数学小丛书

2

对称

段学复

科学出版社
www.sciencep.com

数学小丛书 2

对　　称

段　学　复

科　学　出　版　社
2002

内 容 简 介

对称,照字面来说,就是两个东西相对又相称,因此把这两个东西对换一下,好像没有动过一样.本书主要介绍有关对称的数学,先讲代数对称,再讲几何对称,最后引出了"群"的概念."群"的概念在近代数学中是最重要的概念之一,它不只对于代数学和几何学,也对于数学分析以至于理论物理学都有重大的应用.通过这些内容,作者还企图帮助读者了解:数学理论是由具体实际中抽象出来的,而又有具体实际的应用.

图书在版编目(CIP)数据

对称/段学复.—北京:科学出版社,2002
(数学小丛书)
ISBN 7-03-009423-9

Ⅰ.对… Ⅱ.段… Ⅲ.对称-普及读物
Ⅳ.O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 010126 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

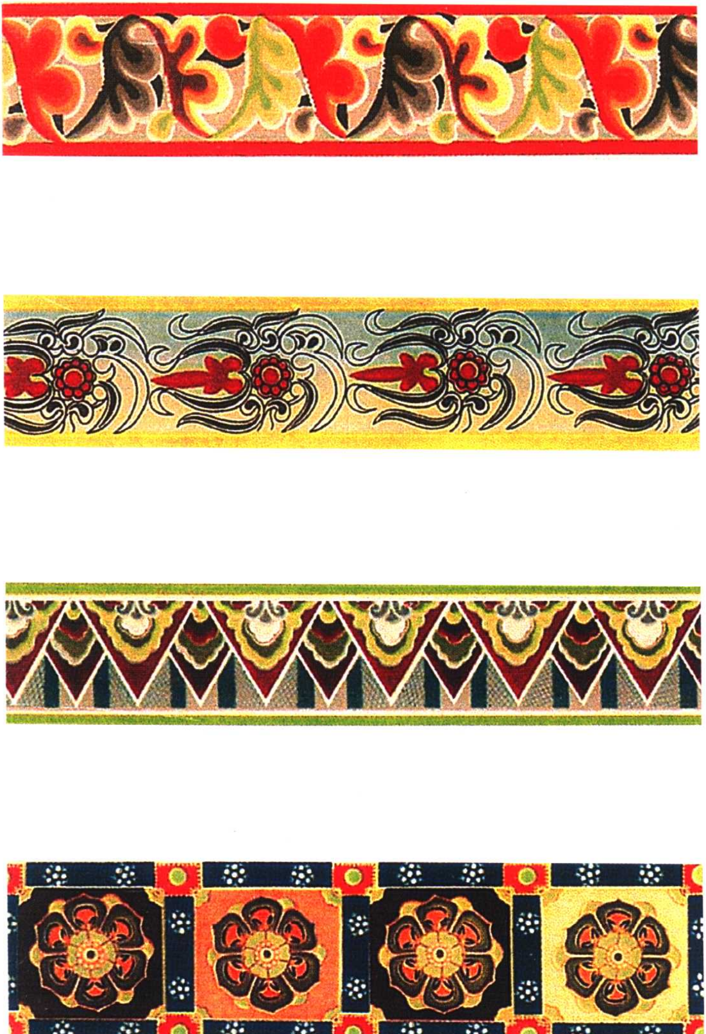
2002 年 5 月第 一 版 开本:787×960 1/32
2002 年 5 月第一次印刷 印张:1 3/4 插页:2
印数:1—5 000 字数:23 000

全套书定价: 99.00 元 (共 18 册)
(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)

馬克思说：「一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步」。恩格斯说：「要辩证而又唯物地了解自然，就必须熟悉数学」。科教兴国，振兴中华的今天，向全社会普及数学，实在是一件刻不容缓的大事。数学小丛書是由我国一些著名数学家撰写的一批数学普及读物精品。几十年来，我国几代科技人员中，不少人都曾得益于这套丛书。我衷心地祝賀数学小丛書的重版与補充，并预祝它取得更大的成功。

王元

二〇〇〇年四月



带饰上的对称（敦煌壁画边饰）

出版说明

1956年,为了向青少年传播数学知识,科学出版社配合我国首次举办的高中数学竞赛,出版了老一辈数学家华罗庚教授的《从杨辉三角谈起》和段学复教授的《对称》. 在20世纪60年代初,这两本书连同其他一些著名数学家撰写的科普著作,被北京市数学会编成小丛书,相继由不同的出版社出版,并多次重印.

由数学大师和著名数学家亲自执笔撰写的这套数学小丛书是我国数学普及读物中的精品,曾激发一代青少年学习数学的兴趣. 书中蕴涵的深刻而富有启发性的思想,促进了无数中学生在求学的道路上健康成长. 当年这套小丛书的许多读者,现在已经成为学有所成的科学技术工作者,国家建设的栋梁之才. 当年由老一辈数学家所倡导的我国的数学竞赛活动,现在已经得到蓬勃的发展. 我国自1986年正式参加国际数学奥林匹克竞赛以来,历届都取得总分

第一或第二的好成绩.近年来,我国的数学普及读物无论是品种还是数量都在增加,但是这套数学小丛书仍然无愧是其中别具特色的瑰宝,理应成为传世之作.因此,我社取得作者或其继承人的同意,并在可能的条件下,请作者本人或相关学者对重新编辑的书稿进行了审订,重新刊行这套数学小丛书,以飨广大青少年读者.

数学是几千年人类智慧的结晶,是一门古老而又常新的科学.借此丛书再版之机,我们特别增加两本新书:虞言林教授等的《祖冲之算 π 之谜》和冯克勤教授的《费马猜想》.前者介绍中国古代数学的一项重大成就,后者阐述数学史上的一个著名猜想——费马定理历经 300 多年终于在 20 世纪末被证明的故事,我们相信读者从中将会受到启迪.

本套丛书以新貌重新出版,得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的资助,谨表示衷心感谢.

目　　录

写在前面

对称,照字面来讲,就是两个东西相对而又相称(或者说相仿、相等).因此,把这两个东西对换一下,好像没有动过一样.

对称的概念,可以说和近世代数学中"群"的概念是分不开的.当然,群的一般抽象定义一直到19世纪末才完全确立,就是比较具体而特殊的"排列群"的定义,也只不过早有了几十年光景;而对称的概念,尤其是几何方面对称的概念,却是老早就有了的.实际上,在建筑设计方面,在衣物装饰方面,对称的概念一直起着重要的作用.自然界中,矿物结晶体显示出对称.人的身体的外形,也是左右对称的.

这本小册子,主要是向大家介绍有关对称的数学:先讲代数对称;再讲几何对称,包括对于装饰和结晶体的应用;最后引出群的定义.通过这些内容,还希望能够帮助大家了解:数学理论是由具体实际中抽象出来的,而又有具体实

际的应用.一方面,数学理论有高度的抽象性,它往往把一些表面上看来好像没有什么关系的东西从量的侧面很紧密地联系和统一起来.另一方面,数学理论有广泛的实际应用,它往往可以应用到极其广泛而不同的方面去.

1 代数对称——对称多项式和推广

(1) 一元二次方程的根的对称多项式

假设 a,b,c 都是实数,而且 $a\neq0$,又假设 x 是未知数(变数或文字),那么 x 的二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

的两个根是

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

和

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{2}$$

依照判别式 $b^2-4ac\gtreqless0$ 三种不同情况,两根 x_1,x_2 或是不相等的两个实数,或是相等的两个实数,或是共轭的两个复数.

更一般些，假设 $a(\neq 0)$，b，c 是任何复数，x_1，x_2 仍是方程(1)的两个根(因为把它们代进 ax^2+bx+c 就得 0)，而且也是复数，这是因为任何复数(如 b^2-4ac)的平方根还是复数.

事实上，假设 $a+b\mathrm{i}$ 是个复数，这里 a 和 b 是实数. 我们也可以写成

$$a+b\mathrm{i}=\rho(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

$$\rho=+\sqrt{a^2+b^2},\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}. \qquad (3)$$

根据棣莫弗(De Moivre)公式，有

$$\sqrt{a+b\mathrm{i}}=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

和

$$\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2\pi}{2}\right)$$

$$=-\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right), \qquad (4)$$

其中$\sqrt{\rho}$取非负的值.

我们也可以换一个方法来做. 假设

$$\sqrt{a+b\mathrm{i}}=c+d\mathrm{i}, \qquad (5)$$

其中 c 和 d 都是实数，那么

$$a+b\mathrm{i}=(c+d\mathrm{i})^2=(c^2-d^2)+2cd\mathrm{i}, \qquad (6)$$

所以

$$c^2-d^2=a,\quad 2cd=b, \tag{7}$$

由此

$$\begin{aligned} c^2+d^2 &= \sqrt{(c^2+d^2)^2} \\ &= \sqrt{(c^2-d^2)^2+(2cd)^2} \\ &= \sqrt{a^2+b^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

所以

$$c^2=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\geqslant 0, \tag{9}$$

$$d^2=\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\geqslant 0.$$

c 有两值，d 有两值，但 c 定后 d 也决定了，因为 $2cd=b$（可设 $b\neq 0$）. 这样决定了的两个 $c+di$ 平方起来确实是 $a+bi$，因此就是 $a+bi$ 的两个平方根.

韦达(Viète)定理告诉我们，一元二次方程的两个根有如下的关系：

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}. \tag{10}$$

x_1+x_2 和 x_1x_2 都有这样性质：把 x_1 和 x_2 对换，结果仍然不变，因为

$$x_1+x_2=x_2+x_1,\quad x_1x_2=x_2x_1. \tag{11}$$

凡是有这样性质的 x_1 和 x_2 的多项式叫做**对称多项式**,例如 $x_1^2+x_2^2, x_1^2x_2+x_1x_2^2$ 等也都是,但是 x_1-x_2 不是. x_1+x_2 和 x_1x_2 叫做**初等对称多项式**.可以证明,凡是 x_1 和 x_2 的对称多项式都可以用这两个初等对称多项式表示出来.例如:(这不是证明!)

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$

$$\left(\therefore =\frac{b^2-2ac}{a^2}\right),$$

$$x_1^2x_2+x_1x_2^2=x_1x_2(x_1+x_2)$$

$$\left(\therefore =-\frac{bc}{a^2}\right). \tag{12}$$

(2) 一元 *n* 次方程的根的对称多项式

我们现在来看看一般情况.假设 n 是一个正整数,又假设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是复数,且 $a_0\neq 0$,现在有一元 n 次方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0. \tag{13}$$

著名的代数基本定理告诉我们,这样的方程有 n 个根,都是复数,假设就是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,其中可以有相同的.根据因式定理,应有

$$\begin{aligned}&a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\\&=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).\end{aligned} \tag{14}$$

这个重要定理的证明方法是很多的.最先一个证明是德国高斯(Gauss)在1799年作出的,他还作出了另外三个证明.有的证明用初等数学方法,但是比较长,有的用高等数学方法(如用复变数函数论),只有几行,不过无论如何都要用到连续性质,即多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 是 x 的连续函数.这就是说,当 x 的值变动得很小的时候,$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的值也变动得很小①.

这是一种存在定理,只是说有,但是没有说怎样求.对于 $n=3$ 和 4 的情形,求根有一般的公式②.当$n\geqslant5$的时候,求根没有像二次那样一般的公式.求出实数根的近似值(即和正确值相接近的值)的一般方法,尤其是当 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 都是实数的情形,是我国南宋秦九韶在1247年首先作出的,比英国霍纳(Horner)的发现(1819年)要早得多.对于复数根的情形,是俄国罗巴切夫斯基(Лобочевский)作出的(1834年)③.

和二次的情形相仿,韦达公式给出:

---

① 关于代数基本定理的证明,可以参看张禾瑞、郝炳新编《高等代数》(人民教育出版社出版,1960年合订本第一版)第287～294页.

② 关于三次、四次方程根的公式,参看张禾瑞、郝炳新编《高等代数》第295～304页.

③ 关于根的近似计算,参看张禾瑞、郝炳新编《高等代数》第318～330页.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots$$

$$+ x_2x_n + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0}, \quad (15)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1x_2\cdots x_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

像 $x_1+x_2+\cdots+x_n$，$x_1x_2+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n,\cdots$，$x_1x_2\cdots x_n$ 等这样多项式,不论我们把哪两个根 x_i 和 $x_j(i\neq j)$ 对换一下,因之也就是不论我们对于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 作怎样的排列(因为这些根的任何的排列都可以用两个根 x_i 和 x_j 对换的办法经过几次对换得来)都不变动,所以就叫做 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的对称多项式. 它们也叫做初等对称多项式,因为根的任一个对称多项式都可以用这些初等对称多项式的多项式表示出来. 这就是所谓对称多项式的基本定理,我们在这里不去证明. 只提一下,有一种证明是利用所谓字典排列法,那就是说,假定有两个项 $x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 和 $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}$,依次比较它们所含的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的指数,如果第一个不是 0 的差 l_i-m_i 是

正数，我们就说第一项是在第二项的前面. 例如 $x_1^6x_2^3$ 就在 $x_1^6x_2^2x_3x_4$ 的前面，因为 x_1 的指数差是 $6-6=0$，而 x_2 的指数差是 $3-2=1$[①].

我们现在证明一个比较简单的情形，就是牛顿(Newton)公式，也就是来证明

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \quad (k \geqslant 1 \text{ 是整数}) \tag{16}$$

都可以用这些初等对称多项式的多项式表示出来. 这里符号 s_k 表示 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 k 次方幂的和.

我们先看一看 $n=2$ 的情形. 为了简单起见，可以假设 $a=1$，这样就有

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2). \tag{17}$$

我们已有

$$s_1 = x_1 + x_2 = -b, \quad x_1x_2 = c. \tag{18}$$

因为

$$x_1^2 + bx_1 + c = 0, \quad x_2^2 + bx_2 + c = 0, \tag{19}$$

---

① 关于对称多项式的基本定理的详细证明，可以参看张禾瑞、郝炳新编《高等代数》第 268～275 页.