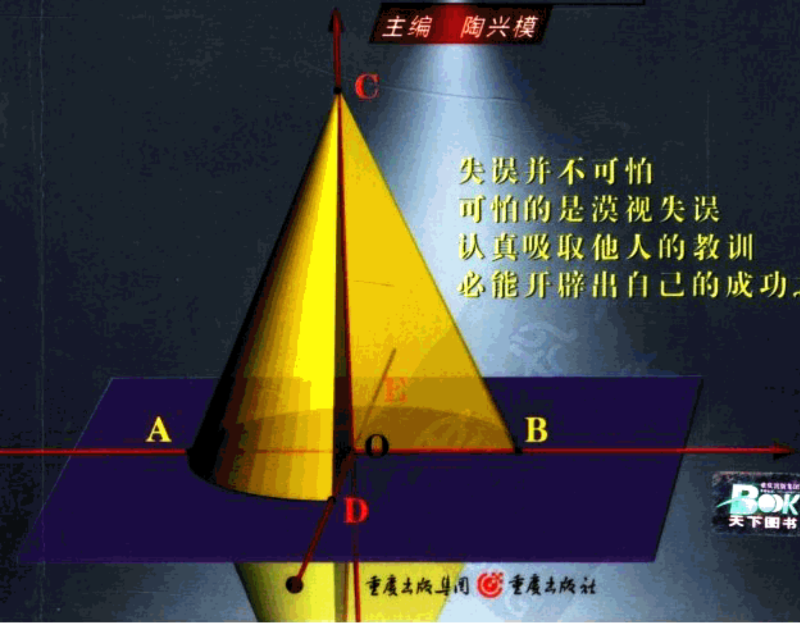
万试无忧系列丛书

高考易错题诊断

数学

主编 陶兴模



失误并不可怕
可怕的是漠视失误
认真吸取他人的教训
必能开辟出自己的成功之路

天下图书
重庆出版集团 重庆出版社

前言

学习过程中，每个人都会或多或少地犯一些错误，有的学生会认真地总结经验教训，确保以后不再犯同样的错误；有的学生则不善于总结，以至于一错再错，最终导致考场失利.

可以肯定地说，高考的内容是每一个高中学生都曾经接触过的，一个学生在高中三年所练习的内容岂是区区一套高考试题所能相比？如果每个学生都能认真对待平时的练习，及时克服自己在练习中表现出来的问题，高考取胜则应是情理之中的事. 为此，我们特邀了一批长期在高三一线工作，高考指导经验特别丰富的教师编写了《高考易错题诊断》，包括语文、数学、英语、物理、化学5个分册. 每本书看似单薄，却凝聚了数十位资深教师的多年教学经验、上千位同学的学习心得体会. 编写体例如下：

易错点扫描：扫描学生在平时学习过程中容易混淆的知识点.

范例剖析：剖析各知识板块内最典型的易错题，引导学生通过剖析找到自己知识上、思维上的缺陷.

易错题集萃:精选学生在各类练习中出错率比较高的试题.

易错题诊断:每个试题从“典型错误”、“错因分析”、“正确解答”等几个方面来分析,让学生深入地了解别人究竟错在哪里,以警示自己. 有些题目后还有“归纳拓展”,通过一个题教会学生解一类题的思维方法. 本部分是全书的重点,同类图书大多只有正确解答,没有错误原因的分析及一些解题思路的点拨,学生对错误的认识也就不深刻.

读者在使用本书时,一定要自己先动手做一遍这些典型的易错题, 再对照易错题诊断的内容,不断回顾、审视,明确自己的思维缺陷,澄清一些模糊认识.

学习进步的过程实际上就是发现自己的不足,然后改正的过程.《高考易错题诊断》就像一面很好的镜子,吸取别人的教训,能让你在学习过程中少走弯路.

编　者

2006 年 9 月

目　录

一、集合与简易逻辑

易错点扫描

1. 不能正确理解集合的概念，忽视集合中元素的本质特征，模糊运用概念而导致解题错误.

2. 忽视集合中元素的互异性而造成多解现象.

3. 对空集的意义理解模糊，在分类讨论求解时造成漏解现象.

4. 对集合与元素、集合与集合之间的关系认识不清，造成符号运用上的错误.

5. 对交集与并集的概念混淆不清，对补集的意义理解模糊，造成解不等式中的错误现象.

6. 对命题的否定和否命题的理解混淆，造成错判命题的真假.

7. 对四种命题之间的关系理解不清，对逻辑连接词“或”、“且”、“非”的认识不深刻，导致错写命题和错判命题.

8. 对充分条件和必要条件的意义理解模糊，造成错判条件的充分性或必要性.

范例剖析

1. 集合 $A=\{x|x=3n+1,n\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=3n+2,n\in \mathbf{Z}\}$，$C=\{x|x=6n+3,n\in \mathbf{Z}\}$，对任意的 $a\in A$，$b\in B$，是否一定有 $a+b\in C$？证明你的结论.

⇨**典型错误**:由 $a\in A$,有 $a=3n+1(n\in\mathbf{Z})$,由 $b\in B$,有 $b=3n+2(n\in\mathbf{Z})$,则 $a+b=6n+3(n\in\mathbf{Z})$. 因此,$a+b\in C$.

⇨**错因分析**:集合 A 是由所有的被 3 除余 1 的整数所构成的集合,集合 B 是由所有的被 3 除余 2 的整数所构成的集合,集合 C 是由所有的被 6 除余 3 的整数所构成的集合. 易知,$1\in A$,$5\in B$,$1+5=6\notin C$. 即当 $a\in A$,$b\in B$ 时,不一定有 $a+b\in C$. 错解的根源在于用特殊情况代替了一般情况,错误地将集合 A,B 中的 n 看成了同一个数,破坏了 a 与 b 的任意性.

⇨**正确解答**:设 $a=3m+1(m\in\mathbf{Z})$,$b=3t+2(t\in\mathbf{Z})$,则 $a+b=3(m+t)+3$.

当 $m+t$ 为偶数时,设 $m+t=2k(k\in\mathbf{Z})$,有 $a+b=6k+3\in C$.

当 $m+t$ 为奇数时,设 $m+t=2k-1(k\in\mathbf{Z})$,有 $a+b=6k\notin C$.

由此可知,当 $a\in A$,$b\in B$ 时,不一定有 $a+b\in C$.

2. 集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+4ax-4a+3=0\}$,$B=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+(a-1)x+a^2=0\}$,$C=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+2ax-2a=0\}$中至少有一个非空,求实数 a 的取值范围.

⇨**典型错误**:对于集合 A,当 $\Delta_1=(4a)^2-4(-4a+3)\geqslant 0$,即 $a\leqslant -\frac{3}{2}$ 或 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时,$A\neq\varnothing$.

对于集合 B,当 $\Delta_2=(a-1)^2-4a^2\geqslant 0$,即 $-1\leqslant a\leqslant\frac{1}{3}$ 时,$B\neq\varnothing$.

对于集合 C,当 $\Delta_3=(2a)^2-4(-2a)\geqslant 0$,即 $a\leqslant -2$ 或 $a\geqslant 0$ 时,$C\neq\varnothing$.

因此,当 $\begin{cases} a\leqslant -\frac{3}{2}\text{ 或 } a\geqslant\frac{1}{2}, \\ -1\leqslant a\leqslant\frac{1}{3}, \\ a\leqslant -2\text{ 或 } a\geqslant 0, \end{cases}$ 即 $a\leqslant -2$ 或 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{3}$ 或 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时,A,B,C 至少有一个非空.

⇨**错因分析**:错解的原因在于没有正确理解题意的实质,在条件 $\begin{cases}\Delta_1\geqslant 0, \\ \Delta_2\geqslant 0, \\ \Delta_3\geqslant 0\end{cases}$ 之下求出 a 的取值范围,使得集合 A,B,C 均为非空集合,这不

是本题要求的结果.本题要求的结果应该是$\Delta_1\geqslant 0,\Delta_2\geqslant 0,\Delta_3\geqslant 0$这三个集合之并.

⇨**正确解答 1**:由$\Delta_1\geqslant 0,\Delta_2\geqslant 0,\Delta_3\geqslant 0$求并集得所求的$a$的取值范围是$\left\{a\,\middle|\,a\leqslant -\frac{3}{2}\text{或}a\geqslant -1\right\}$.

⇨**正确解答 2**:设全集$U=\mathbf{R}$,则问题的反面是集合A,B,C均为空集.设满足题设条件的实数a的集合为M,则$\complement_U M=\{a\mid\Delta_1<0\text{且}\Delta_2<0\text{且}\Delta_3<0\}$,即$\left\{a\,\middle|\,-\frac{3}{2}<a<-1\right\}$,由此得所求的符合条件的$a$的集合是$\left\{a\,\middle|\,a\leqslant -\frac{3}{2}\text{或}a\geqslant -1\right\}$.

3. 写出命题"质数不是正偶数"的逆命题、否命题、逆否命题,并判断各命题的真假.

⇨**典型错误**:原命题是假命题,例如"2是质数,它是正偶数";

逆命题为"正偶数不是质数",逆命题为假命题,例如"正偶数2是质数";

否命题为"质数是正偶数",否命题为假命题,例如"质数3不是正偶数";

逆否命题为"正偶数是质数",逆否命题为假命题,例如"正偶数4不是质数".

⇨**错因分析**:错误的原因有二:第一,逆命题应该是"若p则q"中的条件和结论互换,而不是语句中的主语和宾语互换;第二,混淆了"否命题"与"否定命题"这两个不同的概念,将否命题写成了否定命题,所写的逆否命题同时犯了以上两种错误.

⇨**正确解答**:原命题可以写成"若一个数是质数,则这个数不是正偶数",这是一个假命题,如"质数2是正偶数";

逆命题为"若一个数不是正偶数,则这个数是质数",这是一个假命题,例如"9不是正偶数,但它也不是质数";

否命题为"若一个数不是质数,则这个数是正偶数",这是一个假命题,例如"9不是质数,但它也不是正偶数";

逆否命题为"若一个数是正偶数,则这个数不是质数",这是一个假命题,例如"2是正偶数,但它也是质数".

易错题集萃

1. 已知集合 $A \subsetneqq \{1,2,3\}$，且 A 中至少有 2 个元素，满足条件的集合 A 共有 ( )

A. 3 个　　B. 4 个　　C. 5 个　　D. 6 个

2. 已知集合 $M=\{y \mid y=x^2+1,\ x \in \mathbf{R}\}$，$N=\{y \mid y=x+1,\ x \in \mathbf{R}\}$，则 $M \cap N=$ ( )

A. $(0,1),(1,2)$　　B. $\{(0,1),(1,2)\}$

C. $\{y \mid y=1$ 或 $y=2\}$　　D. $\{y \mid y \geqslant 1\}$

3. 若集合 $A=\{1,3,x\}$，$B=\{x^2,1\}$，且 $A \cup B=\{1,3,x\}$，则 x 的值为 ( )

A. 0　　B. $\pm\sqrt{3}$　　C. $1,0,\pm\sqrt{3}$　　D. $0,\ \pm\sqrt{3}$

4. 下列 6 个关系中，正确的有 ( )

①$\varnothing \subsetneqq \{\varnothing\}$；②$\varnothing \in \{\varnothing\}$；③$\varnothing \subsetneqq \{0\}$；④$0 \in \varnothing$；⑤$\varnothing \neq \{0\}$；⑥$\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

A. 4 个　　B. 5 个　　C. 6 个　　D. 3 个

5. 设 $A=\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 6\}$，$B=\{x \mid 2a \leqslant x \leqslant a+3\}$，若 $B \subseteq A$，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $[1,3]$　　B. $(3,+\infty)$　　C. $[1,+\infty)$　　D. $(1,3)$

6. 已知 $U=\{(x,y) \mid x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}\}$，$M=\left\{(x,y) \,\middle|\, \dfrac{y-4}{x-2}=3\right\}$，$N=\{(x,y) \mid y=3x-2\}$，则 $(\complement_U M) \cap N=$ ( )

A. $(2,4)$　　B. $\varnothing$　　C. $\{(2,4)\}$　　D. N

7. 设原命题是“已知 a,b,c,d 是实数，若 $a=b$ 且 $c=d$，则 $a+c=b+d$”，则它的逆否命题是 ( )

A. 已知 a,b,c,d 是实数，若 $a+c \neq b+d$，则 $a \neq b$ 且 $c \neq d$

B. 已知 a,b,c,d 是实数，若 $a+c \neq b+d$，则 $a \neq b$ 或 $c \neq d$

C. 若 $a+c \neq b+d$，则 a,b,c,d 不是实数，且 $a \neq b$，$c \neq d$

D. 以上答案都不对

8. 如果 $a,b,c\in\mathbf{R}$，那么“$b^2>4ac$”是“方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等实根”的　　（　　）

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 已知集合 $M=\{x|x^2-4x+3=0\}$，$N=\{x|tx-6=0\}$，且 $M\cup N=M$，则实数 t 的值为________.

10. 设全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|2a-1|,2\}$，$\complement_U A=\{5\}$，则实数 $a=$________.

11. 设 $A=\{x|x^2+(p+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，则实数 p 的取值范围是________.

12. 已知命题 p:若 $\sqrt{x-2\,004}+|y-2\,005|=0$，则 $x=2\,004$ 且 $y=2\,005$，那么命题“非 p”为________.

13. 若集合 $A=\{x|ax^2+x+a-1=0,x\in\mathbf{R}\}$中有且只有一个元素，求实数 a 的值.

14. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-ax+3a-5=0\}$，若 $A\cap B=B$，求实数 a 的取值范围.

易错题诊断

☞ 1

【典型错误】A 可以有 2 个元素，也可以有 3 个元素. 当 A 有 2 个元素时，$A=\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$，有 3 个集合；当 A 有 3 个元素时，A 只有 1 个集合，$A=\{1,2,3\}$. 所以共有 4 个集合满足条件，故选 B.

【错因分析】对真子集的概念模糊，因为 A 是 $\{1,2,3\}$ 的真子集，所以 A 不可能有 3 个元素.

【正确解答】符合条件的 A 只可能有 2 个元素，共有 3 个集合，故选 A.

☞ 2

【典型错误】由 $\begin{cases} y=x^2+1, \\ y=x+1 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=0, \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$ 由此得抛物线 $y=x^2+1$ 与直线 $y=x+1$ 的交点坐标为 $(0,1)$、$(1,2)$，构成的集合为 $\{(0,1),(1,2)\}$，故选 B.

【错因分析】对集合 M,N 的元素是什么没有理解. 集合 M,N 的元素不是点 (x,y)，而是实数 y.

【正确解答】$M=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}=\{y|y\geqslant 1\}$，$N=\{y|y=x+1,x\in\mathbf{R}\}=\{y|y\in\mathbf{R}\}$，$M\cap N=\{y|y\geqslant 1\}\cap\{y|y\in\mathbf{R}\}=\{y|y\geqslant 1\}$，故选 D.

☞ 3

【典型错误】因为 $A\cup B=\{1,3,x\}=A$，所以 $B\subsetneqq A$，因此 $x^2=3$ 或 $x^2=x$. 解之得 $x=\pm\sqrt{3}$，$x=0$，$x=1$，故选 C.

【错因分析】忽略了元素的互异性，当 $x=1$ 时，$A=\{1,3,1\}$，$B=\{1,1\}$，因此 $x\neq 1$.

【正确解答】由 $x^2=3$ 或 $x^2=x$ 得 $x=\pm\sqrt{3}$，$x=0$，$x=1$. 当 $x=1$ 时，集合 A、B 中均出现相同元素，与同一集合中元素互异矛盾，因此 $x\neq 1$，故选 D.

☞ 4

【典型错误】①③④⑤⑥都正确，②错. 因为空集 $\varnothing$ 是集合，$\{\varnothing\}$ 也是集合，集合与集合的关系不能用 $\in$ 符号，因此②的表达是错的，故选 B.

【错因分析】对②的判断是错的，其余判断正确，对于 $\varnothing\in\{\varnothing\}$ 的理解有误.符号 $\{\varnothing\}$ 的意义是：以空集 $\varnothing$ 作为元素构成的单元素集合. 空集 $\varnothing$ 是集合 $\{\varnothing\}$ 的一个元素，因此 $\varnothing\in\{\varnothing\}$.

【正确解答】根据元素与集合的关系和集合与集合的关系可知，①②③④⑤⑥都是正确的，因此选 C.

☞ 5

【典型错误】因为 $B\subseteq A$，所以应有 $\begin{cases}2a\geqslant 2,\\ a+3\leqslant 6.\end{cases}$ 解之得 $1\leqslant a\leqslant 3$，故选 A.

【错因分析】忽视了空集是任何集合的子集这一规定.

【正确解答】①当 $B\neq\varnothing$ 时，则有 $\begin{cases}2a\geqslant 2,\\ a+3\leqslant 6.\end{cases}$ 解之得 $1\leqslant a\leqslant 3$；

②当 $B=\varnothing$ 时，$2a>a+3$，解之得 $a>3$.

综合①②得 $a\geqslant 1$. 故选 C.

☞ 6

【典型错误】因为 $M=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-4}{x-2}=3\right.\right\}=\{(x,y)\mid y=3x-2\}=N$，所以 $(\complement_I M)\cap N=\varnothing$. 故选 B.

【错因分析】 对集合 M 的化简不是恒等变形，$M\neq\{(x,y)\mid y=3x-2\}$.

【正确解答】 因为 $M=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-4}{x-2}=3\right.\right\}=\{(x,y)\mid y=3x-2$ 且 $x\neq 2\}$，所以 $\complement_I M=\{(x,y)\mid y\neq 3x-2\}\cup\{(2,4)\}$. 又因为 $N=\{(x,y)\mid y=3x-2\}$，所以 $(\complement_I M)\cap N=\{(2,4)\}$. 故选 C.

☞ 7

【典型错误】$a+c=b+d$ 的否定是 $a+c\neq b+d$，$a=b$，$c=d$ 的否定是 $a\neq b$ 且 $c\neq d$，故选 A.

【错因分析】混淆了“且”与“或”的意义. $a=b$ 且 $c=d$ 的否定不是 $a\neq b$ 且 $c\neq d$.

【正确解答】原命题的结论 $a+c=b+d$ 的否定是 $a+c\neq b+d$，条件 $a=b$ 且 $c=d$ 的否定是 $a\neq b$ 或 $c\neq d$，故选 B.

8

【典型错误】由 $b^2>4ac$ 可得方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式，$\Delta=b^2-4ac>0$，由此可推得方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等实根．如果方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等实根，则它的判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$，由此得 $b^2>4ac$．因此，"$b^2>4ac$"是"方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等实根"的充要条件．

【错因分析】上述解法忽略了判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的适用范围，它只适用于一元二次方程实根的判断．在方程 $ax^2+bx+c=0$ 中，当 $a=0$ 时，它成为一次方程 $bx+c=0(b\neq0)$，一次方程不存在判别式，因此，上述解法是错误的．

【正确解答】当 $b^2-4ac>0$ 时不能推出方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个实根．例如，取 $a=0,b=1,c=1$，满足条件 $b^2-4ac=1^2-4\times0\times1=1>0$．但此时方程 $ax^2+bx+c=0$ 变为一次方程 $x+1=0$，它只有一个实根 $x=-1$，当方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等实根时，根的判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$，即 $b^2>4ac$ 成立，因此，由方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等实根可以推出 $b^2>4ac$ 成立．所以 $b^2>4ac$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等实根的必要不充分条件，故选 C．

9

【典型错误】由 $x^2-4x+3=0$ 得 $x=1,x=3$．因为 $M\cup N=M$，所以 $N\subseteq M$．当 $x=1$ 时，由 $tx-6=0$ 得 $t=6$；当 $x=3$ 时，由 $tx-6=0$ 得 $t=2$．因此符合条件的 t 值为 2，6．

【错因分析】以偏概全，忽略了 N 为空集的情况．

【正确解答】由 $x^2-4x+3=0$ 得 $x=1,x=3$，所以 $M=\{1,3\}$．因为 $M\cup N=M$，所以 $N\subseteq M$．当 $x=1$ 时，$t=6$；当 $x=3$ 时，$t=2$；当 $N=\varnothing$ 时，$t=0$．因此符合条件的 t 值为 0，2，6．

10

【典型错误】因为 $\complement_U A=\{5\}$，所以 $5\in U$ 且 $5\notin A$，故必有 $a^2+2a-3=5$．解之得 $a=2$ 或 $a=-4$．

【错因分析】上述解法错误的原因是忽略了隐含条件 $A\subseteq U$，当 $a=-4$ 时，$A=\{2,9\}$，$U=\{2,3,5\}$，$A\nsubseteq U$．

【正确解答 1】 因为 $\complement_U A=\{5\}$，所以 $5\in U$ 且 $5\notin A$，因此，必有 $a^2+2a-3=5$，解之得 $a=2$ 或 $a=-4$.

当 $a=-4$ 时，$A=\{2,9\}$，$U=\{2,3,5\}$，$A\not\subseteq U$，不满足补集的定义，舍去 $a=-4$.

当 $a=2$ 时，$A=\{2,3\}$，$U=\{2,3,5\}$，适合条件 $A\subseteq U$，所以 a 的值只能是 2.

【正确解答 2】 因为 $\complement_U A=\{5\}$，$A=\{|2a-1|,2\}$，$U=\{2,3,a^2+2a-3\}$

所以 $\begin{cases}|2a-1|=3,\\ a^2+2a-3=5.\end{cases}$ 解之得 $a=2$

☞ ***11***

【典型错误】 因为 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，所以，方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 的根只能是负根或 0，显然 0 根不可能，因此它只有负根. 由此得 $\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ x_1+x_2<0,\\ x_1x_2>0\end{cases}\Rightarrow p\geqslant 0$.

【错因分析】 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing\Rightarrow$ 方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 的根只能是负根或 0 的推断是错误的. 因为 $A=\varnothing$ 时，同样满足 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$.

【正确解答】 ①当 $A=\varnothing$ 时，方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 无实根，$\Delta<0\Rightarrow -4<p<0$；

②当 $A\neq\varnothing$ 时，方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 的根只能是负根或 0，显然 0 根不可能，因此它只有负根. 由此得 $\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ x_1+x_2<0,\\ x_1x_2>0\end{cases}\Rightarrow p\geqslant 0$.

综合①②得 p 的取值范围是：$p>-4$.

☞ ***12***

【典型错误】 命题"非 p"为：若 $\sqrt{x-2\,004}+ y-2\,005 \neq 0$，则 $x\neq 2\,004$ 或 $y\neq 2\,005$.

【错因分析】 对命题的否定与否命题的概念混淆.

【正确解答】 非 p：若 $\sqrt{x-2\,004}+ y-2\,005 =0$，则 $x\neq 2\,004$ 或 $y\neq 2\,005$（非 p 就是 p 的条件不变，把结论否定）.

☞ 13

【典型错误】集合 A 有且只有一个元素，所以一元二次方程 $ax^2+x+a-1=0$ 有两个相等的实根，因此 $\Delta=0$，即 $1-4a(a-1)=0$，解之得 $a=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$.

【错因分析】忽视了对 $a=0$ 的考查.由集合 A 有且只有一个元素，并不能推出方程 $ax^2+x+a-1=0$ 一定为二次方程. $a=0$ 时同样能满足集合 A 有且只有一个元素.

【正确解答】①当 $a=0$ 时，$x=1$，集合 $A=\{1\}$，满足条件；

②当 $a\neq0$ 时，由 $\Delta=0$，即 $1-4a(a-1)=0$，解之得 $a=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$.

因此，符合条件的 a 值为 $0,\frac{1+\sqrt{2}}{2},\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

☞ 14

【典型错误】$A=\{1,2\}$，因为 $A\cap B=B$，所以 $B\subseteq A$，因此 $B=\{1\}$ 或 $B=\{2\}$ 或 $B=\{1,2\}$. 若 $B=\{1\}$，将 $x=1$ 代入方程 $x^2-ax+3a-5=0$，得 $a=2$；若 $B=\{2\}$，将 $x=2$ 代入方程 $x^2-ax+3a-5=0$ 得 $a=1$；若 $B=\{1,2\}$，将 $x=1$，$x=2$ 分别代入方程 $x^2-ax+3a-5=0$，矛盾.所以符合条件的 a 值为 2，1.

【错因分析】①由 $B\subseteq A\Rightarrow B=\{1\}$ 或 $B=\{2\}$ 或 $B=\{1,2\}$ 有误，事实上，当 $B=\varnothing$ 时，也满足条件 $B\subseteq A$；②集合 $B=\{1\}$ 或 $B=\{2\}$ 时，方程 $x^2-ax+3a-5=0$ 应有等根，$\Delta=0$. 上述解法忽略了这个条件.

【正确解答】由 $A\cap B=B\Rightarrow B\subseteq A\Rightarrow B=\varnothing$ 或 $B=\{1\}$ 或 $B=\{2\}$ 或 $B=\{1,2\}$.

当 $B=\varnothing$ 时，$\Delta<0\Rightarrow 2<a<10$；当 $B=\{1\}$ 时，将 $x=1$ 代入方程 $x^2-ax+3a-5=0$ 得 $a=2$，满足 $\Delta=0$；当 $B=\{2\}$ 时，将 $x=2$ 代入方程 $x^2-ax+3a-5=0$ 得 $a=1$，不满足 $\Delta=0$；当 $B=\{1,2\}$ 时，不可能.所以符合条件的 a 的取值范围是 $[2,10)$.

二、函　数（一）

易错点扫描

1. 对函数和反函数的概念理解不透彻，造成概念性的解题失误.
2. 对函数符号意义的理解模糊，造成复合函数和反函数运算的失误.
3. 对函数图象的变换认识不深刻，造成图象变换中的错解.
4. 忽略函数的定义域，造成扩大解集的现象.
5. 忽略换元后新变元的取值范围，造成变量的允许取值范围扩大.
6. 错用一些函数的单调性而导致错解.

范例剖析

1. 已知 $f\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{2x+3}{x}$，求 $f^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$ 的解析式.

典型错误：因为 $f^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$ 与 $f\left(\frac{x}{3}\right)$ 互为反函数，所以，由 $y=\frac{2x+3}{x}$ 得 $yx=2x+3$，$(y-2)x=3$，因为 $y=\frac{2x+3}{x}$ 的值域为 $\{y\in\mathbf{R}\mid y\neq 2\}$，所以 $x=\frac{3}{y-2}$，即 $f^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{3}{x-2}\ (x\neq 2)$.

错因分析：上述解法错误的原因是将 $f^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$ 与 $f\left(\frac{x}{3}\right)$ 误认为是

互为反函数的关系，事实上，函数 $y=f^{-1}[g(x)]$ 与函数 $y=f[g(x)]$ 在一般情况下不是互为反函数的关系. 例如，设 $f(x)=2x+1$，$g(x)=\frac{x}{3}$，则 $y=f[g(x)]=f\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{2}{3}x+1$，由 $f(x)=2x+1$ 得 $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$，$y=f^{-1}[g(x)]=\frac{g(x)-1}{2}=\frac{x-3}{6}$，显然，$y=\frac{2}{3}x+1$ 与 $y=\frac{x-3}{6}$ 不具有反函数的关系.

⇨**正确解答**：先求 $f(x)$ 的表达式. 令 $\frac{x}{3}=t$，则 $x=3t$，$f(t)=\frac{6t+3}{3t}=2+\frac{1}{t}$，即 $f(x)=2+\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$. 由 $y=2+\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ 得 $y\neq 2$，$x=\frac{1}{y-2}$，即 $f^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{\frac{x}{3}-2}=\frac{3}{x-6}$ $(x\neq 6)$.

2. 求函数 $f(x)=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的值域.

⇨**典型错误**：令 $t=\sqrt{x^2+4}$，则 $y=t+\frac{1}{t}$，两边同时乘以 t，整理得 $t^2-yt+1=0$. 因为 $t\in\mathbf{R}$，所以 $\Delta=(-y)^2-4\geqslant 0$，解之得 $|y|\geqslant 2$. 显然 $y>0$，所以函数的值域为 $[2,+\infty)$.

⇨**错因分析**：上述解法错误的原因是换元之后没有考虑 t 的取值范围. 事实上，当 $y=2$ 时，由 $t+\frac{1}{t}=y=2$ 可得 $t=1$，由 $t=\sqrt{x^2+4}$ 可知 $t\geqslant 2$，所以，$t=1$ 不可能. 由此推得 $y=2$ 也不可能.

⇨**正确解答**：令 $t=\sqrt{x^2+4}$，则 $t\geqslant 2$，易知函数 $y=t+\frac{1}{t}$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上单调递增. 因此，当 $t=2$ 时，y 取得最小值 $\frac{5}{2}$，即 $y\geqslant\frac{5}{2}$，由此得函数的值域为 $\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$.

3. 利用定义判断函数 $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调性.

⇨**典型错误**：设 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1+\sqrt{x_1^2+1})-(x_2+\sqrt{x_2^2+1})=(x_1-x_2)+(\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1})$.

因为 $x_1<x_2$，所以 $x_1-x_2<0$，$\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}<0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$．所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调递增函数．

错因分析：上述解法产生错误的原因在于错用了函数 $g(x)=\sqrt{x^2+1}$ 的单调性．事实上，在整个区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，$g(x)=\sqrt{x^2+1}$ 不具有单调性．例如，取 $x_1=-1$，$x_2=3$，则 $x_1<x_2$，$g(x_1)<g(x_2)$；取 $x_3=-4$，$x_4=1$，则 $x_3<x_4$，$g(x_3)>g(x_4)$．因此，由 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，$x_1<x_2$，不能推出 $\sqrt{x_1^2+1}<\sqrt{x_2^2+1}$．

正确解答：设 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1+\sqrt{x_1^2+1})-(x_2+\sqrt{x_2^2+1})=(x_1-x_2)+(\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1})$$

$$=(x_1-x_2)+\frac{(x_1^2+1)-(x_2^2+1)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}=(x_1-x_2)+\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}$$

$$=\frac{(x_1-x_2)(\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}+x_1+x_2)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}.$$

因为 $x_1<x_2$，所以 $x_1-x_2<0$，$\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}>0$，而 $\sqrt{x_1^2+1}+x_1>|x_1|+x_1\geqslant0$，$\sqrt{x_2^2+1}+x_2>|x_2|+x_2\geqslant0$，所以 $\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}+x_1+x_2>0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$．

所以函数 $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调递增函数．

易错题集萃

1．已知集合 $M=\{x|0\leqslant x\leqslant1\}$，$N=\{y|0\leqslant y\leqslant1\}$，下列法则不能构成 M 到 N 的映射的是　　（　　）

A．$y=x^2$　　B．$y=\sin x$　　C．$y=\tan x$　　D．$y=\sqrt{x}$

2．设 $f(x)$，$g(x)$ 都是奇函数，$\{x|f(x)>0\}=\{x|4<x<10\}$，$\{x|g(x)>0\}=\{x|2<x<5\}$，则集合 $\{x|f(x)\cdot g(x)>0\}$ 等于　　（　　）

A．$(2,10)$　　B．$(4,5)$