黎曼几何

欧氏空间中的极小超曲面

球空间中的极小子流形

Lorentz-Minkowski 空间中的旋转超曲面

de Sitter 空间中的类空超曲面

子流形几何

许志才 / 著

中国科学技术大学出版社

子流形几何

许志才 著

中国科学技术大学出版社
2006·合肥

内 容 提 要

本书主要研究超曲面的微分几何。在介绍了黎曼几何的基本概念以后，对欧氏空间、球空间、Lorentz-Minkowski 空间、de Sitter 空间、复双曲空间中的超曲面进行了深入的研究，所获得的结果都是最新的。本书可供微分几何方向的研究生使用。

图书在版编目（CIP）数据

子流形几何/许志才著．—合肥：中国科学技术大学出版社，2003.8

ISBN 7-312-01618-9

Ⅰ．子…　Ⅱ．许…　Ⅲ．子流形—流形几何　Ⅳ．O189.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 066427 号

中国科学技术大学出版社出版发行

（安徽省合肥市金寨路 96 号，230026）

合肥义兴印务有限责任公司印刷

全国新华书店经销

*

开本：850×1168/32　印张：5　字数：130 千

2003 年 8 月第 1 版　2006 年 1 月第 2 次印刷

印数：801—3800 册

定价：12.00 元

前　言

古典微分几何研究三维欧氏空间中的曲线、曲面理论。而现代微分几何研究黎曼空间的分析、拓扑、几何等性质，所使用的数学工具包括：李群、微分拓扑、代数拓扑、微分方程、泛函分析等。作为子流形的特殊情况，超曲面的微分几何有更加丰富的内容。从作者的博士论文中提取大部分内容，融入徐森林教授课题组关于子流形几何研究的大部分结果，撰成本书，为那些想深入研究微分几何的同仁们提供一本必要的参考书，这便是撰写本书的宗旨。

本书共有六章。

第一章介绍了微分流形、切空间与切映射、线性联络、黎曼流形、黎曼子流形等基本概念，它们是以后各章学习的基础。这些知识在一般的黎曼几何书中都可以查到，因此，我们只作一些叙述，并且只对个别重要定理加以证明。

第二章研究欧氏空间中的极小超曲面。在给出了第一、第二变分公式以后，首先引进调和指标和调和稳定的概念，使用这些概念去研究欧氏空间中极小超曲面在无穷远处的连通性。获得：欧氏空间中具有有限全数量曲率的定向完备且调和稳定的极小超曲面必是超平面。这一结果是在稳定条件下人们所获得的结果的推广。然后研究了欧氏空间中极小超曲面的调和指标与端点的关系，得到：对于欧氏空间中具有有限数量全曲率的定向完备极小超曲面，它上面的有界调和函数全体构成的向量空间的维数等于它的端点的个数，这个向量空间可以由这些端点处的调和函数的代表元所生成。

第三章研究球空间 S^{n+p} 中的 n 维紧致极小子流形。首先对于

数量曲率 r 大于 $n(n-2)$ 的紧致极小子流形 M，当余维 p 小于等于 2 时，则 M 是全测地的。对于余维 p 大于 2，当 M 在 S^{n+p} 中的法曲率有上界时，M 是全测地的。另外获得：法从平坦且具有非负截面曲率的紧致极小子流形 M 的数量曲率 r 一定介于 $n(n-p-1)$ 和 $n(n-2)$ 之间。特别，微分同胚于 n 维球面的具有非负截面曲率的紧致极小超曲面必须是全测地的，这个结果给出了丘成桐教授提出的一个问题的部分解答。然后通过计算并估计子流形的高斯映照的能量密度的拉普拉斯，给出了关于子流形的黎奇曲率及第二基本形式长度平方的一个"夹击"定理，由此改进了潘养廉教授在欧氏空间中对应的一个结果。最后研究极小超曲面的刚性问题，得到：单位球面中的 n 维紧致极小超曲面 M，如果它的第二基本形式长度平方 S 介于 n 和 $n+1/2$ 之间，则 $S=n$ 且 M 与 Clifford 环面等距。这个结果一方面表明 Clifford 环面具有一定的刚性，另一方面也给出了陈省身教授关于单位球面中常数量曲率的极小超曲面的数量曲率是离散的一个猜测的部分解答。

第四章考虑 Lorentz-Minkowski 空间中的类空旋转超曲面。对于满足某种魏因加吞条件的这类超曲面，获得了它们的生成曲线所满足的微分方程，在给出这种超曲面的滚动构造后，将生成曲线的微分方程的求解转化为对应的滚动曲线的微分方程的求解，这是三维欧式空间中 Delaunay 滚动构造定理的推广。在这一章的最后，研究 Bernstein 型问题，获得了常数平均曲率超曲面的整体解的唯一性。通过考察无穷远处射影边界的解，对它们进行了分类。也构造出具有常数平均曲率的超曲面所满足的微分方程的渐近于光锥的任意二阶光滑扰动解。

第五章考虑 de Sitter 空间中常数平均曲率的类空超曲面。获得了一个外在刚性定理和两个内在刚性定理，这些定理部分地回答了 Goddard 猜测，即：de Sitter 空间中常数平均曲率的完备类空超曲面必是全脐的。本章还给出了 de Sitter 空间中类空旋转魏因加吞超曲面的一个存在性定理。对于常平均曲率的完备非紧类

空超曲面，如果它的截面曲率非负，则它与欧氏空间等距或者与双曲柱面等距。我们也研究了类空超曲面的高斯映照和守恒律，获得：类空超曲面的高斯映照是调和的充要条件是超曲面是极小的，常平均曲率的完备非紧类空超曲面的高斯映照一定满足守恒律。

第六章考虑复双曲空间中的实超曲面。对于 $n=2$ 的等参超曲面,给出了两个定理，其一，削弱了 Berndt 分类定理的条件，其二，解决了 Vernon 遗漏的一个问题。另外，我们获得：复双曲空间中的实超曲面为等参超曲面当且仅当它的每个平行超曲面具有常数平均曲率，这一结果是 Cartan 在实空间形式中的一个定理的推广。本章最后研究复双曲空间中具有常数平均曲率实超曲面的稳定性，在给出了这类超曲面的第二变分公式后，获得：复双曲空间中具有常平均曲率的完备嵌入实超曲面是测地球、极限球或等距超曲面，它们中每一个都是某个群在复双曲空间上作用的轨道，并且都是稳定的。

本书的写法，简明扼要，一些具体细节可在相关材料中找到，希望读者充分利用书后的参考资料。

目　　录

第一章　黎曼几何的基本概念

本章作为后续各章的准备知识，只对一些必要知识加以介绍，详细的内容可以参考文献[1]、[2]、[3]。

§1.1　微分流形

定义 1.1　设 M 是 Hausdorff 拓扑空间，如果 M 是局部欧氏空间，即：对于任意 $p\in M$，存在 p 点的邻域 V 和映射 ϕ：$V\to\phi(V)\subset R^n$ 是同胚映射，则称 M 是 n 维拓扑流形。这里 ϕ 叫做坐标映射，V 叫做坐标域，(V,ϕ) 叫做坐标卡。

定义 1.2　n 维拓扑流形 M 上的 C^k 类微分构造是 M 上的坐标卡之集 $\Phi=\left\{(V_\alpha,\phi_\alpha)\middle|\alpha\in \mathrm{A}\right\}$（A 是指标集），满足：

（1）$M=\bigcup\limits_{\alpha}V_\alpha$；

（2）$\forall\alpha,\beta\in \mathrm{A}$，坐标卡 (V_α,ϕ_α) 和 (V_β,ϕ_β) 是 C^k 类相容的，即：当 $V_\alpha\bigcap V_\beta$ 非空时，$\phi_\beta\circ\phi_\alpha^{-1}$ 和 $\phi_\alpha\circ\phi_\beta^{-1}$ 分别是 $\phi_\alpha(V_\alpha\bigcap V_\beta)$ 和 $\phi_\beta(V_\alpha\bigcap V_\beta)$ 之间的 C^k 类微分同胚；

（3）集合 Φ 关于（2）是极大的，即：若 (V,ϕ) 与 Φ 中每个坐标卡是 C^k 类相容的，则 (V,ϕ) 属于 Φ。

定义 1.3　n 维拓扑流形 M 带上一个 C^k 类微分构造 Φ，称为 C^k 类微分流形。若 k=+∞，则称 M 是一个光滑流形。

例 1　n 维实射影流形 $P^n(R)$。设 $X=R^n-\{0\}$，在 X 中定义 $\forall x=(x_1,\cdots,x_{n+1})$，$y=(y_1,\cdots,y_{n+1})\in X$，$x\sim y\Leftrightarrow\exists t\neq 0$，使得 $y=tx$。设 $\pi:X\to X/\sim$ [记为 $P^n(R)$] 是商映射，$P^n(R)$ 的拓扑取为商拓

扑 $\tau=\left\{W\subset P^n(R)\middle|\pi^{-1}(W)\subset X\right\}$，则$\pi$是连续映射。下面证明 $P^n(R)$是n维光滑流形。

首先证明$P^n(R)$是 Hausdorff 拓扑空间。为此作映射ϕ_t：$X\to X$，$\phi_t(x)=tx$，$t\neq 0$，于是$\phi_t(x)$等价于 x，且$\phi_t^{-1}=\phi_{1/t}$。显然ϕ_t是同胚映射。对 $\forall V\subset X$ 是开集，因 $\phi_t(V)$是开集，所以 $[V]=\bigcup\limits_{x\in V}[x]=\left\{\phi_t(x)\in X\middle|\phi_t(x)\sim x, x\in V\right\}=\bigcup\limits_{t\neq 0}\phi_t(V)$ 是开集，由此知$\pi:X\to X/\sim$是开映射。因为 $X=R^n-\{0\}$是 A_2 空间，所以 $P^n(R)$是A_2空间。

为了进一步证明$P^n(R)$是 T_2 拓扑空间，为此我们构造一个集合 $B=\left\{(x,y)\middle|x\sim y\right\}\subset X\times X$，那么容易知道：

$$x\sim y\Leftrightarrow \exists t\neq 0,\ y=tx\Leftrightarrow y_i=tx_i,\ i=1,2,\cdots,n+1$$

$$\Leftrightarrow x_iy_j=x_jy_i,\ i,j=1,2,\cdots,n+1$$

现在定义函数 $f:X\times X\to R$ 为：

$$f(x,y)=f(x_1,\cdots,x_{n+1},y_1,\cdots,y_{n+1})=\sum_{i\neq j}(x_iy_j-x_jy_i)^2$$

显然 f 是连续的并且 $B=f^{-1}(0)$。由于单点集合是实数集合中的闭集合，所以 $B=\left\{(x,y)\middle|x\sim y\right\}\subset X\times X$ 是闭集合。因此$P^n(R)$是 T_2拓扑空间。从而$P^n(R)$是 Hausdorff 拓扑空间。

其次我们证明拓扑空间 $P^n(R)$是局部欧式空间。为此设 $\tilde{V}_i=\left\{x=(x_1,\cdots,x_{n+1})\in X\middle|x_i\neq 0\right\}$，$i=1,\cdots,n+1$。则$\tilde{V}_i$是$X$的开邻域，从而 $V_i=\pi(\tilde{V}_i)$ 是 $P^n(R)$ 的坐标域，坐标映射定义为 $\phi_i:V_i\to\phi_i(V_i)$

$$\phi_i([x])=\left(\frac{x_1}{x_i},\cdots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\cdots,\frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$

（1）$\phi_i:V_i\to\phi_i(V_i)$是单映射。事实上，假设$[x],[y]\in V_i$，易见

$$[x]=[y]\Leftrightarrow x\sim y\Leftrightarrow \exists t\neq 0, y=tx$$

$$\Leftrightarrow y_j=tx_j,\ j=1,\cdots,n+1\Leftrightarrow$$

$$\frac{x_j}{x_i}=\frac{y_j}{y_i},\ j\neq i\Leftrightarrow \phi_i([x])=\phi_i([y])$$

所以ϕ_i的定义是合理的并且ϕ_i是单映射。

（2）ϕ_i是满映射。事实上，假设$z=(z_1,\cdots,z_n)\in R^n$，现在定义一个映射$\varphi_i:R^n\to \tilde{V}_i\subset R^{n+1}-\{0\}$为

$$\varphi_i(z)=(z_1,\cdots,z_{i-1},1,z_i,\cdots,z_n)\triangleq \tilde{z}\in\tilde{V}_i$$

从而我们有$[\tilde{z}]=[(z_1,\cdots,z_{i-1},1,z_i,\cdots,z_{n+1})]\in V_i$，并且满足关系式$\phi_i\ [\tilde{z}]=(z_1,\cdots,z_{i-1},z_i,\cdots,z_{n+1})$，故$\phi_i$是满映射且$\phi_i^{-1}=\pi\circ\varphi_i$。

（3）ϕ_i是微分同胚。事实上，因为ϕ_i的每个分量是连续的，所以ϕ_i是连续的。又因为φ_i和π连续，从而$\phi_i^{-1}=\pi\circ\varphi_i$也连续，故$\phi_i$是微分同胚。

最后证明$\Phi=\{(V_i,\phi_i)|i=1,\cdots,n+1\}$是$P^n(R)$的微分构造。

（1）因为$X=\bigcup_{i=1}^{n+1}V_i$且π是满映射，故$P^n(R)=\pi(X)=\bigcup_{i=1}^{n+1}V_i$。

（2）假设$(V_i,\phi_i)\in\Phi$，$(V_j,\phi_j)\in\Phi$，$V_i\cap V_j\neq\varnothing$，$i$小于$j$，则对于任意的$[x]\in V_i\cap V_j$，$x_i\neq 0$，$x_j\neq 0$，从而

$$\phi_i([x])=\left(\frac{x_1}{x_i},\cdots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\cdots,\frac{x_{n+1}}{x_i}\right)\triangleq(u_1,\cdots,u_n)$$

$$\phi_j([x])=\left(\frac{x_1}{x_j},\cdots,\frac{x_{j-1}}{x_j},\frac{x_{j+1}}{x_j},\cdots,\frac{x_{n+1}}{x_j}\right)\triangleq(v_1,\cdots,v_n)$$

比较分量得

$$u_k=\frac{x_k}{x_i},\ k=1,\cdots,i-1 \qquad u_l=\frac{x_{l+1}}{x_i},\ l=i,\cdots,j,\cdots,n$$

$$v_k=\frac{x_k}{x_j},\ k=1,\cdots,j-1 \qquad v_l=\frac{x_{l+1}}{x_j},\ l=j,\cdots,n$$

所以

$$v_k=\frac{x_k}{x_j}=\frac{u_k}{u_{j-1}},\ k=1,\cdots,i-1,j,\cdots,n$$

$$v_i=\frac{x_i}{x_j}=\frac{1}{u_{j-1}}$$

$$v_l=\frac{u_{l-1}}{u_{j-1}},\ l=i+1,\cdots,j-1$$

即

$$\begin{aligned}&\phi_j\circ\phi_i^{-1}(u_1,\cdots,u_n)\\&=\left(\frac{u_1}{u_{j-1}},\cdots,\frac{u_{i-1}}{u_{j-1}},\frac{1}{u_{j-1}},\frac{u_i}{u_{j-1}},\cdots,\frac{u_{j-2}}{u_{j-1}},\frac{u_j}{u_{j-1}},\cdots,\frac{u_n}{u_{j-1}}\right)\end{aligned}$$

因为$\phi_j\circ\phi_i^{-1}$的分量是光滑函数，所以$\phi_j\circ\phi_i^{-1}$是光滑函数。

同理可以证明函数$\phi_i\circ\phi_j^{-1}$是$P^n(R)$上的光滑函数，所以$\Phi=\left\{(V_i,\phi_i)\middle|i=1,\cdots,n+1\right\}$是$P^n(R)$的微分构造。至此，我们证明了$P^n(R)$是$n$维光滑流形。

定义 1.4 函数$f:M\to R$称为光滑的，如果对M上任意一点P，存在P点的坐标卡(V,ϕ)，使得$f\circ\phi^{-1}:\phi(V)\to R$是光滑的。

令$C^\infty(M,R)=\left\{f\middle|f:M\to R,f\in C^\infty\right\}$，在$C^\infty(M,R)$上定义加法和数量乘法如下：

$$(\alpha f+\beta g)(P)=\alpha f(P)+\beta g(P) \tag{1.1}$$

其中f,g是$C^\infty(M,R)$中的函数，α,β是实数，P是M上任意一点。于是$C^\infty(M,R)$是实数域R上的向量空间。

再在$C^\infty(M,R)$上定义乘法如下：

$$(f\cdot g)(P)=f(P)\cdot g(P) \tag{1.2}$$

则$C^\infty(M,R)$是R上的代数。

定义 1.5 设M和N分别是m维和n维光滑的微分流形，映

射 F：$M\to N$ 称为光滑映射，如果对 M 上的任意点 P，存在 P 的坐标卡 (V,ϕ) 和 $F(P)$ 的坐标卡 (W,φ)，使得 $F(V)$ 包含于 W 中，且 $\varphi\circ F\circ\phi^{-1}:\phi(V)\to\varphi(W)$ 是光滑的。

注 1.6 若取 $N=R$，则光滑映射就是光滑函数，因此，光滑函数是光滑流形之间的光滑映射的重要特例。光滑映射的另一个重要特例是流形上的参数曲线。取 R 上的一个开区间 $M=(a,\ b)$，则从 M 到流形 N 的光滑映射 f：$(a,\ b)\to N$，称为流形 N 上的一条参数曲线。

注 1.7 现在假设 F：$M\to N$ 是光滑映射。在局部上，假设

$$\phi(P)=\left(x_1(P),\cdots,x_m(P)\right)$$

$$\varphi\left(F(P)\right)=\left(y_1\left(F(P)\right),\cdots,y_n\left(F(P)\right)\right)$$

则

$$\begin{aligned}&\varphi\circ F\circ\phi^{-1}(x_1,\cdots,x_m)\\&=\left(y_1\circ F(x_1,\cdots,x_m),\cdots,y_n\circ F(x_1,\cdots,x_m)\right)\end{aligned}\tag{1.3}$$

于是

$F\in C^\infty(M,N)\Leftrightarrow\varphi\circ F\circ\phi^{-1}\in C^\infty\left(\phi(V),\phi(W)\right)\Leftrightarrow y_i\circ F$ 关于 $x_1,\cdots,x_m$ 有任意阶偏导数。

§1.2 切空间和切映射

定义 1.8 设 M 是 n 维光滑流形，P 是 M 上的任意一点，则 M 在 P 点的切向量是实值函数 $X_P:C^\infty(M,P)\to R$ 满足

（1）$X_P(\alpha f+\beta g)=\alpha X_Pf+\beta X_Pg$

（2）$X_P(f\bullet g)=f(P)X_Pg+g(P)X_Pf$

其中 f, g 是 P 点所有光滑函数集合 $C^\infty(M,P)$ 中的函数，α, β 是实数。

记 $T_P(M)$ 是光滑流形 M 在 P 点所有切向量的全体，在

$T_P(M)$中定义加法和数量乘法如下：

$$(\alpha X_P+\beta Y_P)f=\alpha X_P f+\beta Y_P f \tag{1.4}$$

其中α,β是实数，$X_P,Y_P\in T_P(M)$，$f\in C^\infty(M,P)$，则$T_P(M)$构成一个向量空间，称为流形M在P点的切空间。

注 1.9 设(V,ϕ,x_i)是微分流形M在P点的一个局部坐标系，定义映射$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P:C^\infty(M,P)\to R$为

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P(f)=\frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(P)) \tag{1.5}$$

于是对$T_P(M)$中的任何切向量X_P，有

$$X_P=\sum_{i=1}^{n}X_P(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P \tag{1.6}$$

即$\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P,\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_P$是$T_P(M)$的一组基。

定义 1.10 设M和N分别是m维和n维光滑流形，映射F：$M\to N$为光滑映射，F在P点的切映射$\mathrm{d}F_P:T_P(M)\to T_{F(P)}(N)$定义为

$$\mathrm{d}F_P(X_P)(g)=X_P(g\circ F) \tag{1.7}$$

其中$X_P\in T_P(M)$，$g\in C^\infty(N,R)$。

注 1.11 设(V,ϕ,x_i)和(W,φ,y_j)分别是P点和$F(P)$点的局部坐标系，对于$X_P=\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P$有

$$\mathrm{d}F_P(X_P)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\frac{\partial(y_j\circ F)}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{F(P)} \tag{1.8}$$

§ 1.3 线性联络

设M是n维光滑流形，$C^\infty(M,T(M))$是M上的全体光滑向

量场构成的向量空间。

定义 1.12 对于光滑流形 M，定义它上的线性联络∇是一个光滑映射

$$\nabla: C^{\infty}\left(M, T(M)\right)\times C^{\infty}\left(M, T(M)\right)\to C^{\infty}\left(M, T(M)\right)$$

满足：

（1）$\nabla_X(fY+gZ)=(Xf)Y+f\nabla_X Y+(Xg)Z+g\nabla_X Z$

（2）$\nabla_{(fX+gY)}Z=f\nabla_X Z+g\nabla_Y Z$

其中f, g是$C^{\infty}(M,R)$中的函数，X, Y, Z是$C^{\infty}\left(M, T(M)\right)$中的向量场。$\nabla_X Y$称为向量场$Y$沿方向$X$的协变微商。

注 1.13 设(V,ϕ,x_i)是微分流形 M 在 P 点的一个局部坐标系，$X_1,\cdots,X_n$是 V 上的一组基向量场，则对于$C^{\infty}\left(M, T(M)\right)$中的任意向量场$X, Y$，有$X=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i X_i$，$Y=\sum_{i=1}^{n}\beta^i X_i$。设

$$\nabla_{X_i}X_j=\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^k X_k,\ i,j=1,\cdots,n \tag{1.9}$$

其中$\Gamma_{ij}^k\in C^{\infty}(V,R)$称为线性联络在坐标域 V 上的克里斯托夫系数，这样

$$\nabla_X Y=\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha^i X_i(\beta^k)+\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^k\alpha^i\beta^j\right]X_k \tag{1.10}$$

定义 1.14 映射 T:

$$C^{\infty}\left(M, T(M)\right)\times C^{\infty}\left(M, T(M)\right)\to C^{\infty}\left(M, T(M)\right)$$

定义为

$$T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-\left[X,Y\right] \tag{1.11}$$

映射 R:

$$C^{\infty}\left(M, T(M)\right)\times C^{\infty}\left(M, T(M)\right)\times C^{\infty}\left(M, T(M)\right)$$
$$\to C^{\infty}\left(M, T(M)\right)$$

定义为

$$R(X,Y)Z=\nabla_X(\nabla_Y Z)-\nabla_Y(\nabla_X Z)-\nabla_{[X,Y]}Z \tag{1.12}$$

则 T 和 R 分别称为线性联络 ∇ 的挠率张量场和曲率张量场。

注 1.15 设 (V,ϕ,x_i) 是微分流形 M 在 P 点的一个局部坐标系，$X_1,\cdots,X_n$ 是 V 上的一组基向量场，若我们引进以下局部记号：

$$\nabla_{X_i}X_j=\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}X_k$$

$$T(X_i,X_j)=\sum_{k=1}^{n}T_{ij}^{k}X_k$$

$$\left[X_i,X_j\right]=\sum_{k=1}^{n}C_{ij}^{k}X_k$$

$$R(X_j,X_k)X_i=\sum_{l=1}^{n}R_{ijk}^{l}X_l$$

则

$$T_{ij}^{k}=\Gamma_{ij}^{k}-\Gamma_{ji}^{k}-C_{ij}^{k} \tag{1.13}$$

$$R_{ijk}^{l}=\sum_{s=1}^{n}\left(\Gamma_{js}^{l}\Gamma_{ki}^{s}-\Gamma_{ks}^{l}\Gamma_{ji}^{s}\right)+X_j\left(\Gamma_{ki}^{l}\right)-X_k\left(\Gamma_{ji}^{l}\right)-\sum_{s=1}^{n}C_{jk}^{s}\Gamma_{si}^{l}$$

其中 $i,j,k,l=1,\cdots,n$ 。进一步，设 $\omega^1,\cdots,\omega^n$ 是 $X_1,\cdots,X_n$ 的对偶 1-形式，则有以下结构方程：

$$\mathrm{d}\omega^i=-\sum_{j=1}^{n}\omega_j^i\wedge\omega^j+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}T_{jk}^{i}\omega^j\wedge\omega^k \tag{1.14}$$

$$\mathrm{d}\omega_i^j=\sum_{k=1}^{n}\omega_i^k\wedge\omega_k^j+\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}R_{ikl}^{j}\omega^k\wedge\omega^l \tag{1.15}$$

其中

$$\omega_i^j=\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ki}^{j}\omega^k,\ \Omega_i^j=\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}R_{ikl}^{j}\omega^k\wedge\omega^l \tag{1.16}$$

分别称为线性联络 ∇ 的联络形式和曲率形式。

§1.4 黎曼流形

定义 1.16 一个光滑流形 M 上的二阶协变张量场 $g:T_P(M)\times T_P(M)\to R$ 称为对称正定的，若对 M 中的任意点 P，有：

（1）$g(X_P,Y_P)=g(Y_P,X_P)$

（2）$g(X_P,X_P)\geqslant 0,\ g(X_P,X_P)=0\Leftrightarrow X_P=0$

其中 $X_P,Y_P\in T_P(M)$。这时(M, g)叫做 Riemann（黎曼）流形，g 称为 Riemann 度量。

局部上，设(V,ϕ,x_i)是微分流形 M 在 P 点的一个局部坐标系，$X_1,\cdots,X_n$ 是 V 上的一组基向量场，$\omega^1,\cdots,\omega^n$ 是 $X_1,\cdots,X_n$ 的对偶 1-形式，则

$$g=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}\omega^i\otimes\omega^j \qquad (1.17)$$

其中 $g_{ij}=g(X_i,X_j)$。

例 2 设 $M=R^n$，R^n 上的整体坐标函数为 $x_1,\cdots,x_n$，又设

$$g=\frac{1}{\left(1+\frac{c}{4}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_i\otimes\mathrm{d}x_i \qquad (1.18)$$

则$(R^n，g)$是 Riemann 流形，其中 c 为任意常数。这是 Riemann 最初给出的度量形式。

定义 1.17 如果 Riemann 流形(M, g)上的线性联络∇ 满足：

（1）$\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]=0$ （1.19）

（2）$Z(g(X,Y))=g(\nabla_Z X,Y)+g(X,\nabla_Z Y)$ （1.20）

则称∇ 是(M, g)上的 Riemann 联络。其中公式（1.19）称为无挠的，（1.20）称为度量相容的。

定理 1.18 （Riemann 流形的基本定理）Riemann 流形(M, g)