华东师范大学
函授教材

代数習題解答

华东师范大学数学系
代数教学小組編

（上册）

华东师范大学函授部

代数习题解答

华东师范大学数学系
代数教学小组

上册

华东师范大学函授部

代数习题解答

（上 册）

华东师范大学数学系代数教学小組編

（內部讀物　凭証发行）

*

华东师范大学函授部出版

（上海中山北路 3663 号）

上海市印刷三厂印刷　新华書店上海发行所发行

*

开本 787×1092 公厘 1/27　印張 4 10/27　字数 96,000

1959 年 5 月第一版

1959 年 5 月第一次印刷

印数 1—4,100

定 价：(七) 0.50元

前　言

为了帮助函授生进行学习，我們作出了函授用代数习题解答，并且印发給函授生。

作习题的目的在于帮助学者深入掌握教材內容，了解各个基本概念、定理及証明方法，并把所得結果用于解决問題。我們作出的这本习题解答是供函授生檢查自己所作习題是否正确用的。习題解答的使用必須得当。我們着重指出，最主要的是鑽研教材，掌握教材內容，有了这个基础才动手作习題。习題作出后，先經学习小組互相檢查，如有不同意見不能解决再查对习題解答。如果有些习題作不出，应当再研究教材內容，檢查一下是否基本概念沒有弄清，或者定理証明要点沒有抓住，或者对所得結果理解不夠。把这种地方再領会一下以后繼續解題。倘使經过几次反复鑽研与思考，习題还是作不出，那末可查习題解答。

在解某些习題时，我們只写出了解法要点，函授生作习題时还需要把整个推理或計算过程写出来。在我們的解法中引用了由某些概念或定理推出的結果时，函授生也应仔細推考这个結果的由来。不过上面所說的兩种情况在这本解答中实际上是很少的。此外，我們对每一习題差不多都只用了一种解法，然而这并不是說不存在别的解法。

講义中所給出的习題比較多，其中一部分是每个函授生必須作的，另外一部分則可以作也可以不作，根据各个人的学习情况来决定。当然，能作出更多的习題对学习总是有帮助的。

必須作出的习題有下面这一些：

第　一　章

§1．2, 3, 4, 6;

§2．1, 2, 3, 4, 5,

§3．1, 2, 3;

§4. 1, 2, 3, 6;

§5. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;

§6. 1, 2, 3, (i), (iii), (iv) (v) (vi);

§7. 1;

§8. 1, 3, 4, 5。

第二章

§1. 1, 2, 3;

§2. 1, (i), (ii), 2, 3, 6, 8, 9, 10, 11;

§3. 1, 2, 3, 5;

§4. 1, 2, 3, 4;

§5. 2, 3, 4, 6;

§6. 1, 2, 3, 4;

§7. 1。

目　录

前　言

第一章　行列式……………………………………………………(1)

§1．数学归納法……………………………………………………(1)

§2．数环与数体……………………………………………………(4)

§3．二阶和三阶行列式……………………………………………(9)

§4．排列和置換……………………………………………………(11)

§5．n 阶行列式……………………………………………………(13)

§6．子式和代数余子式　行列式的依行依列展开………………(17)

§7．克萊姆規則……………………………………………………(22)

§8．拉普拉斯定理　行列式的相乘規則…………………………(22)

第二章　綫性方程組………………………………………………(27)

§1．n 維向量……………………………………………………(27)

§2．向量的綫性相关性……………………………………………(28)

§3．矩陣的秩………………………………………………………(34)

§4．矩陣的初等变換………………………………………………(37)

§5．綫性方程組……………………………………………………(42)

§6．齐次綫性方程組………………………………………………(49)

§7．用初等方法解綫性方程組……………………………………(53)

第三章　綫性規划…………………………………………………(57)

第四章　矩陣的乘法………………………………………………(60)

§1．矩陣的乘法……………………………………………………(60)

§2．非退化方陣……………………………………………………(68)

第五章　二次齐式 ……………………………………………………（75）

§1．化二次齐式为典型……………………………………………（75）
§2．正规二次齐式……………………………………………………（80）
§3．正定二次齐式……………………………………………………（83）

第六章　基本概念 ……………………………………………………（87）

§1．代数运算…………………………………………………………（87）
§2．群…………………………………………………………………（89）
§3．环…………………………………………………………………（96）
§4．体…………………………………………………………………（101）
§5．同構………………………………………………………………（105）

第一章 行列式

§1. 数学归納法

試用数学归納法証明:

1. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

証明: i) 第一个断語 p_1 ($n=1$ 时), 显然是正确的, 因为 $1=1^2$

ii) 現設第 n 个断語 p_n 是正确的, 即

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

証明第 $n+1$ 个断語也是正确的

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)+[2(n+1)-1]=$$
$$=n^2+[2(n+1)-1]=n^2+2n+1=(n+1)^2.$$

故
$$1+3+5+\cdots+(2n-1)+[2(n+1)-1]=(n+1)^2$$

即第 $n+1$ 个断語是正确的。証訖。

2. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

証明: i) 第一个断語 p_1 显然是正确的

因为 $1^3=\left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2=\left[\frac{2}{2}\right]^2=1^2$, 显然是成立的

ii) 現設第 n 个断語 p_n 是正确的, 即

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

証明第 $n+1$ 个断語 p_{n+1} 也正确。

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^3$$
$$=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^2[n^2+4(n+1)]}{4}$$
$$=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=\left[\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}\right]^2.$$

即 $$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}\right]^2$$

故第 $n+1$ 个断語也是正确的。証訖。

3. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

証明：i) 第一个断語 p_1 显然是对的。

因为 $$\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{1+1}$$ 显然成立。

ii) 現設第 n 个断語 p_n 是正确的。

証明第 $n+1$ 个断語 p_{n+1} 也是正确的。

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)[(n+1)+1]}$$

$$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)[(n+1)+1]}=\frac{n[(n+1)+1]+1}{(n+1)[(n+1)+1]}$$

$$=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)[(n+1)+1]}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)[(n+1)+1]}$$

$\therefore$ 第 $n+1$ 个断語 p_{n+1} 也是正确的。証訖。

4. 設 $u_0=0,\ u_1=1,\ \cdots,\ u_n=3u_{n-1}-2u_{n-2}$

証：$u_n=2^n-1$.

証明：(用定理 3 証明)

i) 第一个断語 $(n=0)$ 显然是正确的。

因为 $n=0$ 时显然 $u_0=2^0-1=1-1=0$.

即 $u_0=0$ 滿足假設。

ii) 現設所有小于 n 的断語即

$p_1, p_2, p_3, \cdots p_{n-1}$ 都是正确的，我們証明第 n 个断語 p_n 也是正确的。即 $u_n=2^n-1$.

由假設可知：

$$u_n=3u_{n-1}-2u_{n-2}$$

又 $\because$ u_{n-1}, u_{n-2} 都是小于 n 的断語，由归納法假設应有

$$u_{n-1}=2^{n-1}-1,\qquad u_{n-2}=2^{n-2}-1$$

以上兩式代入

$$u_n=3u_{n-1}-2u_{n-2}=3(2^{n-1}-1)-2(2^{n-2}-1)$$
$$=3\cdot 2^{n-1}-3-2\cdot 2^{n-2}+2=3\cdot 2^{n-1}-2^{n-1}-1$$
$$=2\cdot 2^{n-1}-1=2^n-1.$$

$\therefore\quad u_n=2^n-1$. 証訖。

5. 設 $p>-1$, 証: $(1+p)^n\geqslant 1+np$.

証明: i) 第一个断言 p_1 显然是正确的。

因为 $n=1$ 时显然有 $1+p=1+p$.

ii) 設第 n 个断語 p_n 是正确的,

即 $(1+p)^n\geqslant 1+np$.

証明第 $n+1$ 个断語 p_{n+1} 也是正确的。

$\because$ 設 $p>-1$ $\therefore$ 有 $(1+p)^{n+1}=(1+p)^n(1+p)\geqslant(1+np)(1+p)$

$$=1+p+np+np^2=1+(n+1)p+np^2\geqslant$$
$$1+(n+1)p.\quad(\because np^2\geqslant 0)$$

$\therefore\ (1+p)^{n+1}\geqslant 1+(n+1)p$. 故証。

6. 証明一个 n 边形的內角和等于 $(n-2)$ 个二直角 (即 $(n-2)\cdot 180°$) $n=3, 4, 5, \cdots\cdots$

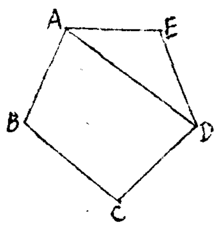
証明: i) 第一个断言 p_1 ($n=3$ 时) 显然正确, 因为 $n=3$ 时, 就是三角形, 而三角形的內角和等于 $180°$, 即等于 $(3-2)\cdot 180°$.

ii) 假設第 n 个断語 p_n 是正确的, 即 n 边形的內角和等于 $(n-2)\cdot 180°$, 要証明第 $n+1$ 个断語 p_{n+1} 也是正确的, 即 $n+1$ 边形的內角和等于 $[(n+1)-2]\cdot 180°$.

首先我們注意这样一个很显然的事实: 如果連結一个 $n+1$ 边形的某兩个相鄰边的对角綫, 那么就可以把这个 $n+1$ 边形分成一个 n 边形以及一个三角形, 而且这个 $n+1$ 边形的內角和就等于它所分成的 n 边形的內角和加上所分成的三角形的內角和。比如 (如下图):

联結五边形 $ABCDE$ 的相鄰边 AE 与 ED 的对角綫 AD 就可得到一个四边形 $ABCD$ 以及一个三角形 ADE, 而且显然五边形 $ABCDE$ 的內角和等于四边形 $ABCD$ 的內角和加上三角形 ADE 的內角和。

有了上面的事实就可以証明我們所要求的了, 根据前面的事实: 我們可以把任一 $n+1$ 边形分成一个 n 边形以及一个三角形, 而且这个



$n+1$边形的内角和等于它所分成的 n 边形的内角和加上所分成的三角形的内角和。而由归納法假設可知 n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot 180°$，而又已知一个三角形的内角和等于 $180°$。因此，任一 $n+1$ 边形的内角和就等于 $(n-2)\,180°+180°$

$$=(n-2+1)\,180°=[(n+1)-2]\cdot 180°.$$

这就証明了任一 $n+1$ 边形的内角和等于 $[(n+1)-2]\cdot 180°$. (故証)

§2. 数环与数体

1. 下列数集是不是数环？

i) 全体正整数

ii) 一切形如 $a+b\sqrt{3}\,i$ 的数，此处 a 与 b 都是任意有理数。

iii) 一切形如 $b\sqrt{5}$ 的数，此处 b 是任意整数。

iv) 一切分母是2的非負整数次方冪的不可約分数。

v) 一切形如 $\dfrac{2n}{2n+1}$ 的数，此处 n 是任意整数。

証明：i) 显然不是数环。

因为全体正整数对于减法不閉合，

比如 $3-5=-2$ 而 -2 不是正整数，而是負整数。

ii) 是数环。

因为：設取出任意兩数

$$a+b\sqrt{3}\,i,\quad c+d\sqrt{3}\,i,$$

$$(a+b\sqrt{3}\,i)\pm(c+d\sqrt{3}\,i)=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{3}\,i.$$

$\because$ $a\pm c$ 与 $b\pm d$ 还是有理数，

$\therefore$ 对于加减法是閉合的。

$$(a+b\sqrt{3}\,i)(c+d\sqrt{3}\,i)=(ac-3bd)+(ad+bc)\sqrt{3}\,i$$

$\because$ $ac-3bd$, $ad+bc$ 仍是有理数，

$\therefore$ 对于乘法是閉合的。

故 ii) 是数环。

iii) 不是数环。

因为 iii) 对于乘法不閉合

事实上，若取任意兩数 $b_1\sqrt{5}$ 与 $b_2\sqrt{5}$.

而 $$b_1\sqrt{5}\cdot b_2\sqrt{5}=(b_1b_2\sqrt{5})\sqrt{5}.$$

$\because$ b_1, b_2 是整数，而 $\sqrt{5}$ 是无理数

則 $b_1b_2\sqrt{5}$ 是一个无理数，而不是整数，

$\therefore$ $(b_1b_2\sqrt{5})\sqrt{5}$ 不是形如 $b\sqrt{5}$ 的数。

故 iii) 不是数环。

iv) 是数环。

在証明之前，先明确一下該題数集到底由那些数組成的。

由題設可知：該数是集一切形如 $\frac{a}{2^n}$ 的数所組成的，其中 $n\geqslant 0$ (即非負整数)，a 是整数 (当 $n=0$ 时，a 是任意一个整数，所以整数全体也包含在該数集內，因为整数也可看作为不可約的分数；当 $n>0$ 时，則 a 是一个奇数)。

現在从該数集內任取兩个数：

$$\frac{a_1}{2^{n_1}},\quad \frac{a_2}{2^{n_2}}.$$

$$\frac{a_1}{2^{n_1}}\pm\frac{a_2}{2^{n_2}}=\frac{a_1 2^{n_1}\pm a_2 2^{n_2}}{2^{n_1+n_2}}$$

分下面兩种情况来討論：

① 若 $n_1=n_2$ 时，

則 $$\frac{a_1 2^{n_1}\pm a_2 2^{n_2}}{2^{n_1+n_2}}=\frac{a_1\pm a_2}{2^{n_1}}=\begin{cases}\text{或者等于一个整数，当然屬于該数集。}\\ \text{或者等于}\dfrac{P}{2^N}\quad \begin{array}{l}P\text{ 是一个奇数，}\\ N\text{ 是 }<n_1\text{ 的非負整数，}\end{array}\end{cases}$$

所以 $\frac{P}{2^N}$ 亦屬于該数集。

② 若 $n_1\neq n_2$. 設 $n_1>n_2$.

則 $$\frac{a_1 2^{n_1}\pm a_2 2^{n_2}}{2^{n_1+n_2}}=\frac{2^{n_2}(2^{n_1-n_2}a_1\pm a_2)}{2^{n_2+n_1}}$$

$$=\frac{2^{n_1-n_2}a_1\pm a_2}{2^{n_1}}$$屬于該数集。

$\therefore$ 当 $n_1=n_2$ 或 $n_1\neq n_2$ 时

該数集对于加法减法都是閉合的。

另一方面:

$$\frac{a_1}{2^{n_1}}\cdot\frac{a_2}{2^{n_2}}=\frac{a_1\cdot a_2}{2^{n_1+n_2}}=\begin{cases}\text{或等于整数, 当然屬于該数集,}\\ \text{或等于}\dfrac{P}{2^N}\text{屬于該数集。}\end{cases}\quad \begin{matrix}N\geq 0\\ P\text{ 为奇数。}\end{matrix}$$

$\therefore$ 該数集对于乘法也是閉合的。

故 iv) 是一个数环。

v) 不是一个数环。

因为該数集对于加法是不閉合的,

比如: 任意找二个数:

$$\frac{2n_1}{2n_1+1},\quad \frac{2n_2}{2n_2+1}.$$

$$\frac{2n_1}{2n_1+1}+\frac{2n_2}{2n_2+1}=\frac{2n_1(2n_2+1)+2n_2(2n_1+1)}{(2n_1+1)(2n_2+1)}$$

$$=\frac{2(4n_1n_2+n_1+n_2)}{2(2n_1n_2+n_1+n_2)+1}$$不屬于$\frac{2n}{2n+1}$形式的数,

$\because$ $4n_1n_2+n_1+n_2\neq 2n_1n_2+n_1+n_2$.

$\therefore$ 对加法不閉合

故 v) 不是数环。

2. 上題的五个数集中那些是数体。

証明: 因为已証 i) iii) v) 不是数环, 当然也不可能是数体。第 ii) iv) 已証是数环, 現驗証它們是不是数体:

先驗証 ii):

假設任取二数 $a+b\sqrt{3}i$ 与 $c+d\sqrt{3}i$ 且設 $c+d\sqrt{3}i\neq 0$.

$$\frac{a+b\sqrt{3}i}{c+d\sqrt{3}i}=\frac{(a+b\sqrt{3}i)(c-d\sqrt{3}i)}{(c+d\sqrt{3}i)(c-d\sqrt{3}i)}=\frac{ac+3bd}{c^2+3d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+3d^2}\sqrt{3}i$$

$\because$ $c+d\sqrt{3}i\neq 0$. 即 c, d 不同时为零, $\therefore$ $c^2+3d^2\neq 0$.

因此 $\dfrac{ac+3bd}{c^2+3d^2}$ 与 $\dfrac{bc-ad}{c^2+3d^2}$ 仍是有理数，

所以 $\dfrac{a+b\sqrt{3}i}{c+d\sqrt{3}i}$ 仍是属于 $c+d\sqrt{3}i$ 的形式。

故 ii) 是一数体。

現在驗証 iv:

設有二数 $\dfrac{a_1}{2^{n_1}}$ 与 $\dfrac{a_2}{2^{n_2}}$，且設 $\dfrac{a_1}{2^{n_1}}\neq 0$，$n_2\geqslant n_1$

$$\frac{\dfrac{a_2}{a^{n_2}}}{\dfrac{a_1}{2^{n_1}}}=\frac{a_2 2^{n_1}}{a_1 2^{n_2}}=\frac{a_2}{a_1 2^{n_2-n_1}}$$

当 $n_1=n_2$ 时，$\dfrac{a_2}{a_1 2^{n_2-n_1}}=\dfrac{a_2}{a_1}$ 若 a_2 不是 a_1 的倍数，而且 a_1 又不是 2 的某一非負整数次方冪，

則 $\dfrac{a_2}{a_1}$ 不可能是屬于 $\dfrac{a}{2^n}$ 的形式，所以若 $n_1=n_2$，a_2 不是 a_1 的倍数

以及 a_1 又不是 2 的非負整数次冪的話，那么 $\dfrac{\dfrac{a_2}{2^{n_2}}}{\dfrac{a_1}{2^{n_1}}}$ 不屬于 $\dfrac{a}{2^n}$ 的形式。

故 iv) 不是数体。

3. 有沒有只含兩个数的数环？若有，举出实例；若沒有，严格加以証明。

証明：沒有只含兩个数的数环。

用反証法：若有 A 是只含兩个数的数环。并設这兩个数为 a_1 与 a_2.

$\because$ 每个数环一定含有一个数 0，$\therefore a_1$ 与 a_2 中一定有一个是 0，但不能 a_1, a_2 同时是 0，因为若 a_1 与 a_2 都是 0，則 A 只含有一个数 0，而不是含有兩个数，这与假設不符。所以 a_1 与 a_2 中一定有一个是 0 一个不是 0，設 $a_1=0, a_2\neq 0$.

$\because$ 假設 A 是数环，則 A 关于加法是閉合的，那么一定有

$$a_2+a_2=2a_2\in A$$

既然 $2a_2 \in A$.，而 A 又只有二个数 a_1 与 a_2.

所以,或 $2a_2=a_1$，或 $2a_2=a_2$. 显然这兩种情况都是不可能的，因为若 $2a_2=a_1=0$. 而 $2\neq 0$ 則 $a_2=0$，这与設 $a_2\neq 0$ 矛盾；若 $2a_2=a_2$ 則由于 $a_2\neq 0$ 可推出 $2=1$ 这显然不可能。

由上所証可得:决不可能有只含兩个数的数环。（故証）

4. 令 p_1 与 p_2 是兩体数体，而 p 是一切旣屬于 p_1 又屬于 p_2 的数所組成的集合。証明 p 也是一个数体。

証明：i) 証明 p 是一个数环:

設 a, b 是 p 中任意兩个元素,由 p 的定义可知: a 与 b 旣屬于 p_1 又屬于 p_2.

由 $a\in p_1, b\in p_1$ 以及已知 p_1 是数体(当然是数环)所以有

$$a\pm b\in p_1 \quad a\cdot b\in p_1$$

再由 $a\in p_2$，$b\in p_2$ 以及 p_2 是数体,有

$$a\pm b\in p_2 \quad a\cdot b\in p_2$$

由 $\qquad a\pm b\in p_1,\ a\pm b\in p_2$ 得 $a\pm b\in p$.

由 $\qquad a\cdot b\in p_1,\ a\cdot b\in p_2$ 得 $a\cdot b\in p$.

因此:数集 p 关于加法减法以及乘法都是閉合的,所以 p 是数环。

ii) 設 a, b 都屬于 p, 且設 $b\neq 0$，証明 $\frac{a}{b}\in p$.

$\because\ a\in p_1, b\in p_1$ 而 p_1 又是数体， $\therefore\ \frac{a}{b}\in p_1$

$\because\ a\in p_2, b\in p_2$ 而 p_2 又是数体， $\therefore\ \frac{a}{b}\in p_2$

由 $\frac{a}{b}\in p_1$, $\frac{a}{b}\in p_2$ 即得 $\frac{a}{b}\in p$. 由 i) ii) 即証 p 为数体。

5. 在上題里，設 p_1 是一切形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数所成的数体，p_2 是一切形如 $a+bi$ 的数所成的数体,这里 a 与 b 都是有理数，那么 p 等于什么?

証明:首先可以断定有理数的全体一定包含在 p 内，$\because$ 有理数全体旣包含在 p_1 内也包含在 p_2 内(这一点当取 $b=0$ 时即可看出)。

現在証明 p 内除了有理数全体以外并无别的数,要証明这一点,只

要証明 p 内任意一个数都是有理数就可以了。

現設 c 是 p 的任意一个数，証明 c 一定是有理数，事実上：由 p 的定义可知 $c\epsilon p_1$ 且 $c\epsilon p_2$.

由 $c\epsilon p_1$ 可知 c 一定要等于形如 $a+b\sqrt{2}$ 的某一个数，設 $c=a_k+b_k\sqrt{2}$. a_k, b_k 是有理数。

同理：由 $c\epsilon p_2$ 可知 $c=a_e+b_ei$，a_e，b_e 都是有理数。

因此得：

$$c=a_k+b_k\sqrt{2}=a_e+b_ei \text{ 由左式可推出}$$

$$a_k=a_e,\quad b_k=0,\quad b_e=0,$$

故 $c=a_k=a_e$. $\because$ a_k, a_e 是有理数， $\therefore$ c 是一个有理数。

由前面証明可知：p 包含有而且只包含有有理数的全体，故 p 是有理数体。

§3. 二阶和三阶行列式

1．計算下列三阶行列式

(i) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=1+27+8-6-6-6=18.$$

(ii) $$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}=0.$$

2．証明下列等式：

(i) $$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}-c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

証：等式左边 $=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1$.

等式右边 $=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$.

显然可看出：左边＝右边，　証訖。

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$.

証：左边 $=bc^2+a^2c+ab^2-a^2b-b^2c-ac^2$.

右边 $=bc^2+a^2c+ab^2-a^2b-b^2c-ac^2$.

∴　左边＝右边。　証訖。

3．利用三阶行列式解方程組

$$\begin{aligned} bx-ay&=-2ab \\ -2cy+3bz&=bc \\ cx+az&=0 \end{aligned}\qquad a,\ b,\ c \text{ 均不为 } 0$$

解：

$$D=\begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ 0 & -2c & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}=-5abc\neq 0,$$ ∴ 有唯一解。（∵ a, b, c 均不为 0）

$$D_1=\begin{vmatrix} -2ab & -a & 0 \\ bc & -2c & 3b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}=5a^2bc.$$

$$D_2=\begin{vmatrix} b & -2ab & 0 \\ 0 & bc & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}=-5ab^2c.$$

$$D_3=\begin{vmatrix} b & -a & -2ab \\ 0 & -2c & bc \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}=-5abc^2$$

因此

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{5a^2bc}{-5abc}=-a$$

$$y=\frac{D^2}{D}=\frac{-5ab^2c}{-5abc}=b$$