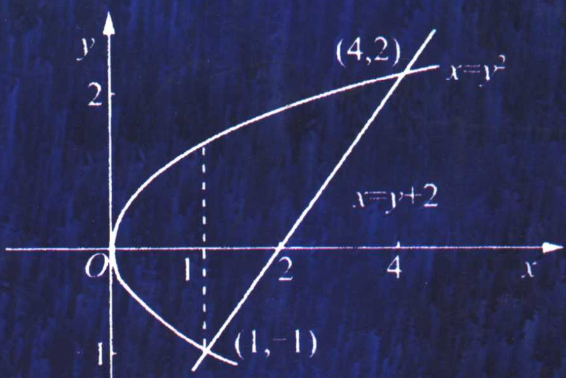
上海市普通高校重点课程建设项目

高等数学学习辅导

上海杉达学院数学教研室
孙薇荣　陈慧玉　主编



上海交通大学出版社

上海市普通高校重点课程建设项目

高等数学学习辅导

上海杉达学院数学教研室

孙薇荣　陈慧玉　主编

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书是上海市普通高校重点课程建设项目，共分8章，每章分四部分：内容要点、典型例题分析、自测题和提高题（均附答案或提示）。书后还附有《高等数学》上、下两学期的模拟试题和提高试题，供读者进行学期总复习。

本书可作为财经、管理类及相关专业一年级大学生学习《高等数学》的辅助教材，也可供讲授该课程的教师教学时参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习辅导 / 孙薇荣，陈慧玉主编. —上海：上海交通大学出版社，2006
ISBN 7-313-04471-2

I. 高… II. ①孙… ②陈… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第066658号

高等数学学习辅导
上海杉达学院数学教研室
孙薇荣　陈慧玉　主编
上海交通大学出版社出版发行
（上海市番禺路877号　邮政编码 200030）
电话：64071208　出版人：张天蔚
上海颛辉印刷厂印刷　　全国新华书店经销
开本：890mm×1240mm　1/32　印张：6.75　字数：192千字
2006年8月第1版　2006年8月第1次印刷
印数：1—4050
ISBN 7-313-04471-2/O·196　定价：13.00元

编 者 的 话

在高等院校中，对财经、管理类等专业普遍开设的以微积分为主体内容的高等数学课程，在高等教育中有着基础的、重要的地位。这门课程对刚跨入大学的学生而言，需要一段不短的适应过程，为了帮助他们学好高等数学，缩短适应过程，上海杉达学院任教该课程的老师们，积数十年的教学经验，编写了这本《高等数学学习辅导》教材，该教材可与一般的高等数学教材相配套。

本书的书名定为《高等数学学习辅导》，表明本书着眼于辅导学生如何学好高等数学课程。为此，本书的内容作如下安排。

首先，每章给出的“内容要点”，不是重复叙述教材中的内容，而是对学生必须掌握的基本概念、基本理论和基本方法给出说明，加以归纳、总结提高，对初学者起到解疑释难的效果，就有可能“纲举目张”，顺利地抵达彼岸。

第二，每章给出“典型例题分析”，选择例题的原则着眼于基本的知识点，而不是偏题、难题；着眼于解题分析，而不是过分强调技巧。使学生通过对一些基本的、典型的和有一定灵活性的例题的学习，以提高自己解答各类问题的能力，更好地掌握所学的知识，从而使数学学习进入良性循环的轨道。

第三，每章都编写了“自测题”，以帮助学生检查对本章基本知识的掌握程度，起到复习的效果。

第四，每章都给出了一定数量的“提高题”，其目的是让学有余力的学生及有志报考研究生的学生选做。从中可发现自己还有哪些基本内容掌握得不够，促使他们进一步深入和提高。

书末还附有《高等数学》(上、下)模拟试题和提高试题，以帮助学生检验自己对知识整体掌握的程度和提高综合运用知识的能力。

参加本书编写的有孙薇荣教授，陈慧玉、吴亚东、卢启兴、尤绍经、

张忆等副教授;另外张修梅、周晶华、邹富老师也参加了本书的讨论和编写工作。全书由孙薇荣、陈慧玉统稿。本书列入上海杉达学院高等数学教研室承担的上海市普通高校重点课程建设项目。在此衷心感谢给予本书编写和出版以种种帮助的上海市教委,上海杉达学院校长、教务处领导及上海交通大学出版社的领导和编辑。

本书主要适合于财经、管理等专业的本科学生,对成人教育和参加自学考试的学生也可作为学习辅导书。

由于编者水平和经验所限,本书不妥之处在所难免,恳请读者批评指正。

编　者

2006年8月

目　　录

1 函数 极限 连续

1.1 内容要点

(1) 函数

1) 函数的概念

理解函数的概念,会求函数的定义域和函数值.

【注意】 ① 函数的实质是从数集 X 到数集 Y 的映射 f,也就是从定义域 X 到值域 Y 的对应规则 f. $f(x)$表示函数 f 在点 x 的函数值;在微积分中,为省略起见,简单地把函数记为 $f(x)$,或 $y=f(x)$.

② 决定函数的两个要素:函数的定义域 X 和对应规则 f. 因此两个函数只要定义域和对应规则都相同,这两个函数就是相同的函数,与它们的自变量和因变量取什么记号无关.

2) 函数的性质

了解函数的奇偶性、增减性、周期性和有界性.

【注意】 ① 具有奇偶性的函数,其定义域必须对称于原点. 奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称.

② 周期函数的周期通常指的是最小正周期. 但并不是每一个周期函数都有最小正周期,例如常值函数.

③ 函数的有界性和增减性是相对于包含在其定义域内的区间而言的. 例如,$y=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上无界,而在$[1,2]$上是有界的;$y=x^2$ 在$(-1,1)$上不是单调函数,而在$(-1,0)$上是单调减函数.

3) 反函数与复合函数

【注意】 ① 严格单调增(或减)的函数 $y=f(x)$,$x\in X$(值域为

Y)，一定存在严格单调增（或减）的反函数 $x=f^{-1}(y)(y\in Y)$. $y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$的图像是相同的. 若将反函数 $x=f^{-1}(y)$的变量改写为 $y=f^{-1}(x)(x\in Y)$，则 $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$对称.

② 两个函数能够组成复合函数是有条件的，即当函数 $y=f(x)$的定义域 $D(f)$与 $u=g(x)$的值域 $Z(g)$满足：$D(f)\cap Z(g)\neq\varnothing$时，$f$ 与 g 可以构成复合函数 $y=f(g(x))$.

③ 要求学生会将一个复合函数分解成几个简单函数（由基本初等函数及它们的四则运算表示）的复合.

4) 基本初等函数

熟悉基本初等函数及其图像、性质，了解初等函数的概念，会对分段函数进行讨论.

5) 经济函数

了解成本函数、收益函数、利润函数、需求函数及供给函数等，并知道它们在经济学中的含意.

(2) 极限

1) 极限的概念

逐步理解数列极限、函数极限的定义.

【注意】 ① 极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 与 $f(x)$在点 x_0 是否有定义无关. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$.

② 极限中 ε-N，ε-δ 及 ε-X 的定义，通常用于极限性质的证明和推理过程，主要不是用于求极限.

③ 数列$\{y_n\}$可以看成有序整标函数 $y_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$，因此它可视为函数 $y=f(x)$，当 x 取自然数 n 的特殊情形. 可以证明：若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=A$，但反之不然. 例如 $f(x)=\sin\pi x$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi=0$，而 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\pi x$却不存在，因为 $\sin\pi x$在$[-1,1]$中振荡.

2）极限的性质

若数列极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$存在，则数列$\{a_n\}$有界，即$|a_n|\leqslant M$；若函数极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$存在，则$f(x)$具有局部有界性. 数列极限和函数极限都具有局部的保号性.

3）无穷小量与无穷大量

掌握无穷小量的定义、性质及两个无穷小量的比较；无穷大量的定义、无穷大量与无穷小量的关系.

【注意】 ① 无穷小量不是很小很小的常量，而是在自变量的某个变化过程中以零为极限的变量.

② 无穷大量不是很大很大的常量，而是在自变量某个变化过程中其绝对值无穷增大的变量，并用$\lim f(x)=\infty$，$+\infty$，$-\infty$表示，∞，$\pm\infty$仅是一个记号，不是数，它仍表明极限不存在，因此不能参与极限的运算.

4）极限的四则运算

熟悉极限的四则运算法则，会求未定式的极限.

【注意】 ① 极限的四则运算法则要求参与运算的函数都有极限，且分母的极限不为零.

② 对求某些不能直接利用四则运算法则的函数极限，可采用下述方法化简后再用四则运算法则求极限：

(a) 用因式分解、无理根式有理化方法消去分子和分母中的零因式；

(b) 用同除以分子、分母最高次方消除“∞因子”；

(c) 利用无穷大量与无穷小量的关系；

(d) 利用无穷小量与有界量的乘积仍为无穷小量.

5）极限的证明

① 利用分析定义验证极限.

② 利用“夹逼定理”、“单调有界数列必有极限”的极限存在准则证明极限存在.

(3) 连续

1）函数在一点连续的概念

理解函数$f(x)$在点x_0连续及左、右连续的概念.

【注意】 ① 函数 $f(x)$在点 x_0 处连续有两个等价定义：

(a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，即 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$；

(b) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$.

通常用定义 a 讨论 $f(x)$在某指定点 x_0 处的连续性，尤其是 $f(x)$为分段函数的情形；而定义 b 常用于讨论 $f(x)$在任意指定点 x_0 处的连续性.

② 函数 $f(x)$在点 x_0 处连续，必须要求 $f(x)$在点 x_0 及其邻域内有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在并等于函数值 $f(x_0)$.

2）初等函数的连续性

要求读者掌握"一切初等函数在其定义的区间内连续"这一重要结论，因此对于分段函数的连续性讨论主要考察函数在分界点的连续性.

3）间断点及其分类

【注意】 ① 根据函数 $f(x)$在点 x_0 的左、右极限 $f(x_0-0)$和 $f(x_0+0)$存在与否来区分两类间断点：若 $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$都存在的间断点为第一类间断点（可去或跳跃间断点）；若 $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$至少有一个不存在的间断点为第二类间断点（如无穷间断点、振荡间断点等）.

② 分段函数在分界点处根据函数在一点连续的定义来判断是否为间断点，在非分界点处看是否有定义来判定其连续性.

4）闭区间上连续函数的性质

理解有界性定理、最值定理、介值定理（包括零点定理）.

(4) 极限计算方法小结

① 极限的四则运算法则.

② 变量代换.

③ 利用两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e} \text{ 或} \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

④ 利用初等函数的连续性及 $\lim f(\varphi(x))=f(\lim\varphi(x))$.

⑤ 利用左极限、右极限相等来确定分段函数在分界点处的极限.

⑥ 利用等价无穷小量的代换.

【注意】 ① 当 $x\to0$ 时,$\sin x\sim x$,$\tan x\sim x$,$\ln(1+x)\sim x$,$e^x-1\sim x$,$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$,$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$等.这些等价式中的 x 换为中间变量 u,当 u 为无穷小量时亦成立.

② 做乘除运算时尽量用等价无穷小量代换,使之简化;做加减运算时一般不能用等价无穷小量代换,以免出错.

1.2 典型例题分析

例 1 填空题

① 已知 $f(x)$ 的定义域是 $[2,3]$,则 $f(\sqrt{9-x^2})$ 的定义域是______.

解 设 $u=\sqrt{9-x^2}$,$f(u)$的定义域为 $2\leqslant u\leqslant3$,则 $f(\sqrt{9-x^2})$的定义域为 $2\leqslant\sqrt{9-x^2}\leqslant3$,即$-\sqrt5\leqslant x\leqslant\sqrt5$.

② 已知 $f(x)=\begin{cases}x+1 & (x\leqslant0),\\ x^2+1 & (x>0)\end{cases}$ 的反函数为 $\varphi(x)$,则 $\varphi(2)=$______.

解 当 $x\leqslant0$ 时,$y=x+1$,$x=y-1$,$y\leqslant1$.

当 $x>0$ 时,$y=x^2+1$,$x=\sqrt{y-1}$,$y>1$.

所以,$f^{-1}(x)=\varphi(x)=\begin{cases}x-1 & (x\leqslant1),\\ \sqrt{x-1} & (x>1)\end{cases}$ $\varphi(2)=\sqrt{2-1}=1$.

③ 已知 $x\to0$ 时,$(1+kx^2)^{\frac13}-1$ 与 $\ln(1+x^2)$是等价无穷小量,则 $k=$______.

解 因 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+kx^2)^{\frac13}-1}{\ln(1+x^2)}\xlongequal[\ln(1+x^2)\sim x^2]{(1+kx^2)^{\frac13}-1\sim\frac13kx^2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac13kx^2}{x^2}=\frac{k}{3}=1$,

故 $k=3$.

④ 设 $f(x)=\begin{cases} a+e^{\frac{1}{x}} & (x<0), \\ b-1 & (x=0), \\ \dfrac{\arcsin 2x}{x} & (x>0) \end{cases}$ 在 $x=0$ 连续,则 $a=$________,

$b=$________.

解 由连续定义知 $\lim\limits_{x\to0^-}(a+e^{\frac{1}{x}})=a$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\arcsin 2x}{x}\xlongequal{t=\arcsin 2x}$

$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{\sin t}=2\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\dfrac{\sin t}{t}}=2$, $f(0)=b-1$, $a=2=b-1$,所以 $\begin{cases} a=2, \\ b=3. \end{cases}$

例 2 单项选择题

① 已知等式 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 对全体实数成立,则 $f(x)$ 是( ).

(A) 奇函数　　(B) 偶函数

(C) 既奇又偶　　(D) 非奇非偶

解 令 $x=0$,得 $f(0)=f(0)+f(0)=2f(0)$,因此 $f(0)=0$.

令 $y=-x$,得 $f(0)=f(x)+f(-x)$,则 $f(-x)=-f(x)$,即 $f(x)$ 是奇函数,所以应选择 A.

② 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(3x)}=2$,则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(-2x)}{x}=$( ).

(A) $\dfrac{1}{3}$　　(B) $-\dfrac{1}{3}$

(C) $\dfrac{4}{3}$　　(D) $-\dfrac{4}{3}$

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(-2x)}{x}\xlongequal{-2x=3t}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(3t)}{-\dfrac{3}{2}t}=-\dfrac{2}{3}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{\dfrac{t}{f(3t)}}=-\dfrac{1}{3}$,

所以应选择 B.

③ 当 $x\to0$ 时,$e^{x^2}-1$ 是比 x^k 高阶的无穷小量,则 k 必须满足( ).

(A) $k<2$　　(B) $k>2$

(C) $0<k<2$　　(D) $k>0$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^k}\xlongequal{e^{x^2}-1\sim x^2}\lim\limits_{x\to 0}x^{2-k}=0$，故 $k<2$.

但是，当 $k>0$ 时，x^k 为无穷小量，故 $0<k<2$. 所以应选择 C.

④ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ 等于（　）.

(A) 0　　(B) $\dfrac{1}{2}$

(C) 1　　(D) 以上答案都错

解 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}=\begin{cases}0 & (|x|<1),\\ \dfrac{1}{2} & (|x|=1),\\ 1 & (|x|>1)\end{cases}$ 故应选择 D.

例 3 设 $f(x)=\sqrt{\lg\dfrac{3x-x^2}{2}}$. 求：① $f(x)$ 的定义域；② $f(\ln x)$ 的定义域.

解 ① 因 $\begin{cases}\lg\dfrac{3x-x^2}{2}\geqslant 0,\\ \dfrac{3x-x^2}{2}>0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\dfrac{3x-x^2}{2}\geqslant 1,\\ \dfrac{3x-x^2}{2}>0,\end{cases}$

解得 $1\leqslant x\leqslant 2$，故 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$.

② 由题①的结果得 $1\leqslant x\leqslant 2$，现 $1\leqslant \ln x\leqslant 2$，$e\leqslant x\leqslant e^2$，所以 $f(\ln x)$ 的定义域为 $[e,e^2]$.

例 4 设 $f(e^x)=\sin x$，求 $f(x)$ 及其定义域.

解 设 $u=e^x$，得 $x=\ln u$，所以 $f(u)=\sin(\ln u)$，即 $f(x)=\sin(\ln x)$，其定义域为 $(0,+\infty)$.

例 5 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f(f(x))$，$f(f(f(x)))$ 及其定义域.

解 $f(f(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1-\dfrac{1}{x}\quad(x\neq 0,1)$；

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)}=x \quad (x\neq 0,1).$$

例 6 设 $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & (x\leqslant 0),\\ x+1 & (x>0)\end{cases}$ 求：① $f^{-1}(x)$；② $f(f(x))$.

解 ① $f(x)$在定义域内为单调函数，所以存在反函数 $f^{-1}(x)$，且 $f^{-1}(x)$可由方程 $y=f(x)$解得.

当 $x\leqslant 0$ 时，$y=-x^2+1$，解得 $x=-\sqrt{1-y}$，且 $y\leqslant 1$，即

$f^{-1}(x)=-\sqrt{1-x}$，且 $x\leqslant 1$；

当 $x>0$ 时，$y=x+1$，解得 $x=y-1$，且 $y>1$，即

$f^{-1}(x)=x-1$，且 $x>1$；

所以
$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{1-x} & (x\leqslant 1),\\ x-1 & (x>1).\end{cases}$$

② $f(f(x))$可直接由 $u=f(x)$代入 $f(u)$得到，并注意分段函数分段处理.

$$f(f(x))=\begin{cases}-f^2(x)+1 & (f(x)\leqslant 0),\\ f(x)+1 & (f(x)>0).\end{cases}$$

(a) 当 $f(x)\leqslant 0$ 时：

当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=-x^2+1\leqslant 0$，即 $\begin{cases}x\leqslant 0,\\ |x|\geqslant 1,\end{cases}$ 解得 $x\leqslant -1$.

当 $x>0$ 时，$f(x)=x+1\leqslant 0$，即 $\begin{cases}x>0,\\ x\leqslant -1,\end{cases}$ 解得 $x\in\varnothing$.

(b) 当 $f(x)>0$ 时：

当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=-x^2+1>0$，即 $\begin{cases}x\leqslant 0,\\ |x|<1,\end{cases}$ 解得 $-1<x\leqslant 0$.

当 $x>0$ 时，$f(x)=x+1>0$，即 $\begin{cases}x>0,\\ x>-1,\end{cases}$ 解得 $x>0$.

综上可得

$$f(f(x))=\begin{cases}-(-x^2+1)^2+1 & (x\leqslant -1),\\ (-x^2+1)+1 & (-1<x\leqslant 0),\\ (-x+1)+1 & (x>0)\end{cases}=\begin{cases}x^4-2x^2 & (x\leqslant -1),\\ -x^2+2 & (-kx\leqslant 0),\\ -x+2 & (x>0).\end{cases}$$

例 7 设 $f(x)=\begin{cases}0 & (x<0),\\ x & (x\geqslant 0),\end{cases}$ $g(x+1)=x^2+x+1$. 求：$f(g(x))$；$g(f(x))$.

解 设 $x+1=t$，得 $g(t)=(t-1)^2+(t-1)+1=t^2-t+1$，

即 $g(x)=x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$，

则 $f(g(x)=g(x)=x^2-x+1, x\in(-\infty,+\infty)$，

$$g(f(x))=f^2(x)-f(x)+1=\begin{cases}1 & (x<0),\\ x^2-x+1 & (x\geqslant 0).\end{cases}$$

例 8 证明 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 为非周期函数.

分析 由周期函数定义知道，若 T 为 $f(x)$ 的周期，则对任意 x 都有 $f(x+T)=f(x)$，即 $f(x+T)-f(x)=0$. 在此式中，可以把 T 看做未知量来解，若解出 T 依赖于自变量 x 或为 0，则 $f(x)$ 为非周期函数.

证 $f(x+T)-f(x)=\sin\dfrac{1}{x+T}-\sin\dfrac{1}{x}$

$$=-2\sin\frac{T}{2x(x+T)}\cos\frac{2x+T}{2x(x+T)},$$

若 T 为周期，则应有

$$\sin\frac{T}{2x(x+T)}=0 \quad 或 \quad \cos\frac{2x+T}{2x(x+T)}=0,$$

显然，满足上述二式的非零常数 T 是不存在的. 若 $\sin\dfrac{T}{2x(x+T)}=0$，则 $\dfrac{T}{2x(x+T)}=k\pi(k=0,\pm1,\cdots)$，即 $T=\dfrac{2k\pi x^2}{1-2k\pi x}$，说明 T 随 x 而改变. 若 $\cos\dfrac{2x+T}{2x(x+T)}=0$，同样 T 随 x 而改变. 所以 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 不是周期函数.

例 9 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x-1} & (x<0),\\ e^{\frac{1}{x}} & (0<x<1),\\ x\sin x & (x>1).\end{cases}$

求：①x 趋于何值，$f(x)$为无穷小量；②x 趋于何值，$f(x)$为无穷大量.

解 ① $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sin x}{x-1}=0\left(|\sin x|\leqslant 1,\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-1}=0\right)$，所以当 $x\to-\infty$时，$f(x)$为无穷小量.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x-1}=0$，所以当 $x\to 0^-$ 时，$f(x)$也为无穷小量.

$\lim\limits_{x\to -k\pi} f(x)=0\ (k=1,2,\cdots)$，所以当 $x\to -k\pi$ 时，$f(x)$也为无穷小量；

$\lim\limits_{x\to k\pi} f(x)=\lim\limits_{x\to k\pi} x\sin x=0\ (k=1,2,\cdots)$，所以当 $x\to k\pi$ 时，$f(x)$为无穷小量.

② $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty$，所以当 $x\to 0^+$时，$f(x)$为无穷大量.

例 10 讨论 $x\to 0$ 时，下列函数极限的存在性：

① $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$；② $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$；③ $f(x)=\begin{cases} 2^x & (x<0), \\ \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} & (x>0). \end{cases}$

解 ① $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\sin x}{x}=-1$，所以极限不存在.

② $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=+\infty$，所以极限不存在.

③ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2^x=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\xlongequal{\mathrm{e}^x-1\sim x}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$，所以极限存在，且为 1.

【注】 由此例可知：①$f(x)$在一点是否存在极限与它们在该点是否有定义无关. ②当分段函数分界点的两侧的对应规律不同时，判断该点是否存在极限，需求该点的左、右极限. 判断非分段函数在某点处存在极限，一般不需求左、右极限；但要判断它在某点处不存在极限，需求该点的左极限或右极限.

例 11 检查下列运算是否正确，若不正确，写出正确运算过程.

① $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=0\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=0$；