



荣德基 总主编

®

# 典 点

## 综合应用创新题

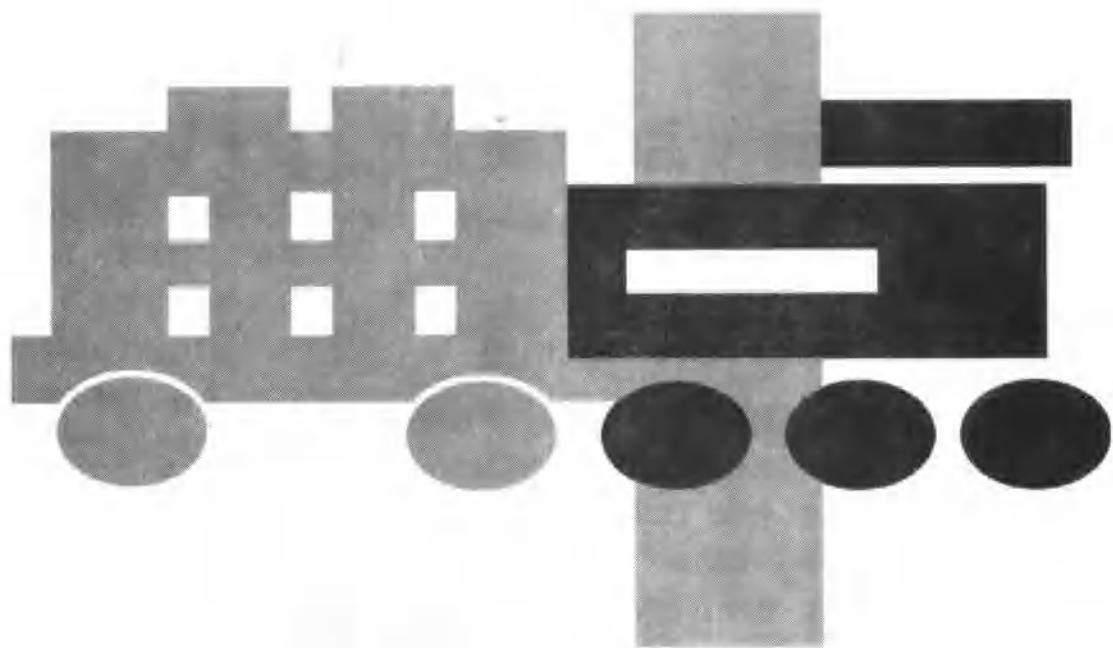
试验修订版

### 高二数学 下A

掀起题海的浪花

凝起知识的雨露

内蒙古少年儿童出版社

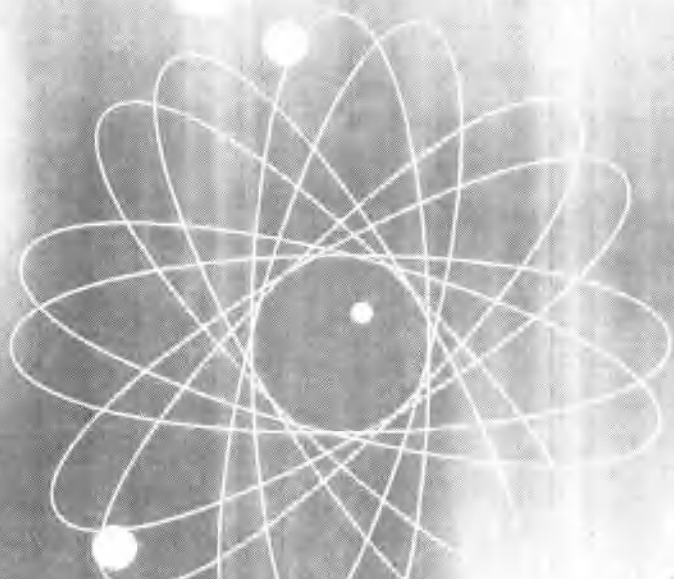


# 高二数学(下 A)

(试验修订版)

总主编:荣德基

本册主编:张利敏



鸟儿选择天空,因为它可以高飞  
鱼儿选择大海,因为它可以畅游  
骆驼选择沙漠,因为它可以跋涉  
骏马选择草原,因为它可以驰骋  
做最好的选择,才能展现最优秀的你

内蒙古少年儿童出版社


图书在版编目(CIP)数据

综合应用创新题典中点. 高二数学. 下/荣德基主编. 一通辽:内蒙古少年儿童出版社,2006.9  
ISBN 7-5312-2158-6

I. 综... II. 荣... III. 数学课-高中-习题 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 108177 号

## 你的差距牵动着我的心



责任编辑/巴 木

装帧设计/典点瑞泰

出版发行/内蒙古少年儿童出版社

地址邮编/内蒙古通辽市霍林河大街西 312 号(028000)

经 销/新华书店

印 刷/北京市施园印刷厂

总 字 数/3252 千字

规 格/880×1230 毫米 1/16

总 印 张/106.25

版 次/2006 年 9 月第 1 版

印 次/2006 年 9 月第 1 次印刷

总 定 价/160.50 元(全 9 册)

版权声明/版权所有 翻印必究



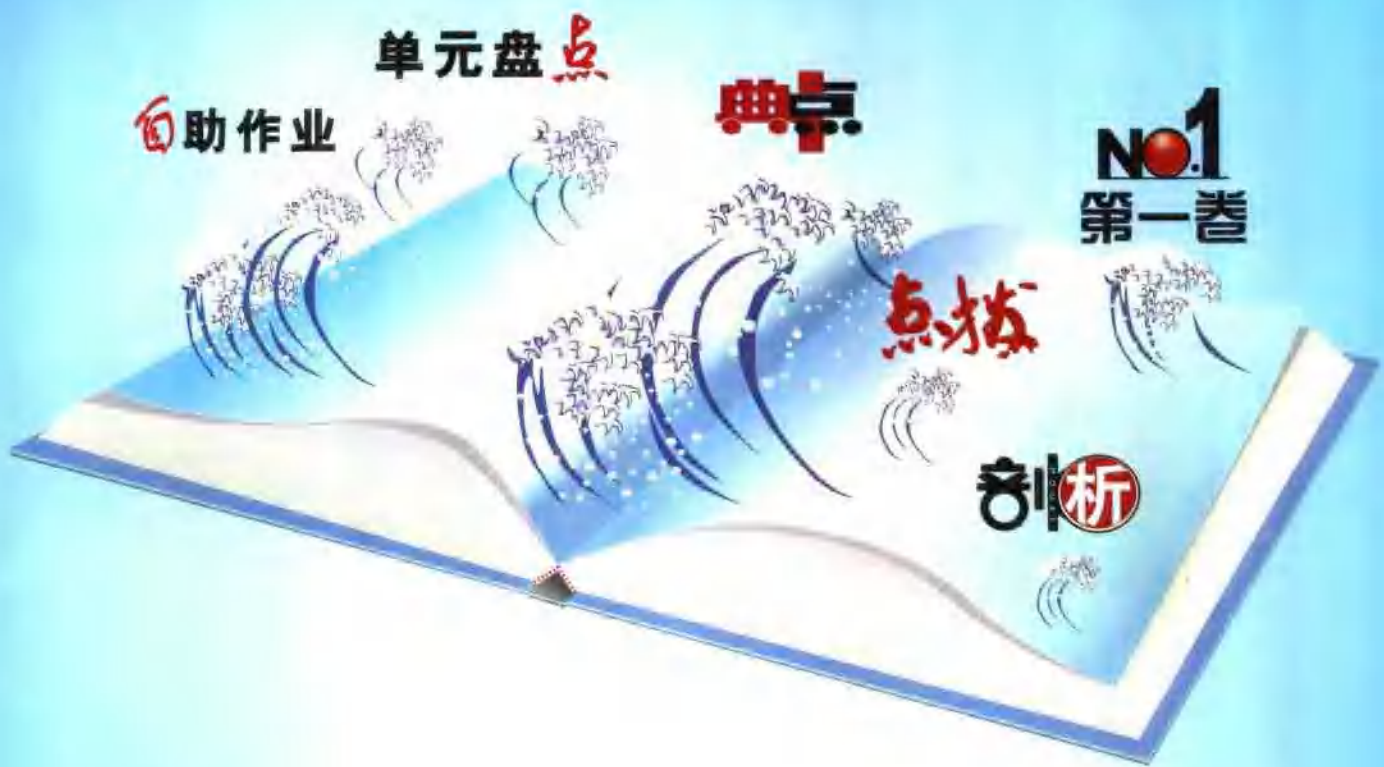
## 最<sup>困</sup>难的事

有人问古希腊哲学家泰勒斯：“你认为人活在这个世界上，什么事情是最难做的？”泰勒斯回答说：“认识你自己。”认识自己难，认识自己的不足更难。

我们每天孜孜不倦地学习，为的不是重复那些我们已经懂得了、做过了、掌握了的东西，而是为了那些我们还不懂、做错了、要掌握的东西。

**练一练、测一测，看清自己，看清目标！**





## 在知识的海洋里汲取智慧的浪花

见过一片海，  
用渊博的知识激荡起壮阔的海面；  
采过一丛花，  
因智慧的碰撞绽放开含蓄的花瓣；  
有过一个梦，  
决定从这里启程……

## 《典中点》特色

◆ 增加知识点解读内容，遵循课前预习——课堂学习——课后复习的教学步骤设计板块。由宏观至微观地对每章、每课、每节知识点进行讲解，观点与例证结合，真正做到让学生明白自己需要什么学什么，重点怎么学，非重点怎么学，基础怎么打，能力怎么抓，知识怎么用，试题怎么答……总之，讲就讲得经典，学就学得通透。

◆ 信息含量高。充分体现“综合、应用、创新”的精神，在命题素材、命题角度、命题方式等各方面均做到新、热、准，既渗透了新课程标准要求的新理念，又采取稳中求变的过渡式引导，让同学们在知识的学习与运用过程中自然地提升综合、应用、创新能力。

◆ 答案点拨到位。答案独立成册，是荣德基老师在教辅图书领域的又一独创，因此《典中点》也自然成为了先行者，它的答案包括参考答案、解题思路引导、详细解题过程、多种解题方法及本题拓展等信息，真正让你取得举一反三的学习效率。

◆ 题型丰富，命题结构科学。包括知识点解读案例题、经典基础题和一系列渗透新课标理念题。总之，“综合应用创新”是荣德教辅的灵魂式理念，而《典中点》则是这一理念的发展、完善、开拓的先行者和探索者。

感谢一直以来关心支持《典中点》丛书的老师、家长和同学们，是你们给了我们动力和灵感。因此，你们来信中的鼓励和建议都将在荣德教辅新书中找到影子，希望你们能仔细观察、认真使用，也在本书中找到您的汗水！

最后，祝老师和家长朋友们工作顺利、身体健康！

# 《典中点》新版丛书特写

《综合应用创新题·典中点》，简称《典中点》，荣德基老师继《点拔》之后又一经典品牌，荣德教辅的灵魂之作！顾名思义，它的经典不仅在于它每一道题的质量以及它拥有的各种丰富多彩、开放创新的题型，更在于它是根据荣老师对新课标进行研究后所总结出的“综合应用创新”学习理念量身定做的。当你在各个书店看到那些琳琅满目的教辅图书时，你是否突然很真切地感受到了学海无边、题海无涯？如果是这样，《典中点》应该是海面上的一座静静伫立的小岛，它不巍峨，但却藏着奇珍异宝，它可以让你脱离题海漫游的苦累，轻松愉快高效地获取学习中的惊喜……

### 《典中点》系列

《典中点》新课标各版本教材配套用书

《典中点》试验修订版教材配套用书

## 《典中点》丛书贯彻的荣德教辅策划理念

点拨理念——用易学、易掌握、易变通的方式，用妥帖、精辟的语言，深入浅出，使同学们在思维里顿悟，在理解中通透，在运用中熟练。

创新理念——深入挖掘贯彻同步辅助教学的两个概念：教材新知识学习同步和教材知识复习同步。

精品理念——精益求精，策划读者需要的、做最适合读者的精品图书。

差距理念——荣老师的独创，贯彻荣德教辅始终的CETC循环学习法的精髓。

高考在平时理念——在练习中融入对应本课（节）知识点的高考真题，培养高考应试能力。

编委会祝福

2006年2月

# 震撼学生心灵的学习方法

## ◆ 撬动灵感的杠杆——荣德基老师创造CETC学习法灵感的由来

创造从学习开始。1997年两本书叫醒了荣老师沉睡的灵感神经，点亮了CETC循环学习法的灵魂之光。她们是《在北大等你》（光明日报出版社出版）和《等你在清华》（中国检察出版社出版）。

书中考入清华和北大的文、理科高考状元及优秀学生，用自己的切身经历，介绍了他们高效率的复习方式和独特的高考心态平衡法。摘录如下：

1. “我习惯于把每次测验中出现的错误记录下来，到下一次考试前翻过来看看，这样就不会重犯过去的错误。”

（熊达前，1996年广西文科高考第一名，北京大学经济学院）

3. “对高考来说，重视一道错题比你做一百道习题也许更为重要。”

（洪森，1996年河北省文科高考第三名，北京大学法学院）

4. “我高中三年的单元考和期末考的卷子以及高三的各种试卷基本上都保存着，在最后关头把它们拿出来看

看，主要是看其中的错题，分析一下错误原因，讨论一下正确做法，使我加深了印象，不让自己再犯相同的错误。”

（徐海晨，1995年四川省理科高考第三名，北京大学生命科学学院）

7. “要重视自己的学习方法。在学习中，学习方法非常重要，两个智力和勤奋程度差不多的人，

方法好的可能会优秀很多。这里我只提供一个比较适用的方法：自己准备一个笔记本，把平时做题中出现的错误都整理上去，写上造成错误的原因和启示。如果你平时做题出错较多，比如一张练习卷要错五、六处或更多，抄错题恐怕得不偿失，这时你可以在试卷上把错题做上标记，在题目的旁边写上评析，然后把试卷保存好，每过一段时间，就把‘错题笔记’或标记错题的试卷翻着看一看，好处会很大。在看参考书时，也注意把精彩之处或做错的题目做上标记，这样以后你再看这本书时就有所侧重了，不必再整个看一遍。”

（魏少岩，1996年平时成绩优秀保送清华）

## ◆ 荣老师规律总结：

如何对待错误？考上清华、北大的同学们，都有一个错题记录本，关注做错的题，花精力复习做错的题！

2. “题不二错。我们班同学大都有一个错题本。通过分析错题，可以明白自己的弱点，更好地查漏补缺。同学们不妨一试。”

（殷楠，1995年北京文科高考第一名，北京大学经济学院）

## ◆ CETC的灵魂——差距

C—comprehension：听老师讲课，读教材，看教辅，不懂的地方——差距。（为什么不懂，有差距）

E—exercise：做练习题的错题——差距。（练习时为什么做错，有差距）

T—test：各种考试中做错的题——差距。（考试时为什么做错，有差距）

C—countermeasure：应对措施——消灭差距的方式方法。（再次做题时，保证题不二错）

锁定差距：C、E、T

缩小差距与消灭差距：C

CETC：锁定差距——缩小差距——消灭差距（这是CETC的目标和核心）

荣德基CETC循环学习法：CETC不停地循环——循环——再循环，差距在循环中锁定，在循环中缩小，在循环中消灭。

5. “我建议同学们能建立一个‘错题记录’，仔细分析原因，找出相应的知识点加以巩固强化，这样能避免重复犯同样的错误。”

（尹华，1997年山东省理工科高考第一名，清华大学化学系）

6. “一个很有效的方法就是做完题后写总结、感想，尤其是对那些想了半天没做出来的或者会做做错的题尤为重要。要把自己为什么不会做

或者为什么做错的原因记下来，这样才会有真正的收获，做题的意义也在于此。我自己就一直是这样做的，如果你翻看我做过的习题集或试卷，就会发现随处都是用红笔写的批注，我从中收获极大。”

（陈丰恩，1997年保送清华大学经济管理学院，1997年北京市理工科高考第七名）



# 荣德教辅对教师和学生们的关爱

荣德教辅丛书编委会在认真用心地策划教辅的同时，更加注重对全国的教师和学生读者的跟踪服务和相互交流。为了保证您享受到相应服务，请务必在寄给读者服务部的信中详细注明您的通信地址、邮编和联系电话，我们将为每一位教师和学生建立个人跟踪服务档案，并提供以下多种特色增值服务，敬请参与。

## 服务一：读书建议奖

荣德基老师非常重视同学们在使用荣德教辅过程中总结的意见和建议，自2002年设立“读书建议奖”以来，已有许多读者获得了该项奖励。2006—2007学年，继续对具有建设性的建议给予奖励，奖项如下：

一等奖2名，奖金500元；二等奖5名，奖金200元；三等奖50名，荣德基主编图书《单元盘点》《自助作业》或高考《第一卷》任述三册；四等奖200名，荣德基主编图书《单元盘点》《自助作业》或高考《第一卷》任选一册。

欢迎教师和同学们积极对荣德教辅的各个方面提出意见，以便我们再版时采纳并修改，更好地为读者服务：

1. 你认为本书在实用性上（题量及知识覆盖面）、适用性上（符合学习习惯）、难易度上（难易程度等方面）如何改进？

2. 你认为本书结构体系在设计上有哪些值得改进的方面？

3. 在用过的教辅书中你认为哪些对你最有帮助（请指出书名、科目、年级、出版社），主要优点是什么？

**活动截止时间：**2007年5月30日（以当地邮戳为准）。

获奖名单于2007年6月30日在荣德网上公布，请注意上网查询，祝你好运！

## 服务二：“在线擂台”和“在线评估”

荣德网（www.rudder.com.cn）设有两个“金牌”栏目，一是“在线擂台”，即同学们在网上同台竞技，看谁解题正确并且最快，优胜者将获得精美奖品；二是“在线评估”即“成长标杆”，根据同学们网上同步试题的测试结果，进行全国、各省、各地区的成绩成长排名，并剖析错题原因，弥补不足，消灭差距。还有学生、教师都很喜欢的“试卷交流”“课件交流”等栏目。

## 服务三：“读好书！收好礼！”活动

为了奖励同时选用荣德教辅两个系列以上的读者，丛书编委会精心策划了“读好书！收好礼！”活动：

如果在当地荣德教辅销售书店一次性购买荣德基主编五个系列图书《点拨》《典中点》《剖析》《自助作业》《单元盘点》中两个系列（注：1. 必须含《剖析》《单元盘点》或《自助作业》；2. 必须为同一年级用书；3. 同一系列不同学科）以上正版荣德教辅共九本者，请将购书小票、每本书的扉页（即该书第一页）和详细联系方式（地址、邮编、姓名、联系电话）一同寄回读者服务部，即可获赠《单元盘点》《自助作业》或高考《第一卷》任意一册（注明所要图书的年级、系列、版本、科目、上/下册）。

## 服务四：权威试卷助你成功！

为了更好的服务读者，加强CETC差距理念的指导作用，应广大读者朋友的要求，2005年8月，荣德基老师联合高考命题研究专家等为2006年高考备考学子倾心打造了《荣德基CETC高考攻略第一卷》。





2006年高考《第一卷》共12期，全面解析高考复习各阶段考试信息，配合、辅助师生备考。

2006年6月，神秘的高考以一种沸腾的方式印证了《第一卷》的权威性和实效性：《第一卷》第11期《揭密卷》押中60分的四川高考以“问”为话题的作文题！

据统计，2005—2006学年度《第一卷》12期不同主题的试卷与2006年高考相同、相近、相似的试题总分高达923分！（详见已上市的2007年高考《第一卷》第4、5期）

奇迹见证了权威的力量！

冲刺，借助权威的力量，让奇迹成为可能！

奋斗，展现王者的姿态，零距离接触高考！

在2006年高考基础上，2007年高考《第一卷》编制计划为：

类别	期序	实际使用名称	性质	特点	册数
一号战役 教材差距 系列	1、2	一轮单元检测卷	原创	检测一轮单元复习效果	9册
	3	决选26套高考经典模拟卷	真题	2006年高考经典模拟卷精品汇编	13册
	4	2006年高考真题大揭密	真题	权威机构解读2006年高考试卷 检测2007年各阶段复习效果	6册
	5	2006年高考真题分类点拨	真题	分类点拨2006年高考命题规律 查找与教材大纲或课标的差距	9册
二号战役 考纲差距 系列	6	梯度卷	原创	预测2007考试大纲变化情况 查找与考试大纲的差距 检测二轮复习效果	13册
三号战役 高考差距 系列	7	模拟卷（一）	真题	2007年各地经典一模卷汇编 锁定与高考的差距	13册
	8	揭密卷	原创	顶级高考命题研究专家编审 缩小与高考的差距	7册
	9	模拟卷（二）	真题	2007年各地经典二模卷汇编 消灭与高考的差距	13册
	10	押题卷	原创	2007年高考专家押题 高考前最后抢分	2册

2008年高考《第一卷》编制计划与上述计划大致相同，同时我们也将根据读者实际需要作相应调整。它不仅帮助2008年高考考生备考，也适用于高中其他年级学生做巩固练习。

《第一卷》的特点为：

- ◆ **设计科学、构思精妙、训练扎实：**“三大战役”中渗透着CETC差距理念，具有真实性、科学性、时效性和创新性。
- ◆ **权威打造：**写作团队实力雄厚，整合高考备考有效信息，命制高效度和高信度的试卷，体验实战规格。
- ◆ **超强时效保证：**吸纳当前最新高考动态信息，坚持在考生每个复习阶段都能给备考师生最新最准最多的备考信息。
- ◆ **答案点拨透彻：**准确把握考点、重点、难点和疑点。

你将参加2008年高考，我们将一起再次见证《第一卷》的辉煌！

通讯地址：北京100077—29信箱 读者服务部 收 邮编：100077

服务咨询电话：010-67528614

邮购汇款地址：北京100077—29信箱 裴立武 收 邮编：100077

邮购汇款查询：010-86991251

# 目 录

## CONTENTS

<b>第九章 直线、平面、简单几何体</b>	
<b>第一节 平面</b> ..... 1	
I. 必记知识全览..... 1	
II. 知识点过关..... 1	
III. 测试卷..... 3	
A 卷:基础经典题..... 3	
<b>第二节 空间直线</b> ..... 5	
I. 必记知识全览..... 5	
II. 知识点过关..... 5	
III. 五年高考题一网打尽..... 8	
IV. 测试卷..... 8	
A 卷:基础经典题..... 8	
B 卷:综合应用创新题..... 9	
<b>第三节 直线与平面平行的判定和性质</b> ..... 11	
I. 必记知识全览..... 11	
II. 知识点过关..... 11	
III. 五年高考题一网打尽..... 14	
IV. 测试卷..... 14	
A 卷:基础经典题..... 14	
B 卷:综合应用创新题..... 16	
<b>第四节 直线与平面垂直的判定和性质</b> ..... 18	
I. 必记知识全览..... 18	
II. 知识点过关..... 18	
III. 五年高考题一网打尽..... 22	
IV. 测试卷..... 23	
A 卷:基础经典题..... 23	
B 卷:综合应用创新题..... 24	
<b>第五节 两个平面平行的判定和性质</b> ..... 26	
I. 必记知识全览..... 26	
II. 知识点过关..... 26	
III. 五年高考题一网打尽..... 28	
IV. 测试卷..... 28	
A 卷:基础经典题..... 28	
B 卷:综合应用创新题..... 30	
<b>第六节 两个平面垂直的判定和性质</b> ..... 31	
I. 必记知识全览..... 31	
II. 知识点过关..... 31	
III. 五年高考题一网打尽..... 35	
IV. 测试卷..... 37	
A 卷:基础经典题..... 37	
B 卷:综合应用创新题..... 38	
<b>第七节 棱柱</b> ..... 40	
I. 必记知识全览..... 40	
II. 知识点过关..... 40	
III. 五年高考题一网打尽..... 43	
IV. 测试卷..... 45	
A 卷:基础经典题..... 45	
B 卷:综合应用创新题..... 46	
<b>第八节 棱锥</b> ..... 48	
I. 必记知识全览..... 48	
II. 知识点过关..... 48	
III. 五年高考题一网打尽..... 52	
IV. 测试卷..... 54	
A 卷:基础经典题..... 54	
B 卷:综合应用创新题..... 55	
<b>第九节 球</b> ..... 57	
I. 必记知识全览..... 57	
II. 知识点过关..... 57	
III. 五年高考题一网打尽..... 59	
IV. 测试卷..... 60	
A 卷:基础经典题..... 60	

B卷:综合应用创新题 .....	61
专题训练 1 .....	62
专题训练 2 .....	63
专题训练 3 .....	64
第九章标准检测卷 .....	65
第二学期期中标准检测卷 .....	68
<b>第十章 排列、组合和二项式定理</b>	
第一节 分类计数原理与分步计数原理 .....	70
I. 必记知识全览 .....	70
II. 知识点过关 .....	70
III. 五年高考题一网打尽 .....	72
IV. 测试卷 .....	72
A卷:基础经典题 .....	72
B卷:综合应用创新题 .....	73
第二节 排 列 .....	74
I. 必记知识全览 .....	74
II. 知识点过关 .....	74
III. 五年高考题一网打尽 .....	77
IV. 测试卷 .....	77
A卷:基础经典题 .....	77
B卷:综合应用创新题 .....	78
第三节 组 合 .....	80
I. 必记知识全览 .....	80
II. 知识点过关 .....	80
III. 五年高考题一网打尽 .....	83
IV. 测试卷 .....	84
A卷:基础经典题 .....	84
B卷:综合应用创新题 .....	85
第四节 二项式定理 .....	87
I. 必记知识全览 .....	87
II. 知识点过关 .....	87
III. 五年高考题一网打尽 .....	89

IV. 测试卷 .....	90
A卷:基础经典题 .....	90
B卷:综合应用创新题 .....	91
专题训练 1 .....	92
专题训练 2 .....	94
第十章标准检测卷 .....	95
<b>第十一章 概 率</b>	
第一节 随机事件的概率 .....	97
I. 必记知识全览 .....	97
II. 知识点过关 .....	97
III. 五年高考题一网打尽 .....	100
IV. 测试卷 .....	100
A卷:基础经典题 .....	100
B卷:综合应用创新题 .....	101
第二节 互斥事件有一个发生的概率 .....	103
I. 必记知识全览 .....	103
II. 知识点过关 .....	103
III. 五年高考题一网打尽 .....	105
IV. 测试卷 .....	106
A卷:基础经典题 .....	106
第三节 相互独立事件同时发生的概率 .....	108
I. 必记知识全览 .....	108
II. 知识点过关 .....	108
III. 五年高考题一网打尽 .....	110
IV. 测试卷 .....	114
A卷:基础经典题 .....	114
B卷:综合应用创新题 .....	115
专题训练 .....	118
第十一章标准检测卷 .....	119
第二学期期末标准检测卷 .....	122
参考答案及点检拓展 .....	125

## 第九章 直线、平面、简单几何体

## 第一节 平面



## I. 必记知识全览

工欲善其事 必先利其器

## 一、必记概念

1. 平面:平面是几何中最基本的原始概念,只作描述而未加定义.平面是\_\_\_\_\_的,因此,平面没有边界,也无所谓面积,平面不计大小,不论厚薄,这是平面最本质的一个特性.

2. 平面的画法:通常画\_\_\_\_\_四边形来表示平面,当平面水平放置的时候,通常把平行四边形的锐角画成\_\_\_\_\_,横边画成邻边长的\_\_\_\_\_,但有时根据需要也可用其他平面图形表示,如\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_,梯形等.当一个平面的一部分被另一个平面遮住时,应把被遮部分的线段画成\_\_\_\_\_或\_\_\_\_\_.

3. 平面的表示方法:通常用一个\_\_\_\_\_字母\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_等表示,如平面 $\alpha$ 、平面 $\beta$ 、平面 $\gamma$ 等,也可以用表示平行四边形的顶点的\_\_\_\_\_表示,如平面 $ABCD$ ,也可以用表示平行四边形的两个\_\_\_\_\_顶点的字母来表示,如平面 $AC$ .

4. 平面的组成:平面可以认为是由它内部的所有的点组成的\_\_\_\_\_,其中每个点都是它的\_\_\_\_\_,点 $A$ 在平面 $\alpha$ 内,记作\_\_\_\_\_,点 $B$ 在平面 $\alpha$ 外,记作\_\_\_\_\_.平面也可以看成是由它内部的所有直线组成的,若直线 $l$ 在平面 $\alpha$ 内,则记作\_\_\_\_\_.

\_\_\_\_\_,若直线 $l$ 不在平面 $\beta$ 内,则记作\_\_\_\_\_.

## 二、必记公理

5. 公理1:如果一条直线上的\_\_\_\_\_在一个平面内,那么这条直线上\_\_\_\_\_都在这个平面内.

6. 公理2:如果两个平面有\_\_\_\_\_,那么它们还有其他公共点,且所有这些公共点的集合是\_\_\_\_\_.

7. 公理3:经过不在\_\_\_\_\_的三点,\_\_\_\_\_一个平面.

## 三、必记推论

8. 推论1:经过\_\_\_\_\_和这条\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_一个平面.

9. 推论2:经过两条\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_一个平面.

10. 推论3:经过两条\_\_\_\_\_,\_\_\_\_\_一个平面.

**必记知识全览答案:**1. 无限延展 2. 平行; $45^\circ$ ;2倍;矩形;菱形;正方形;三角形;虚线;不画 3. 希腊; $\alpha$ ; $\beta$ ; $\gamma$ ;字母;相对  
4. 点集;元素; $A \in \alpha$ ; $B \notin \alpha$ ; $l \subset \alpha$ ; $l \not\subset \beta$  5. 两点;所有的点 6. 一个公共点;一条过这个公共点的直线 7. 同一条直线上;有且只有 8. 一条直线;直线外的一点;有且只有 9. 相交直线;有且只有 10. 平行直线;有且只有



## II. 知识点过关

以学致用 一马当先

## 知识点详解

## 一、基本知识点

## 知识点1. 平面

(1) 平面是一个最基本的原始概念,只作描述而不加定义,平面是无限延展的,这是平面最本质的一个特性.平面不计形状、大小,不论厚薄.

(2) 通常把平面画成平行四边形或矩形,水平放置的平面常画为平行四边形,正对竖立的平面常画为矩形.画多个平面时,一个平面被另一个平面遮住的线段要画成虚线或不画.

(3) 点、直线与平面的关系:点用字母 $A, B, C, \dots$ 表示,直线用 $l, m, n, \dots$ 或 $AB, AC, BC, \dots$ 表示,平面用希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 表示;点 $A$ 在平面 $\alpha$ 内,记作 $A \in \alpha$ ,否则记作 $A \notin \alpha$ ,点 $A$ 在直线 $l$ 上,记作 $A \in l$ ,否则记作 $A \notin l$ ,直线 $l$ 在平面 $\alpha$ 内,记作 $l \subset \alpha$ ,否则记作 $l \not\subset \alpha$ .

**注意:**①用平行四边形或矩形、三角形等表示平面时,这些图形本身不是平面,都只是平面的一部分,因为平面是无限延展的.

②点与直线的关系和点与平面的关系都是元素与集合的关系,只能用 $\in$ 或 $\notin$ 表示,而不能用 $\subset$ 或 $\not\subset$ 表示,直线与平面的关系是集合与集合的关系,只能用 $\subset$ 或 $\not\subset$ 表示,而不能用 $\in$ 或 $\notin$ 表示.

③空间图形中应把平面遮住的线段画成虚线,无论是原先有的线段还是后来作的辅助线,都应遵循这一原则.

**题1-1:** A 点拨:因为几何里的平面是无限延展的,是无形状、大小和厚薄可言的,故①、②、③、④都不正确,故选A.

## 知识点2. 公理1

平面的三个公理及公理3的三个推论是平面基本性质的具体体现.公理1:如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上的所有点都在这个平面内.平面是由无数个点组成的点集,直线也是由无数个点组成的点集.如果直线上有两点在一个平面内,那么这条直线就在这个平面内,那么这条直线上的所有点都在这个平面内,从集合的角度看,公理1就是说,如果一条直线(点集)中有两个元素(点)属于一个平面(点集),那么这条直线就是这个平面的真子集,用符号表示为 $A \in l, B \in l, A \in \alpha, B \in \alpha \Rightarrow l \subset \alpha$ .公理1的图形表示如图9-1-1所示.

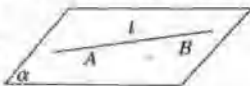


图9-1-1

## 案例练习

**题1-1:** 已知下列四个命题:①很平的桌面是一个平面;②一个平面的面积可以是 $4\text{m}^2$ ;③平面是矩形或平行四边形;④两个平面叠在一起比一个平面厚.其中正确的命题的个数是( )

- A. 0个  
B. 1个  
C. 2个  
D. 3个

**题2-1:** 若 $A \in \alpha, B \in \alpha, P \in AB$ ,则下列关系成立的是( )

- A.  $P \in \alpha$       B.  $P \notin \alpha$   
C.  $AB \in \alpha$       D.  $AB \not\subset \alpha$



显然,如果一条直线在一个平面内,那么这条直线上的任一点都在这个平面内.用符号表示为  $\left. \begin{matrix} l \subset \alpha \\ C \in l \end{matrix} \right\} \Rightarrow C \in \alpha$ .

公理1的作用有二:一是可以用来判定一条直线是否在一个平面内,即要判定一条直线在一个平面内,只需确定直线上有不同的两个点在这个平面内即可;二是可以用来判定点在平面内,即如果直线在平面内,点在直线上,则点在平面内.

**题2-1:** A 点拨:  $\left. \begin{matrix} A \in \alpha \\ B \in \alpha \end{matrix} \right\} \Rightarrow$  直线  $AB \subset \alpha \Rightarrow P \in \alpha$ , 故选 A.

### 知识点3. 公理2

公理2:如果两个平面有一个公共点,那么它们还有其他公共点,且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线.公理2是说,两个不重合的平面,只要它们有公共点,这两个平面就是相交的位置关系,交集是一条直线.如果平面 $\alpha$ 和平面 $\beta$ 有一条公共直线 $l$ ,就说平面 $\alpha$ 和平面 $\beta$ 相交,交线是 $l$ .记作 $\alpha \cap \beta = l$ .公理2的图形表示如图9-1-2所示:

符号表示为:  $\left. \begin{matrix} P \in \alpha \cap \beta \\ P \in l \end{matrix} \right\} \Rightarrow$  公理2

的作用有两个:一是判定两个平面相交,即如果两个平面有一个公共点,那么这两个平面相交;二是判定点在直线上,即点若是某两个平面的公共点,那么该点就在这两个平面的交线上.

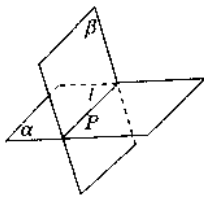


图9-1-2

**题3-1:** 如图9-1-3.已知 $E, F, G, H$ 分别是空间四边形 $ABCD$ 各边 $AB, AD, BC, CD$ 上的点,且直线 $EF$ 和 $GH$ 交于点 $P$ .求证: $B, D, P$ 在同一条直线上.

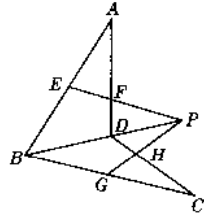


图9-1-3

**题3-1证明:** 因为  $E \in AB, F \in AD$ , 所以  $E, F \in$  平面  $ABD$ , 所以  $EF \subset$  平面  $ABD$ . 同理  $GH \subset$  平面  $BCD$ . 又因为  $EF \cap GH = P$ , 所以  $P \in EF$  且  $P \in GH$ , 所以  $P \in$  平面  $ABD$  且  $P \in$  平面  $BCD$ . 而平面  $ABD \cap$  平面  $BCD = BD$ . 所以  $P \in BD$ , 即  $B, D, P$  三点在同一条直线上. **点拨:** 证明三点(或诸点)共线,平面几何中通常是取其中两点确定一直线,再证明其余点在该直线上,但立体几何中通过运用公理2证明三点(或诸点)在两个平面的交线上来证明共线,则更简单.

### 知识点4. 公理3及其推论

公理3:经过不在同一条直线上的三点,有且只有一个平面.

推论1:经过一条直线和这条直线外的一点,有且只有一个平面.

推论2:经过两条相交直线,有且只有一个平面.

推论3:经过两条平行直线,有且只有一个平面.

公理3的图形表示如图9-1-4所示:若 $A, B, C$ 三点不共线,则 $A, B, C$ 三点确定一个平面 $\alpha$ .过 $A, B, C$ 三点的平面又可记作“平面 $ABC$ ”.推论1的图形表示如图9-1-5所示:

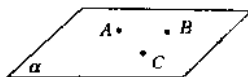


图9-1-4

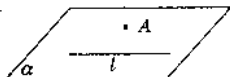


图9-1-5

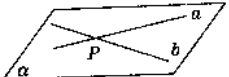


图9-1-6

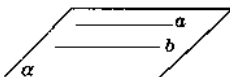


图9-1-7

若  $A \notin l$ , 则直线  $l$  和点  $A$  确定一个平面  $\alpha$ . 推论2的图形表示如图9-1-6所示:

若  $a \cap b = P$ , 则直线  $a, b$  确定一个平面  $\alpha$ . 推论3的图形表示如图9-1-7所示:

若  $a \parallel b$ , 则直线  $a, b$  确定一个平面. 注意:公理3及其推论中“有且只有一个”的含义是:“有”是说图形存在,“只有一个”是说图形唯一,“有且只有一个”是说图形存在且唯一.“有且只有一个平面”也可以说成“确定一个平面.”公理3及推论是确定平面的依据.

**题4-1:** 空间四点  $A, B, C, D$  共面而不共线,那么这四点中( )

- A. 必有三点共线
- B. 必有三点不共线
- C. 至少有三点共线
- D. 不可能有三点共线

**题4-1:** B 点拨:如 $A, B, C, D$ 为平行四边形的四个顶点,则 $A, C$ 均不正确,若 $A, B, C$ 三点在一条直线上,而点 $D$ 不在这条直线上,则符合题意,故D不正确.若任意三点都共线,则这四点共线,与已知矛盾,所以必有三点不共线.故选B.

## 二、拓展与综合应用创新知识点

### 知识点5. 立体图形与平面图形的联系与区别及立体图形的研究方法(拓展知识点)

(1)立体图形与平面图形的联系是:从集合论的角度看,两者都是点的集合,区别是:①平面图形的点都在一个平面内,而立体图形的点不全在一个平面内;②平面图形由点、线构成,而立体图形是由点、线、面构成的.

(2)平面图形和立体图形都是空间图形,平面图形是空间图形的一部分.

(3)立体图形的研究方法是:一方面要注意立体图形问题与平面图形问题的区别,考虑问题时要着眼于整个空间,而不是局限于某一个平面;另一方面要注意立体图形与平面图形的联系,立体图形中有些点在同一个平面内,对平面图形的研究是讨论立体图形的基础,立体图形的问题常常转化为平面图形的问题来解决.

**题5-1:** 由平面内的一条直线可以把平面分成两部分,两条直线可以把平面分成三部分或四部分,三条直线可以把平面分成四部分、六部分或七部分,那么一个平面、两个平面、三个平面分别可以把空间分成几部分?

**题5-1解:** 一个平面把空间分成两部分,两个平面把空间分成三部分或四部分,三个平面把空间分成四部分、六部分、七部分或八部分. **点拨:** 类比平面几何的一些性质,拓展到空间也是学好立体几何的思维方法之一.

**知识点 5. 三个公理及公理 3 的 3 个推论的综合应用 (学科内综合知识)**

公理 1 是直线在平面内的判定依据;公理 2 是确定两平面交线的依据,也是证明点在直线上和多点共线的依据;公理 3 及其 3 个推论是确定一个平面的依据,另外,它和公理 1 是证明点、线共面,多点共面以及多线共面的依据. 对于稍微复杂点的空间几何问题,单独使用某一个公理并不能达到解题的目的,势必要综合应用平面的三个公理及其推论,多角度考虑,才能正确解题. 在本节中我们主要解决点共线,线共点,点线共面三类问题.

**题6-1:** 如图 9-1-8, 已知  $\triangle ABC$  在平面  $\alpha$  外, 它的三边所在直线分别交平面  $\alpha$  于  $P, Q, R$ , 求证:  $P, Q, R$  三点共线.

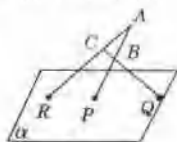


图 9-1-8

**题6-1证明:** 设平面  $ABC$  与平面  $\alpha$  的交线为  $l$ . 因为  $AB \cap \alpha = P$ , 所以  $P \in AB, P \in \alpha$ . 而  $ABC \subset$  平面  $ABC$ , 所以  $P \in$  平面  $ABC$ . 所以  $P$  在平面  $ABC$  与平面  $\alpha$  的交线  $l$  上, 同理可证  $Q \in l, R \in l$ , 所以  $P, Q, R$  三点共线. **点拨:** 证明多点共线问题的一般思路是: 证明这些点是某两个平面的公共点. 这样由公理 2 可知这些点都在这两个平面的交线上.

**知识点 7. 平面的基本性质在日常生活中的应用 (实际应用知识)**

在实际生活中,平面基本性质的应用随处可见,如用一把直尺检验物体的表面是否平整,一扇门上安两个合页和一把锁,照相机支架,桌子,凳子只安三条腿,老年人只拄一根手杖,自行车后轮旁只安装一只撑脚等. 学习了本节知识后,要会用所学的知识解释为什么要这样做,说明其中的道理.

**题7-1:** 在一间地面很平的房子,为什么三条腿的凳子坐上去不晃而有的四条腿的凳子坐上去却直晃呢?

**题7-1解:** 因为三条腿凳子的三条腿的底端始终确定一个平面,即不共线的三点确定一个平面,所以坐上去不晃,而有的四条腿的凳子坐上去直晃是因为这个四条腿的凳子的四条腿的底端不共面.



### III. 测试卷

平面知识 学习方法

**A 卷: 基础经典题 (90 分 60 分钟) (125)**

一. 选择题 (每题 5 分, 共 15 分)

- (测试知识点 1, 5) 下列四种说法: ①平面的形状是平行四边形; ②任何一个平面图形都可以表示平面; ③平面  $\alpha$  的面积是  $100\text{cm}^2$ ; ④一个平面把空间分成两部分. 其中正确说法的个数是 ( )  
A. 1      B. 2      C. 3      D. 4
- (测试知识点 3, 4) 如果  $A, B, C$  是平面  $\alpha, \beta$  的三个公共点, 则  $\alpha, \beta$  的位置关系是 ( )  
A. 平面  $\alpha, \beta$  必重合  
B. 平面  $\alpha, \beta$  必交于过  $A, B, C$  三点的一条直线  
C. 由  $A, B, C$  三点的位置关系确定, 若  $A, B, C$  不共线, 则平面  $\alpha, \beta$  必重合; 若  $A, B, C$  共线, 则平面  $\alpha, \beta$  交于过  $A, B, C$  的一条直线或重合  
D. 以上都不对
- (测试知识点 4) 已知  $E, F, G, H$  是空间四个点, 设命题甲: 点  $E, F, G, H$  不共面; 命题乙: 直线  $EF$  和  $GH$  不相交, 那么 ( )  
A. 甲是乙的充分不必要条件  
B. 甲是乙的必要不充分条件  
C. 甲是乙的充要条件  
D. 甲既不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件

二. 填空题 (每题 4 分, 共 8 分)

- (测试知识点 1, 2) “点  $P$  在直线  $l$  上, 点  $P$  不在平面  $\alpha$  内, 直线  $l$  与平面  $\alpha$  相交于点  $Q$ ”, 用符号语言叙述可表示为 \_\_\_\_\_, 则直线  $l$  与平面  $\alpha$  的公共点的个数为 \_\_\_\_\_ 个.
- (测试知识点 5) 四边形  $ABCD$  中,  $AB=BC=CD=DA=BD=1$ , 若四边形  $ABCD$  不是平面四边形,  $AC$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

三. 学科综合题 (9 分)

- (测试知识点 2, 3, 4, 6) 如图 9-1-9, 正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为  $8\text{cm}$ ,  $M, N, P$  分别是  $AB, A_1D_1, BB_1$  的中点. (1) 画出过  $M, N, P$  三点的平面与平面  $A_1B_1C_1D_1$  的交线以及与平面  $BB_1C_1C$  的交线;  
(2) 设过  $M, N, P$  三点的平面与  $B_1C_1$  交于  $Q$ , 求  $PQ$  的长.

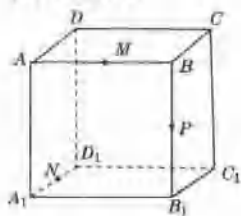


图 9-1-9

四. 实际应用题 (10 分)

- (测试知识点 4, 6, 7) 有一块正方形木料  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ , 其中  $M, N$  分别是  $AB, BC$  的中点, 现要过  $D_1, M, N$  三点将木料锯开, 请你帮工人师傅想一个办法, 怎样画线才能完成任务?

## 五、创新题(每题 12 分,共 36 分)

8. (巧题妙解,测试知识点 2,3,4,6) 已知  $P$  是平面四边形  $ABCD$  所在平面外一点,连结  $PA, PB, PC, PD$ . 如图 9-1-10 所示,点  $E, F, G, H$  分别为  $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCD, \triangle PDA$  的重心,求证:  $E, F, G, H$  四点共面.

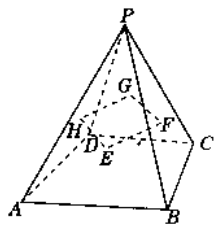


图 9-1-10

9. (一题多解,测试知识点 1,2,4,6) 如图 9-1-11, 已知直线  $a \parallel b \parallel c$ , 直线  $d$  与  $a, b, c$  分别相交于  $A, B, C$ , 求证:  $a, b, c, d$  四线共面.

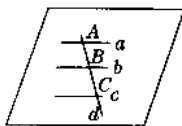


图 9-1-11

10. (多变题,测试知识点 2,3,4,6) 如图 9-1-12,  $AB \cap \alpha = P$ ,  $CD \cap \alpha = Q$ ,  $A, D$  与  $B, C$  分别在平面  $\alpha$  的两侧,  $AC \cap \alpha = R$ ,  $BD \cap \alpha = S$ . 求证:  $P, Q, R, S$  四点共线.

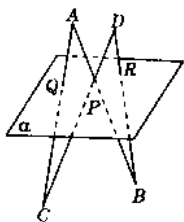


图 9-1-12

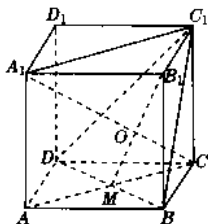


图 9-1-13

- (1) 一变: 如图 9-1-13, 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 对角线  $A_1C_1$  与平面  $BDC_1$  交于点  $O$ ,  $AC, BD$  交于点  $M$ , 求证: 点  $C_1, O, M$  共线.

- (2) 二变: 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $P, Q, R$  分别在棱  $AB, BB_1, CC_1$  上, 且  $DP, QR$  相交于点  $O$ . 求证:  $O, B, C$  三点共线.

## 六、科学探究题(12分)

11. (测试知识点 1,4,6), 如图 9-1-14, 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $E, F$  分别是棱  $AA_1, CC_1$  的中点, 试判断点  $D_1, E, B, F$  是否共面.

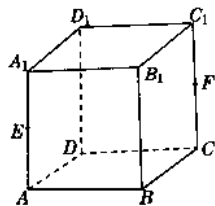


图 9-1-14

## 第二节 空间直线



### I. 必记知识全览

工欲善其事 必先利其器

#### 一、必记概念

1. 相交直线: 两条直线          一个         .
2. 平行直线: 在同一个         , 没有         .
3. 异面直线: 不          在         , 没有         .
4. 异面直线所成的角: 直线  $a, b$  是异面直线, 经过空间任意         , 作直线  $a, b$  的平行线  $a', b'$ , 则这两条相交直线  $a', b'$  所成的          叫做异面直线  $a$  和  $b$  所成的角.
5. 两条异面直线垂直: 如果两条异面直线所成的角是         , 则称这两条异面直线互相垂直, 异面直线  $a$  和  $b$  垂直, 也记作         .
6. 两条异面直线的公垂线: 和两条异面直线都          的直线, 叫做这两条异面直线的公垂线.
7. 两条异面直线的距离: 两条异面直线的          在这两条异面直线间的         , 叫做两条异面直线的距离.

#### 二、必记公理

8. 公理 4 (平行公理): 平行于同一条直线的两条直线         .

#### 三、必记定理及推论

9. 等角定理: 如果一个角的          和另一个角的          分别          并且         , 那么这两个角         .
10. 等角定理的推论: 如果两条相交直线和另两条相交直线分别         , 那么这两组直线所成的         .

必记知识全览答案: 1. 有且只有; 公共点 2. 平面内; 公共点 3. 同; 任何一个平面内; 公共点 4. 一点; 锐角或直角 5. 直角;  $a \perp b$  6. 垂直相交 7. 公垂线; 线段的长度 8. 互相平行 9. 两边; 两边; 平行; 方向相同; 相等 10. 平行; 锐角或直角相等



### II. 知识点过关

过关斩将 一马平川

#### 知识点详解

##### 一、基本知识点

##### 知识点 1. 空间两条直线的位置关系

空间两条不重合的直线有三种位置关系: 相交、平行、异面. 若从有无公共点的角度看, 可分为两类: 一类是没有公共点; 一类是有且仅有一个公共点. 没有公共点的两条直线是平行直线或异面直线, 有且仅有一个公共点的两条直线是相交直线. 若从是否共面的角度看, 也可分为两类: 一类是共面直线; 一类是不共面(异面)直线, 共面直线是相交直线或平行直线. 不共面直线是异面直线, 是不同在任何一个平面内的两条直线. 或者说既不相交也不平行的两条直线. 空间两条直线的位置关系归纳如下表所示:

位置关系	是否共面	公共点情况	图形	记法
相交直线	共面(在同一个平面内)	有且只有一个公共点		$a \cap b = A$
平行直线		没有公共点		$a // b$
异面直线	不共面(不同在任何一个平面内)			

在运用定义判定两条直线的位置关系比较困难时, 我们通常从问题的反面入手, 也就是采用反证法, 反证法也是立体几何证题中常用的一种证明方法. 反证法证题的一般步骤为: (1) 反设: 即作出与命题结论相反的假设. (2) 归谬: 由所作的假设出发, 通过正确的推理, 导出矛盾. (3) 判断: 断定产生矛盾的原因在于所作的假设是错误的, 因此肯定原命题结论是正确的.

#### 案例练习

**题 1-1:** 若  $a, b$  是异面直线,  $b, c$  也是异面直线, 则  $a$  与  $c$  的位置关系是         .

**题 1-2:** 已知  $a, b$  是异面直线,  $A, B$  是直线  $a$  上不同两点,  $C, D$  是直线  $b$  上不同两点. 求证: 直线  $AC$  与  $BD$  是异面直线.

**题 1-1:** 相交或平行或异面 **点拨:** 如图 9-2-1 所示的正方体中,  $DD_1$  和  $AB$  是异面直线,  $DD_1$  和  $BC$  是异面直线, 而  $AB$  和  $BC$  是相交直线;  $DD_1$  和  $BC$  是异面直线,  $DD_1$  和  $B_1C_1$  是异面直线, 而  $BC$  和  $B_1C_1$  是两条平行直线;  $DD_1$  和  $A_1B_1$  是异面直线,  $DD_1$  和  $BC$  是异面直线, 而  $A_1B_1$  和  $BC$  是异面直线, 故和一条直线是异面直线的两条直线的位置关系是相交、平行或异面均有可能.

**题 1-2 证明:** 假设直线  $AC$  与  $BD$  共面, 且共面  $\alpha$ , 则  $AC \subset \alpha, BD \subset \alpha$ . 所以  $A, C, B, D \in \alpha$ . 所以  $ABC \subset \alpha, CDB \subset \alpha$ , 即直线  $a \subset \alpha, b \subset \alpha$ , 即  $a, b$  共面  $\alpha$ , 这与已知  $a, b$  是异面直线相矛盾, 所以直线  $AC$  与  $BD$  共面是错误的, 故直线  $AC$  与  $BD$  是异面直线.

**点拨:** 证明两条直线是异面直线常用反证法.

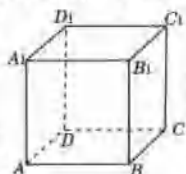


图 9-2-1

##### 知识点 2. 平行公理 4, 等角定理及其推论

公理 4 (平行公理): 平行于同一条直线的两条直线平行. 等角定理: 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同, 那么这两个角相等.

等角定理的推论: 如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行,

**题 2-1:** 如图 9-2-2,  $P$  是  $\triangle ABC$  所在平面外一点,  $D, E$  分别是  $PAB, PBC$  的重心. 求证:  $DE // AC$ , 且  $DE = \frac{1}{3} AC$ .



那么这两组直线所成的锐角(成直角)相等. 平行公理(公理4)揭示的是空间平行线的传递性,它是证明等角定理的基础,也是今后论证平行问题的主要理论依据之一. 等角定理及其推论说明了对角的边进行平行移动时,角的大小不改变,同时也是定义异面直线所成角的理论依据. 注意:若一个角的两边分别平行于另一个角的两边,这两个角相等或互补.

对于平面图形得出的结论,有些可以推广到立体图形中,但并非所有关于平面图形成立的结论,对于立体图形都适用,因此,要把关于平面图形的结论推广到立体图形,必须经过证明,而对于同一平面内的图形,平面几何中的所有公理、定理都适用.

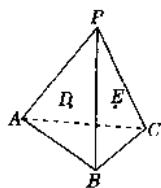


图 9-2-2

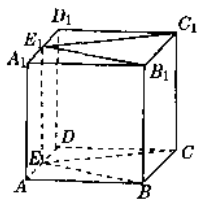


图 9-2-3

**题2-2:**如图 9-2-3,已知  $E, E_1$  分别是正方体  $AC_1$  的棱  $AD$  和  $A_1D_1$  的中点. 求证:  $\angle C_1E_1B_1 = \angle CEB$ .

**题2-1 证明:**如图 9-2-4,连  $PD$  并延长交  $AB$  于  $M$ ,连  $PE$  并延长交  $BC$  于  $N$ . 因为  $D, E$  分别是  $\triangle PAB, \triangle PBC$  的重心,则  $M$  为  $AB$  的中点,  $N$  为  $BC$  的中点. 所以  $MN \parallel AC$ , 又  $\frac{PD}{DM} = \frac{2}{1} = \frac{PE}{EN}$ . 所以  $DE \parallel MN$ , 所以  $DE \parallel AC$ . 又  $\frac{DE}{MN} = \frac{PD}{PM} = \frac{2}{3}$ , 所以  $DE = \frac{2}{3}MN$ , 又因  $MN = \frac{1}{2}AC$ , 所以  $DE = \frac{1}{3}AC$ . 点拨:空间图形中的平行,往往转化到某一个平面中去,利用平面性质,如中位线、平行截面定理等.

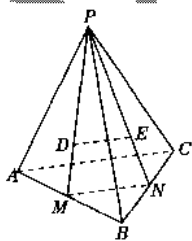


图 9-2-4

**题2-2 证明:**因为  $E, E_1$  分别是正方体  $AC_1$  的棱  $AD$  和  $A_1D_1$  的中点,所以  $A_1E_1 \parallel AE$ , 所以  $A_1E_1EA$  是平行四边形,所以  $A_1A \parallel E_1E$ . 又因为  $A_1A \parallel B_1B$ , 所以  $E_1E \parallel B_1B$ , 所以四边形  $EE_1B_1B$  是一个平行四边形. 因此,  $B_1E_1 \parallel BE$ , 同理  $E_1C_1 \parallel EC$ . 而且由图形可知  $\angle C_1E_1B_1$  和  $\angle CEB$  方向相同,由等角定理可得  $\angle C_1E_1B_1 = \angle CEB$ . 点拨:证明角的相等问题,等角定理及其推论是较常用方法. 另外,通过三角形的相似和全等来证明也可,如本题也可通过证明  $\triangle C_1E_1B_1 \cong \triangle CEB$  来说明角的相等.

### 知识点 3. 异面直线所成的角, 异面直线的公垂线及距离

异面直线  $a$  和  $b$  所成的角:过空间任意一点,分别作异面直线  $a, b$  的平行线  $a', b'$ , 则直线  $a'$  和  $b'$  所成的锐角(或直角)叫做异面直线  $a$  和  $b$  所成的角. 当异面直线  $a$  和  $b$  所成的角为直角时,称异面直线  $a$  和  $b$  互相垂直,记作  $a \perp b$ . 由此可知两条直线垂直时,这两条直线不一定相交,可以是异面垂直. 异面直线所成角的定义给出了异面直线所成角的求作方法及其范围. 求作方法是过空间任意一点分别作两条异面直线的平行线,这样就转化成平面内两条相交直线所成的角. 一般放在一个三角形内求解;异面直线所成角的范围是  $(0, 90^\circ]$ . 由等角定理及其推论可知,两条异面直线所成的角的大小是由两直线的相互位置所确定的,与定义中点的位置选择无关. 因此这个点通常选在这两条异面直线其中的一条上. 在解此类题时也常用到三角形的中位线定理.

两条异面直线的公垂线及两条异面直线的距离:和两条异面直线都垂直相交的直线,叫做这两条异面直线的公垂线. 两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段(公垂线段)的长度,叫做这两条异面直线的距离. 两条异面直线的公垂线有且只有一条,公垂线必须与两条异面直线“都垂直”,也“都相交”,两者缺一不可. 两条异面直线的距离反映了这两条异面直线位置上的“远近”,这个“远近”是用公垂线段的长度来度量的,而不是用公垂线,因为公垂线是直线,不可度量.

异面直线的距离是异面直线上任意两点间距离的最小值. 要求两条异面直线的距离就要先找出两条异面直线的公垂线段,然后求出公垂线段的长度.

**题3-1:**空间四边形  $ABCD$  的各边长均为  $a$  且对角线  $AC = BD = a$ ,  $E, F$  分别为  $BC, AD$  的中点(如图 9-2-5.)

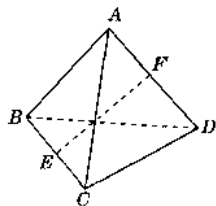


图 9-2-5

- (1) 求证:  $EF$  是异面直线  $BC$  和  $AD$  的公垂线;
- (2) 求异面直线  $BC$  和  $AD$  的距离.

**题3-1:**(1)证明:如图 9-2-6,连结  $BF, CF$ , 它们分别是正三角形  $ABD$  和正三角形  $ACD$  的高,所以  $\triangle BCF$  是等腰三角形,因为  $E$  是  $BC$  的中点,所以  $FE \perp BC$ . 同理可证  $EF \perp AD$ . 又  $EF$  与  $AD, BC$  都相交,所以  $EF$  是  $AD$  和  $BC$  的公垂线.

(2)解:由(1)知  $EF$  是异面直线  $BC$  和  $AD$  的公垂线段. 在  $\text{Rt}\triangle BEF$  中,  $BF = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ,  $BE = \frac{1}{2}a$ , 所以  $EF =$

$$\sqrt{BF^2 - BE^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a. \text{ 即异面直线 } AD \text{ 和 } BC \text{ 的距离为 } \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

点拨:异面直线的公垂线必须满足和两条异面直线都垂直且相交这两个条件.

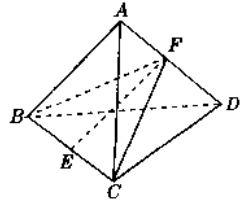


图 9-2-6

## 二、拓展与综合应用创新知识点

**知识点 4. 异面直线的判断, 异面直线所成的角的求法(拓展知识点)**

证明或判断两直线异面的方法:(1)定义法;(2)反证法;(3)运用课本例题的结论:过平面外一点与平面内一点的直线,和平面内不经过该点的直线是异面直线. 求异面直线所成角的基本方法是平移法. 就是把两条异面直线通过

**题4-1:**如图 9-2-7 所示,已知直线  $a, b, c$ , 平面  $\alpha, c$  和  $\alpha$  没有公共点,  $a \subset \alpha, b \subset \alpha$ , 且  $a \parallel b$ ,  $a$  与  $c$  是异面直线,求证:  $b$  与  $c$  是异面直线.