的《21世纪独立院校本科规划教材·数学系列》。

面对独立院校写出具有独特性的教材，是需要足够的勇气和非常艰苦的工作的，我赞赏郑玉美教授在这个方面作出的实实在在的尝试。

相信这套教材的出版，对于满足独立院校教学实际需要和推动教材改革都有一定作用。

任德麟

2006年8月

前　言

步入新世纪，中国的高等教育出现了崭新的格局.一大批独立院校相继成立，加入到传统的高等本科教育大军之阵线，它们常以“三本”的面目出现，正在成为高等教育的一支重要力量.这批新军（独立院校三本的学子们）在传统的教师们率领下手抱着传统的教材以传统的方式苦战了好几个春秋，无论是独立院校的执教者还是勤奋的学子们都盼望能有适合于这批规模巨大的新型的独立院校的教材，这是势在必行，又是势在必得的时代所需.郑玉美教授在成功推出《21世纪高等职业教育规划教材·数学系列》后，吸纳了湖北大学知行学院、武汉科技大学中南分校、武汉科技大学城市学院、中国地质大学江城学院、江汉大学文理学院、中南民族大学工商学院、武汉生物工程学院、武汉工程大学、武汉工业职业技术学院以及武汉职业技术学院（本科部）等独立院校一批经验丰富的教育专家又编写了一套具有“三用三凸一独”的《21世纪独立院校本科规划教材·数学系列》，以满足独立院校教学之急需.这套用心力作的教材具有以下特点：

1. 以“三用”为原则

（1）够用　删去传统本科教材中难而繁的内容，保留理、工、农、医、管各本科专业的最基本的内容，达到满足本科高度所必需的最低限度，够用即可.

（2）管用　增添以往传统教材中没有的同时又是必需的知识内容，使教材适合三类本科各专业之需要，达到管用的效果.

（3）会用　淡化传统本科教材偏重理论的倾向，删去理论性较强的内容，强调数学知识的应用，力求学以致用、学后会用，增强学生学习数学的信心与兴趣.

2. 以“三凸现”为特色

（1）凸现数学与文化的联系　对重要的数学概念与理论，着重讲解它们的历史背景、产生的过程及影响，同时有机地结合一些有趣的数学故事及有影响力的数学家的逸事进行讲解，尽量让学生全面了解数学，达到提高学生的综合素质的目的.

（2）凸现数学现代化教学手段的应用　将数学软件的使用有机地融合进教材中，不盲目追求运算技巧，着力于培养学生解决实际问题的能力.

（3）凸现数学的应用性　如把有重要应用的“微元法”贯穿在整个高等数学教材中.

3. 体现独立院校的“独”字，全套教材从知识的分量、难易程度、结构分布等方

面要适合独立院校三本之需要.如高等数学以一元微积分、多元微积分为主线,而多元微积分浓缩为多元微分学与多元积分学两大块,将微分方程、无穷级数放在一元微积分学之后,这样使“三本”学生们易于接受掌握.

为了使本套教材有更宽广的适应性,可供独立院校中的高等专科生选用,在保证科学性和逻辑性的前提下,我们在编写时更注重培养学生的良好的学习习惯,提高学生的综合素质.为此,我们力求全套教材语言准确生动、简洁而清晰,思想有条有理、精练而富逻辑.在每章正文后附有本章小结,设计一个“本章知识结构导航图”,让读者们对全章主要内容一目了然;归纳小结“本章主要内容及重点、难点”,让同学们心中有一个全章小“仓库”.此外,还安排了全章综合练习,供学有余力的学生去品尝一下课外的套餐.

本套教材共六种:《高等数学》(上)、《高等数学》(下)、《高等数学全程辅导与提高》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《概率论与数理统计学习指导》.

全套书的框架结构、统稿定稿由郑玉美教授及各册的主编负责,齐民友、任德麟、邓宗琦教授认真审阅了全部教材的原稿,提出了许多建设性意见,在此对三位资深教授表示衷心的感谢.

参加《高等数学》(下)编写的有尤正书、马军、宋翌、李霞、李圆媛、许虹、张汉萍、胡楚、吴跃、赵慧、彭虎峰等.全书由姚志扬、马军、尤正书统稿、定稿.

虽然各位编者十分努力,但由于我们的水平有限,成书时间又很仓促,本套教材还可能有不少缺点和错误,欢迎广大师生、读者批评指正.

编委会

2006 年 8 月

目　录

第6章　常微分方程和差分方程简介

“数学的有机统一，是这门科学固有的特点，因为它是一切自然科学的基础.为了实现这个目标，让新世纪给这门科学带来天才的大师和无数热忱的信徒吧.”

——希尔伯特

函数是反映客观事物内部联系的重要概念，如何寻求函数关系在理论上、实践上具有重要意义，实际上，在多数问题中不能直接找出所需要的函数关系，而只能获知所需找的函数与其导数之间的关系式，这就是所谓的微分方程，根据它，用数学方法求出所需的函数，这就是所谓的解微分方程.本章主要介绍微分方程的一些基本概念及其常用的解法，同时也介绍与微分方程相近且在经济学中应用广泛的差分方程及其解法.

6.1　常微分方程的基本概念

我们通过几何中的切线问题与物理学中的镭衰变问题来说明微分方程的基本概念.

例1　已知一曲线 $y=f(x)$ 上任一点处的切线斜率为 $3x^2$，且此曲线经过点(1,3)，求此曲线的方程.

解　根据导数的几何意义，得以下方程：

$$\frac{dy}{dx}=3x^2. \tag{6-1}$$

此外，未知函数还应满足以下条件：

$$x=1\text{ 时},y=3. \tag{6-2}$$

要找出满足这两个等式的曲线，把(6-1)式两端积分，得

$$y=x^3+C. \tag{6-3}$$

此处 C 是任意常数.

再用条件(6-2)代入得 $3=1+C$，故 $C=2$，即所求曲线方程为

$$y=x^3+2. \tag{6-4}$$

例2　根据实验，放射性元素镭会不断放出射线而逐渐减少其质量，这种现象叫衰变，其衰变的速率与元素剩余的质量成正比，已知 $t=0$ 时存镭的质量为 m_0 克，求任意时刻 t 的存镭量.

解　设任意时刻 t 的存镭量为 $m(t)$ 克，由衰变速度与元素剩余质量成正比，

令正比例系数为 $a(a<0)$,得以下方程:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=am \tag{6-5}$$

此外,函数 $m(t)$ 应满足以下条件:

$$m(0)=m_0 \tag{6-6}$$

先将(6-5)式变成

$$\frac{\mathrm{d}m}{m}=a\mathrm{d}t,$$

两边积分

$$\int\frac{\mathrm{d}m}{m}=\int a\mathrm{d}t,$$

解得

$$\ln m=at+C_1,$$

得

$$m=\mathrm{e}^{at+C_1}=\mathrm{e}^{C_1}\cdot\mathrm{e}^{at}.$$

令常数 $\mathrm{e}^{C_1}=C$,得

$$m=C\mathrm{e}^{at}, \tag{6-7}$$

由条件(6-6)得

$$m_0=C\mathrm{e}^{a0}=C,$$

即任意时刻 t 的存镭量为 $m(t)=m_0\mathrm{e}^{at}$ 克. (6-8)

上述两个例子中的关系式(6-1)和(6-5)中都含有未知函数的导数,它们都是微分方程,一般地,可归纳得到以下有关微分方程的重要概念:

定义 6.1 含有未知函数的导数或微分,同时也可能含有未知函数和自变量的方程叫**微分方程**.在微分方程里,如果未知函数只与一个自变量有关,此方程叫**常微分方程**.如果未知函数与两个以上的自变量有关,此方程就叫**偏微分方程**.

这里只介绍常微分方程,所以凡不特别说明,后面常微分方程就简称为微分方程或方程.

例如:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x+1,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=x^2,$$

$$y'''+3y''+y=0,$$

$$3x^2\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x=0.$$

以上方程均是常微分方程.

定义 6.2 在微分方程里,未知函数的导数或微分的最高阶数,叫做微分方程的**阶**.

上面的前三个方程分别是一阶、二阶和三阶的，最后一个方程是一阶的. n 阶微分方程的一般形式可写为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0\ (y\text{ 是未知函数},x\text{ 是自变量}).$$

以上例 1，例 2，在建立一个微分方程的过程中，即找出自变量、未知函数、未知函数的导数之间的关系式时，往往会同时出现这些量之间需要满足的伴随条件，我们将这些条件称为初始条件，通常初始条件与微分方程放在一起用以下形式表达：

$$\begin{cases} F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0, \\ y(x_0)=y_0, \\ y'(x_0)=y'_0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

由上述两例我们可以看到找满足方程的函数需要积分，进而出现任意常数，而初始条件就是用以确定函数中所含的任意常数.

定义 6.3　若一个函数代入微分方程后，能使方程成恒等式，这样的函数就叫做微分方程的**解**，求微分方程解的过程叫做**解微分方程**. 如果在微分方程的解中含有任意常数，且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同，那么这样的解叫做微分方程的**通解**，也称**通积分**. 上述两例中的(6-3) 和(6-7) 都是通解. 在通解中利用初始条件确定了任意常数的数值代入通解后所得到的解叫做微分方程的**特解**. 上述两例中的(6-4) 和(6-8) 都是特解.

习题 6.1

1. 简述常微分方程的概念及其分类.
2. 简述常微分方程的解的类型及初始条件的作用.
3. $y''-3y'+3y=0$ 和 $y^2-3y+3=0$ 哪个是微分方程，哪个不是？
4. 验证给出的函数是否为下列方程的解，如果是，它是通解还是特解？
   (1) $y=3\sin x-4\cos x,\quad y''+y=0$;
   (2) $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$，$C_1,C_2$ 为任意常数，　$y''+\omega^2y=0$.

6.2　一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y')=0.$$

此方程须根据方程的不同特点分别求解.

6.2.1　可分离变量的微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y) \tag{6-9}$$

的一阶微分方程叫**可分离变量方程**.

此方程的特点是方程右端为只含 x 的函数与只含 y 的函数的积.

形如

$$\varphi(x)\mathrm{d}x=\psi(y)\mathrm{d}y \tag{6-10}$$

的一阶微分方程叫**变量已分离方程**.

对变量已分离方程(6-10)的两边同时积分得

$$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\int\psi(y)\mathrm{d}y.$$

若 $\varphi(x)$ 的原函数是 $\Phi(x)$，$\psi(y)$ 的原函数是 $\Psi(y)$，那么 $\Phi(x)=\Psi(y)+C$ 就是变量已分离方程(6-10)的通解，尽管这个通解的表达式可能是隐函数形式.

对可分离变量方程(6-9)，只要 $g(y)$ 恒不为零，将方程两边同时除以 $g(y)$，再同时乘以 $\mathrm{d}x$ 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x.$$

这就是变量已分离方程，只需对两边同时积分即可. 我们把这种求解可分离变量方程的方法叫**分离变量法**.

例 1 求微分方程 $xy^2\mathrm{d}x+(1+x^2)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解 原方程可变为

$$\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}y}{y^2}\quad(y\neq 0),$$

两边积分

$$\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int-\frac{\mathrm{d}y}{y^2},$$

得

$$\frac{\ln(1+x^2)}{2}=\frac{1}{y}+C\text{ 或 }y\ln(1+x^2)=2+2Cy.$$

即为方程的通解(这里不一定非要解出 y 的显式).

例 2 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 的通解.

解 分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x,$$

两边积分

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 2x\mathrm{d}x,$$