教育改变人生
JIAOYU GAIBIAN RENSHENG
江西教育出版社

江西省教育厅教学教材研究室 编

高中数学目标测试

二年级·上学期

GAOZHONG SHUXUE MUBIAOCESHI

江西教育出版社
JIANGXI EDUCATION PUBLISHING HOUSE

教育改变人生
JIAOYU GAIBIAN RENSHENG
江 西 教 育 出 版 社

高中数学
目标测试
二年级·上学期
GAOZHONG SHUXUE
MUBIAOCESHI

封面设计: 辜刚刚 徐艳萍

ISBN 7-5392-2976-4

9 787539 229768 >

高中数学目标测试
二年级·上学期
江西省教育厅教学教材研究室编
江西教育出版社出版
（南昌市抚河北路61号 邮编：330008）
江西省新华书店发行
江西新华九江印刷总厂印刷
787毫米×1092毫米 16 开本 7 印张
2006年7月第1版 2006年7月第1次印刷
ISBN 7-5392-2976-4/G·2908 定价：8.00 元

说　明

2003年秋季开始，我省使用根据《全日制普通高级中学课程计划(试验修订稿)》和各科新教学大纲编写的新教材.新教材进一步体现了新的课程理念，突出对高中学生创新意识和实践能力的培养.为了帮助教师更好地指导学生学习新教材，我室组织各学科教学经验丰富的骨干教师编写了本套供高中各年级使用的《目标测试》.

本套《目标测试》紧扣教学大纲和新教材，结合我省高中教学实际，既有学习目标要求，又有基础知识、基本技能和基本方法的训练，着重加强学生的综合运用能力，激发学习兴趣，倡导探究性学习，同时面向全体学生．练习题编排难易适当，分量适中，可与新教材配套使用.

因我们接触新教材的时间有限，本套《目标测试》若有考虑不周的地方，欢迎广大师生提出意见，以便我们今后做好修订完善工作.

本册由赵明朱、张丽、柴友根、王全鉴编写，蔡建秀统稿.

江西省教育厅教学教材研究室

2006年7月

目 录

第六章　不等式

6.1　不等式的性质

A　组

一、选择题：

1. 已知 $a>b,ab>0$，则$\frac{1}{a}$与$\frac{1}{b}$的大小关系是(　　).

(A)$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　(B)$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　(C)$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$　　(D)以上皆有可能

2. 若 $a<b<0$，则下列不等式中不一定成立的是(　　).

(A)$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　(B)$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$　　(C)$|a|>|b|$　　(D)$a^4>b^4$

3. 已知 a、b 分别对应数轴上的两点 A、B，且 A 在原点的右侧，B 在原点的左侧，则下列不等式中成立的是(　　).

(A)$a-b\leqslant 0$　　(B)$\frac{a}{b}>-\frac{a}{b}$　　(C)$|a|>|b|$　　(D)$a^2+b^2\geqslant -2ab$

4. 下列命题中，①$a>b\Rightarrow\frac{a}{b}>1$；②$a>b\Rightarrow\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$；③$a>b\Rightarrow a^{2n+1}>b^{2n+1}(n\in\mathbf{N})$；④$a>b\Rightarrow|a|>b$；⑤$|a|>b\Rightarrow a>b$；⑥$a>|b|\Rightarrow a>b$. 真命题的序号为(　　).

(A)②④⑥　　(B)③④⑤　　(C)②③⑥　　(D)①③⑤

二、填空题：

5. $-1<a<b<0$，则$\frac{1}{a},\frac{1}{b},a^2,b^2$ 的大小关系是________(从小到大排列).

6. 若 $a<b<0$，则 a^2b 与 ab^2 之间的大小关系是________.

7. 若 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$M=\log_a(a^3+1)$，$N=\log_a(a^2+1)$，则 M 与 N 的大小关系是________.

三、解答题：

8. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，比较 a^4+b^4 与 a^3b+ab^3 的大小.

9. 设 $0<a<b,a+b=1$，把$\frac{1}{2},a,b,\frac{b}{a},\frac{b^2}{a^2}$按从小到大的顺序排列.

B　组

10. 已知 $a>b>0$，$c<d<0$，求证 $\sqrt{-\frac{a}{d}}-a^2c>\sqrt{-\frac{b}{c}}-b^2d$.

11. 已知 $a>0$，$b>0$，$a\neq b$，$n\in\mathbf{N}$，比较 ab^n+ba^n 与 $a^{n+1}+b^{n+1}$ 的大小.

12. 已知 $\alpha\in(0,\pi)$，证明：$2\sin2\alpha\leqslant\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

研究题：

已知：a、b、c 都是正数.

求证：$(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\geqslant a^{\frac{b+c}{2}}b^{\frac{c+a}{2}}c^{\frac{a+b}{2}}$.

6.2 算术平均数与几何平均数

A 组

一、选择题：

1. 设 a、b 是不相等的正数，则(　　).

(A) $\frac{a+b}{2}<\sqrt{ab}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$　　(B) $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

(C) $\sqrt{ab}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<\frac{a+b}{2}$　　(D) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$

2. 已知 $x>1$，$y>1$，且 $\lg x+\lg y=4$，则 $\lg x\lg y$ 的最大值是(　　).

(A) 4　　(B) 2　　(C) 1　　(D) $\frac{1}{4}$

3. 下列不等式的证明过程正确的是(　　).

(A) 若 $a,b\in\mathbf{R}$，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}=2$

(B) 若 x、y 是正实数，则 $\lg x+\lg y\geqslant 2\sqrt{\lg x\cdot\lg y}$

(C) 若 x 是负实数，则 $x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$

(D) 若 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $ab<0$，则 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=-(-\frac{a}{b}-\frac{b}{a})\leqslant -2\sqrt{(-\frac{a}{b})\cdot(-\frac{b}{a})}=-2$

4. 已知 a、b、c、d 均为实数，则下列命题：①若 $ab>0$，$bc-ad>0$，则 $\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$；②若 $ab>0$，$\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$，则 $bc-ad>0$；③若 $bc-ad>0$，$\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$，则 $ab>0$. 其中假命题的个数是(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

二、填空题：

5. 若 $a>1$，则 $a+\frac{1}{a-1}$ 的最小值是________.

6. 函数 $y=\sqrt{3x}+\sqrt{1-3x}$ 的最大值为________.

7. a、b 是两个不同的正数，且 $a^2+\frac{1}{4}b^2=1$，则 ab 与 a^2b^2 的大小关系是________.

三、解答题：

8. 已知 $a,b,c\in(0,+\infty)$ 且 $a+b+c=1$，求证：$\frac{ab+bc+ac}{abc}\geqslant 9$.

9. 已知 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$，求证：$\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}\leqslant 2$.

B 组

10. 已知 a、b、c 为正数，求证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{9}{a+b+c}$.

11. 若 x、y 是正数，求证：$(x+\frac{1}{2y})^2+(y+\frac{1}{2x})^2\geqslant 4$.

12. 某商场预计全年分批购入每台价值 2000 元的电视机共 3600 台，每批都购入 x 台（x 是自然数），且每批均需付运费 400 元，贮存购入的电视机全年所付保管费与每批购入电视机的总价值（不含运费）成正比．若每批购入 400 台，则每年需用于运输和保管的总费用为 43600 元，现在全年只有 24000 元资金可用于支付这笔费用，请问：能否恰当安排每批进货的数量使资金够用？写出你的结论，并说明理由.

研究题：

已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，且 $a+b+c=1$，求满足不等式 $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<k$ 的最小整数 k 的值.

6.3 不等式的证明

A　组

一、选择题：

1. 若 $a<b<0$，则下列不等式中恒不成立的不等式是(　　).

(A) $a^2<b^2$　　(B) $\frac{a}{b}>1$　　(C) $a<4-b$　　(D) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

2. $a,b\in\mathbf{R}$，那么 $a^2+b^2<1$ 是 $ab+1>a+b$ 的(　　).

(A)充要条件　　(B)必要不充分条件

(C)充分不必要条件　　(D)既不充分也不必要条件

3. 在△ABC 中，$\angle C=90°$，则 $\frac{a+b}{c}$ 的取值范围是(　　).

(A) $(0,\sqrt{2}]$　　(B) $(0,2)$　　(C) $(1,\sqrt{2}]$　　(D) $[1,2)$

4. 下列函数中，最小值是 4 的是(　　).

(A) $y=\sin x+\frac{4}{\sin x}, x\in(0,\pi)$　　(B) $y=\tan x+\frac{4}{\tan x}, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

(C) $y=3^x+4\cdot 3^{-x}, x\in\mathbf{R}$　　(D) $y=\lg x+4\log_x 10,(x>0$ 且 $x\neq 1)$

二、填空题：

5. 若 $a>b>0$，则 a^ab^b ________ a^bb^a(填“>”或“<”).

6. 若 $a>0$ 且 $a\neq 1$，则 $\log_a(a+1)$ ________ $\log_a(1+\frac{1}{a})$(填“>”或“<”).

7. 设 $a,b\in\mathbf{R}^+$，则 $a+b+\frac{1}{\sqrt{ab}}$ 的最小值是________.

三、解答题：

8. 设 $x,y\in\mathbf{R}$，且 $x^2-2xy+2y^2=2$，求证：$|x+y|\leqslant\sqrt{10}$.

9. 求证：$\frac{1}{2}(a^2+b^2)+1\geqslant\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{b^2+1}$.

B 组

10. 已知 $a>0,b>0,a+b=1$,求证:$(1+\frac{1}{a^2})(1+\frac{1}{b^2})\geqslant 25$.

11. 若 a、b、c 均为正数,且满足 $a+b+c=1$,求证 $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5$.

12. 已知 $x^2+y^2=1$,求证:$|x^2+2xy-y^2|\leqslant\sqrt{2}$.

研究题:

已知函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$,当正实数 p、q 满足 $p+q=1$ 时,求证:$pf(x)+qf(y)\geqslant f(px+qy)$对于任意实数 x、y 均成立.

6.4 不等式的解法举例

A 组

一、选择题：

1. 下列变形不是同解变形的是(　　).

(A)$\frac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$　　(B)$\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)\geqslant 0$ 且 $g(x)\neq 0$

(C)$\frac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow\frac{g(x)}{f(x)}<0$　　(D)$\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant 0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$

2. 设 $a<-1$，则关于 x 的不等式 $a(x-a)(x-\frac{1}{a})<0$ 的解集是(　　).

(A)$\{x|x<a$ 或 $x>\frac{1}{a}\}$　(B)$\{x|x>a\}$　(C)$\{x|x>a$ 或 $x<\frac{1}{a}\}$　(D)$\{x|x<\frac{1}{a}\}$

3. 不等式 $\sqrt{4-x^2}+\frac{|x|}{x}\geqslant 0$ 的解集是(　　).

(A)$[-2,2]$　(B)$[-\sqrt{3},0)\cup(0,2]$　(C)$[-2,0)\cup(0,2]$　(D)$[-\sqrt{3},0)\cup(0,\sqrt{3}]$

4. 已知函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象如图 6－1，则不等式 $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ 的解集为(　　).

(A)$[5,25]$　(B)$(-5,25]$

(C)$(5,25]\cup(-15,-5)$　(D)$(-15,5)\cup[15,25]$

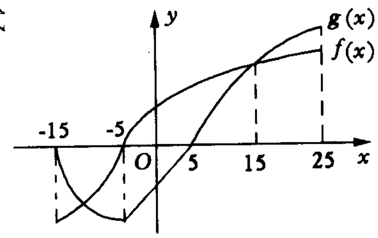

图 6－1

二、填空题：

5. 不等式 $|2x+1|>3x-2$ 的解集是________.

6. $\frac{x(x-3)}{9-x^2}\leqslant 0$ 的解集是________.

7. 已知关于 x 的不等式 $\frac{(x-a)(x-b)}{x-c}\geqslant 0$ 的解集为 $-2\leqslant x<3$ 或 $x\geqslant 4$，则不等式 $\frac{x-c}{(x-a)(x-b)}\leqslant 0$ 的解集是________.

三、解答题：

8. 解下列不等式：

(1)$(-3x+2)(4x+2)^2(x-1)^3(x-3)\leqslant 0$；　　(2)$|x+3|-|2x-1|>\frac{x}{2}+1$；

(3) $\dfrac{x-5}{x^2-2x-3}\leqslant 1$.

9. 不等式$(5-a)x^2-6x+a+5>0$恒成立，求实数 a 的取值范围.

B　组

10. 设函数 $f(x)=2^{|x+1|-|x-1|}$，求使 $f(x)\geqslant 2\sqrt{2}$成立的 x 的取值范围.

11. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$，其中 $a>0$，试解不等式 $f(x)\leqslant 1$.

12. 解不等式$\sqrt{\log_a x+1}>1-\log_a x$(其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$).

研究题：

已知二次函数 $f(x)$的二次项系数为 a，且不等式 $f(x)>-2x$ 的解集为$(1,3)$.

(1)若方程 $f(x)+6a=0$，有两个相等的实根，求 $f(x)$的解析式.

(2)若 $f(x)$的最大值为正数，求 a 的取值范围.

6.5 含有绝对值的不等式

A 组

一、选择题：

1. 若 $a,b,c\in\mathbf{R}$，且 $|a-c|<|b|$，则(　　).

(A) $|a|>|b|+|c|$　(B) $|a|<|b|-|c|$　(C) $|a|<|b|+|c|$　(D) $|a|>|c|-|b|$

2. 如果 x、y 都是非零实数，则下列各式中不恒成立的是(　　).

(A) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$　(B) $2\sqrt{xy}\leqslant|x+y|\ (xy>0)$

(C) $\left|\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right|\geqslant2$　(D) $|x+y|\geqslant x-y$

3. 已知实数 a、b 满足 $ab<0$，则(　　).

(A) $|a+b|>|a-b|$　(B) $|a+b|<|a-b|$

(C) $|a-b|<||a|-|b||$　(D) $|a-b|<|a|+|b|$

4. 已知函数 $f(x)=-2x+1$，对于任意正数 ξ，使得 $|f(x_1)-f(x_2)|<\xi$ 成立的一个充分但不必要条件是(　　).

(A) $|x_1-x_2|<\xi$　(B) $|x_1-x_2|<\dfrac{\xi}{2}$　(C) $|x_1-x_2|<\dfrac{\xi}{4}$　(D) $|x_1-x_2|>\dfrac{\xi}{4}$

二、填空题：

5. 能使不等式 $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|>\dfrac{1}{5}$ 成立的正整数 n 是________.

6. 设 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$，则不等式 $|f^{-1}(x)|>1$ 的解集是________.

7. 不等式 $\left|\dfrac{x}{x+2}\right|>\dfrac{x}{x+2}$ 的解集是________.

三、解答题：

8. 已知 $a^2+b^2+c^2=1$，$x^2+y^2+z^2=1$，求证：$|ax+by+cz|\leqslant1$.

9. 已知 $|a|<\xi$，$|b|>\xi$，求证：$|a+2b|>\xi$.

10. 已知 $|a|<1$，$|b|<1$，求证：$\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$.

B 组

11. 求证:(1)$|x+1|+|x-1|\geqslant 2$;(2)$|x+2|+|x+1|+|x-1|+|x-2|\geqslant 6$.

12. 已知 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$,当$|a|\neq|b|$时,求证:(1)$|a+b|<|f(a)+f(b)|$;(2)$|a-b|>|f(a)-f(b)|$.

13. 证明存在一个正数 m,使对任意实数 x,不等式$\left|\dfrac{2x}{x^2+x+1}\right|\leqslant m$ 总成立.

研究题:

已知函数 $f(x)$和 $g(x)$的图象关于原点对称,且 $f(x)=x^2+2x$.

(1)求出函数 $g(x)$的解析式;

(2)解不等式 $g(x)\geqslant f(x)-|x-1|$;

(3)若 $h(x)=g(x)-\lambda f(x)+1$ 在$[-1,1]$上是增函数,求实数 λ 的取值范围.

典型例题

例 1　已知 $a>0,b>0$，且 $a+b=1$，求证：$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geqslant\frac{25}{4}$.

分析：此题入口较宽，应随时根据变形后式子的特点，联系要证的不等式来分析思考证明方法.

证法一：(分析综合法)

欲证原不等式成立，只需证明

$4(ab)^2+4(a^2+b^2)-25ab+4\geqslant0\Leftrightarrow4(ab)^2-33ab+8\geqslant0\Leftrightarrow ab\leqslant\frac{1}{4}$ 或 $ab\geqslant8$.

$\because a>0,b>0,a+b=1,\therefore ab\geqslant8$ 不可能成立．$\because 1=a+b\geqslant2\sqrt{ab},\therefore ab\leqslant\frac{1}{4}$，得证．

证法二：(均值代换法)

设 $a=\frac{1}{2}+t,b=\frac{1}{2}-t,-\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}$，则

$$左式=\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{ab}=\frac{[(\frac{1}{2}+t)^2+1][(\frac{1}{2}-t)^2+1]}{(\frac{1}{2}+t)(\frac{1}{2}-t)}=\frac{\frac{25}{16}+\frac{3}{2}t^2+t^4}{\frac{1}{4}-t^2}\geqslant\frac{25}{4}.$$

显然等号当且仅当 $t=0$ 时，即 $a=b=\frac{1}{2}$ 时成立.

证法三：(三角代换法)

设 $a=\sin^2\theta,b=\cos^2\theta,\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，则

$$左式=(\sin^2\theta+\frac{1}{\sin^2\theta})(\cos^2\theta+\frac{1}{\cos^2\theta})=\frac{(4-\sin^2 2\theta)^2+16}{4\sin^2 2\theta}.$$

$\because \sin^2 2\theta\leqslant1,\therefore 4-\sin^2 2\theta\geqslant4-1=3.$

$\therefore (4-\sin^2 2\theta)^2+16\geqslant25$. 又 $\frac{1}{4\sin^2 2\theta}\geqslant\frac{1}{4}$,

$\therefore \frac{(4-\sin^2 2\theta)^2+16}{4\sin^2 2\theta}\geqslant\frac{25}{4}.$

点评：根据已知条件，从不同的角度考虑就得到不同的证法，是不等式证明"活"的特色，应给予足够重视.

例 2　甲、乙两地相距 s 千米，汽车从甲地匀速行驶到乙地，速度不得超过 c 千米/小时．已知汽车每小时的运输成本(元)由可变部分和固定部分组成，可变部分与速度 v(千米/小时)的平方成正比，比例系数为 b，固定部分为 a 元.

(1)将全程运输成本 y(元)表示为速度 v(千米/小时)的函数，并指出该函数的定义域；

(2)为使全程运输成本最小，汽车应以多大速度行驶?

分析：题中给出的是每小时的运输成本，因此要计算全程运输成本，需要计算全程时间．根据题意，每小时运输成本的可变部分为 bv^2，由题意可得全程运输成本为 $y=\frac{s}{v}(a+bv^2)=(\frac{a}{v}+bcv)s(0<v\leqslant c)$，再求最值.

解:(1)$y=(a+bv)^2\cdot\frac{s}{v}=(\frac{a}{v}+bv)\cdot s, v\in(0,c]$.

(2)$\because s、a、b、v$都是正数,$\therefore(\frac{a}{v}+bv)s\geqslant 2s\sqrt{ab}$(当且仅当$\frac{a}{v}=bv, v=\sqrt{\frac{a}{b}}$时取等号).

①若$\sqrt{\frac{a}{b}}\leqslant c$,则$v=\sqrt{\frac{a}{b}}$时,全程运输成本最小;

②若$\sqrt{\frac{a}{b}}>c$,$\because(\frac{a}{v}+bcv)s-(\frac{a}{c}+bc)s=\frac{s}{vc}(c-v)(a-bcv)$及$c-v\geqslant 0$且$a>bc^2$,即$a-bcv\geqslant a-bc^2>0$,$\therefore(\frac{a}{v}+bv)s\geqslant(\frac{a}{c}+bc)s$(当且仅当$v=c$时取等号).$\therefore v=c$时,全程运输成本最小.

例 3 证明不等式$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

分析:此题是与自然数有关的命题,故可考虑用数学归纳法证明.

解法一:(1)$n=1$时,不等式的左端$=1$,右端$=2$,显然$1<2$.$\therefore n=1$时,命题成立.

(2)假设当$n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时,命题成立,即$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}$,则

当$n=k+1$时,

左$=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$,

右$=2\sqrt{k+1}$.

由于
$$2\sqrt{k+1}-(2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}})=2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$
$$>\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=0.$$

$\therefore 2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$.即$n=k+1$时,命题也成立.

解法二:因为对于任意自然数k,都有$\frac{1}{\sqrt{k}}<\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$,

$\therefore 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{1}-\sqrt{0})+2(\sqrt{2}-\sqrt{1})+\cdots+2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=2\sqrt{n}$,从而得证.

点评:放缩法是一种证明的技巧,要想用好它,必须有目标,目标可从要证的结论中考察.

例 4 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,已知$a_1=1, a_2=6, a_3=11$,且$(5n-8)S_{n+1}-(5n+2)\cdot S_n=A\cdot n+B(n=1,2,3,\cdots$,其中$A、B$为常数).

(1)求A与B的值;

(2)证明数列$\{a_n\}$为等差数列;

(3)证明不等式$\sqrt{5a_{mn}}-\sqrt{a_m\cdot a_n}>1$对任何整数$m、n$都成立.

解:(1)由已知得$S_1=a_1=1, S_2=a_1+a_2=7, S_3=a_1+a_2+a_3=18$.

由$(5n-8)S_{n+1}-(5n+2)S_n=A\cdot n+B$可知$\begin{cases}-3S_2-7S_1=A+B,\\2S_3-12S_2=2A+B,\end{cases}$