国内外经典教材习题详解系列

新派克

XINPAIKE

罗默《高级宏观经济学》（第1和2版）课后习题详解

金圣才 主编

中国石化出版社

HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM

教·育·出·版·中·心

国内外经典教材习题详解系列

罗默《高级宏观经济学》（第1和2版）
课后习题详解

金圣才　主编

中国石化出版社

内 容 提 要

国内外经典教材习题详解系列是一套全面解析当前国内外各大院校权威教科书的辅导资料。罗默的《高级宏观经济学》是世界上最受欢迎的高级宏观经济学教材之一，本书基本遵循最新版本第2版(参考第1版)的章目编排，共分11章，每章对第1版和第2版的所有课(章)后习题都进行了详细的分析和解答。

本书特别适用于各大院校学习罗默《高级宏观经济学》的师生，以及在高校硕士和博士研究生入学考试中参加宏观经济学考试科目的考生使用，对于参加经济学职称考试和其他相关专业人员来说，本书也具有较高的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

罗默《高级宏观经济学》(第1和2版)课后习题详解/金圣才主编.
—北京:中国石化出版社,2006
(国内外经典教材习题详解系列)
ISBN 7-80229-071-6

Ⅰ.罗… Ⅱ.金… Ⅲ.宏观经济学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.F015

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第111235号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街58号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com.cn
金圣才文化发展(北京)有限公司排版
北京大地印刷厂印刷
全国各地新华书店经销

*

787×1092毫米 16开本 18.25印张 453千字
2006年9月第1版 2006年9月第1次印刷
定价:36.00元

(购买时请认明封面防伪标识)

《国内外经典教材习题详解系列》
编委会

序　言

目前，我国各大院校一般都把国内外通用的权威教科书作为本科生和研究生学习专业课程的参考教材，甚至被很多考试(特别是硕士和博士入学考试)和培训项目作为指定参考书。但这些国内外优秀教材的内容一般有一定的广度和深度，课(章)后习题一般没有答案或者答案简单(有的英文答案特别是论述题因为不符合中国人的习惯而难以理解)，这给许多读者在学习专业教材时带来了一定的困难。为了帮助读者更好地学习专业课，我们有针对性地编著了一套与国内外教材配套的复习资料，整理了各章的笔记，并对课(章)后的习题进行了详细的解答。

罗默的《高级宏观经济学》是世界上最受欢迎的高级宏观经济学教材之一(本书后面附有“国内外经济学经典教材简评”，可以参考)，是做经济理论研究的较好参考书，其特色是大幅增加了对内生增长理论、真实经济波动理论和后凯恩斯派的市场微观调节理论的介绍。严格地说，这是一本介于中级与高级之间的教材，技术难度不是很高(只是用到了拉格朗日方法)，但结构清晰，叙述简明清楚，并且和前沿接轨，是一本相当不错的宏观经济学，特别是一本分析新凯恩斯主义宏观经济学的教材。全书深入浅出，清楚明了，尤其是技术方法运用恰当，适合于经济学、管理学各专业研究生的宏观经济学教学。该书对不同观点、不同材料能够做到恰当处理，自成体系，被国内许多院校指定为考博参考书。

作为该教材的课后习题详解辅导书，本书基本遵循第2版的章目编排，同时参考了第1版的内容。本书参考国外教材的英文答案和相关资料对每章的习题进行了详细的分析，并对相关的重要知识点进行了归纳(对第1版和第2版的所有习题都进行了解答)。

本书全部习题的解答参考了部分高校老师讲授罗默《高级宏观经济学》的讲义和课堂笔记，以及国内外教材的配套资料和相关参考书，如有不妥，敬请指正，在此表示感谢。

需要特别说明的是：我们深深感谢罗默教授和美国麦格劳－希尔教育出版(亚洲)集团为我们提供了这样一本优秀的经济学教材，还要感谢商务印书馆(出版了第1版)和上海财经大学出版社(出版了第2版)出版了中文版。

为了帮助读者更好地学习国内外经典教材，圣才考研网开设了各门专业课的论坛及专栏，还提供各大院校最新考研考博真题及大量专业课复习资料。

读者如有建议或需要其他资料，请登录网站：

圣才考研网 www.100exam.com

圣才图书网 www.1000book.com

金圣才

目　录

第1章　索洛增长模型

1.1　增长率的基本性质。利用一个变量的增长率等于其对数的时间导数证明：

(a)两个变量乘积的增长率等于其增长率的和，即若

$Z(t)=X(t)Y(t)$，则 $\dot{Z}(t)/Z(t)=[\dot{X}(t)/X(t)]+[\dot{Y}(t)/Y(t)]$

(b)两变量的比率的增长率等于其增长率的差，即若

$Z(t)=X(t)/Y(t)$，则 $\dot{Z}(t)/Z(t)=[\dot{X}(t)/X(t)]-[\dot{Y}(t)/Y(t)]$

(c)如果 $Z(t)=X(t)^{\alpha}$，则 $\dot{Z}(t)/Z(t)=\alpha\dot{X}(t)/X(t)$

答：(a)因为一个变量的增长率等于对该变量取对数后再对时间求导，那么有下式的结果：

$$\frac{\dot{Z}(t)}{Z(t)}=\frac{\mathrm{d}\ln Z(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\ln[X(t)Y(t)]}{\mathrm{d}t}$$

因为两个变量的积的对数等于两个变量各自对数之和，所以有下式：

$$\frac{\dot{Z}(t)}{Z(t)}=\frac{\mathrm{d}[\ln X(t)+\ln Y(t)]}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\ln X(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\ln Y(t)}{\mathrm{d}t}$$

再简化为下面的结果：

$$\frac{\dot{Z}(t)}{Z(t)}=\frac{\dot{X}(t)}{X(t)}+\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}$$

则得到(a)的结果。

(b)因为一个变量的增长率等于对该变量取对数后再对时间求导，那么有下式的结果：

$$\frac{\dot{Z}(t)}{Z(t)}=\frac{\mathrm{d}\ln Z(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\ln[X(t)/Y(t)]}{\mathrm{d}t}$$

因为两个变量的比率的对数等于两个变量各自对数之差，所以有下式：

$$\frac{\dot{Z}(t)}{Z(t)}=\frac{\mathrm{d}[\ln X(t)-\ln Y(t)]}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\ln X(t)}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}\ln Y(t)}{\mathrm{d}t}$$

再简化为下面的结果：

$$\frac{\dot{Z}(t)}{Z(t)}=\frac{\dot{X}(t)}{X(t)}-\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}$$

则得到(b)的结果。

(c)因为一个变量的增长率等于对该变量取对数后再对时间求导，那么有下式的结果：

$$\frac{\dot{Z}(t)}{Z(t)}=\frac{\mathrm{d}\ln Z(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\ln[X(t)^{\alpha}]}{\mathrm{d}t}$$

又由于 $\ln[X(t)^{\alpha}]=\alpha\ln X(t)$，其中 α 是常数，有下面的结果：

$$\frac{\dot{Z}(t)}{Z(t)}=\frac{\mathrm{d}[\alpha\ln X(t)]}{\mathrm{d}t}=\alpha\frac{\mathrm{d}\ln X(t)}{\mathrm{d}t}=\alpha\frac{\dot{X}(t)}{X(t)}$$

则得到(c)的结果。

1.2　假设某变量 X 的增长率为常数且在0时刻至 t_1 时刻等于 $a(a>0)$，在 t_1 时刻下降

为 0，在 t_1时刻至 t_2时刻逐渐由 0 上升到 a，在 t_2时刻之后不变且等于 a。

(a)画出作为时间函数的 X 的增长率的图形。

(b)画出作为时间函数的 $\ln X$ 的图形。

答：(a)根据题目的规定，X 的增长率的图形见图 1－1：

从 0 时刻到 t_1时刻 X 的增长率为常数且等于$a(a>0)$，为图形中的第一段。X 的增长率从 0 上升到 a，对应于图中的第二段。从 t_2 时刻之后，X 的增长率再次变为 a。

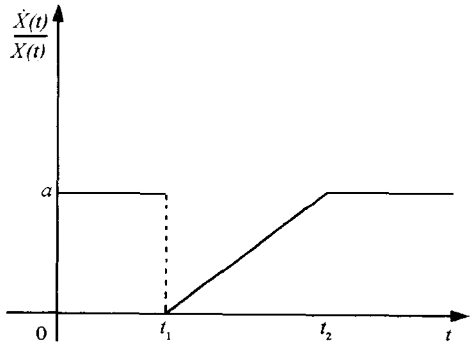

图 1－1　时间函数 X 的增长率

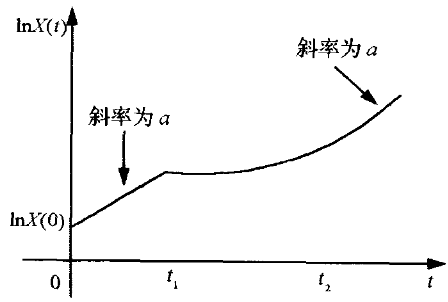

图 1－2　$\ln X$ 关于时间的图形

(b)注意到 $\ln X$ 关于时间 t 的导数(即 $\ln X$ 的斜率)等于 X 的增长率，即：

$$\frac{\mathrm{d}\ln X(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\dot{X}(t)}{X(t)}$$

因此 $\ln X$ 关于时间的图形如图 1－2 所示：从 0 时刻到 t_1时刻，$\ln X$ 的斜率为 $a(a>0)$，在 t_1时刻，$X(t)$的增长率出现不连续的变化，因此 $\ln X$ 的斜率出现扭曲，在 t_1时刻至 t_2时刻，$\ln X$ 的斜率由 0 逐渐变为 a。从 t_2时刻之后，$\ln X$ 的斜率再次变为 $a(a>0)$。

1.3　描述下面的每一种变化(如果存在的话)怎样影响索洛模型的基本图中的持平投资与实际投资线。

(a)折旧率下降。

(b)技术进步率上升。

(c)生产函数是柯布—道格拉斯型，$f(k)=k^{\alpha}$，并且资本份额 α 上升。

(d)人们发挥更大的努力，使得对于单位有效劳动的资本的既定值，单位有效劳动的产出比以前更高。

答：(a)折旧率下降的影响：

由于持平投资线的斜率为$(n+g+\delta)$，当折旧率 δ 下降后，持平投资线的斜率下降，持平投资线向右转，而实际投资线则不受影响。从图 1－3 可以看出平衡增长路径的资本存量水平从 k^* 上升到 k^*_{NEW}。

(b)技术进步率上升的影响：

由于持平投资线的斜率为$(n+g+\delta)$，当技术进步率 g 上升后，会使持平投资线的斜率变大，持平投资线向左转，而实际投资线则不受影响。从图 1－4 可以看出平衡增长路径的资本存量水平从 k^* 下降到 k^*_{NEW}。

(c)生产函数是柯布—道格拉斯型的$f(k)=k^{\alpha}$，并且资本份额 α 上升的影响：

由于持平投资线的斜率为$(n+g+\delta)$，因此 α 上升对持平投资线没有影响。由于实际投

资线为 $sf(k)$，而 $f(k)=k^{\alpha}$，因此 $\frac{\partial sk^{\alpha}}{\partial\alpha}=sk^{\alpha}\ln k$。当资本份额 α 上升时，实际投资线的变化需要分情况讨论：对于 $0<\alpha<1$，如果 $\ln k>0$，或者 $k>1$，$\delta sk^{\alpha}/\delta\alpha>0$，则新的实际投资线位于旧的实际投资线之上；反之，如果 $\ln k<0$，或者 $k<1$，$\delta sk^{\alpha}/\delta\alpha>0$，则新的实际投资线位于旧的实际投资线之下；对于 $k=1$，则新的实际投资线与旧的实际投资线重合。

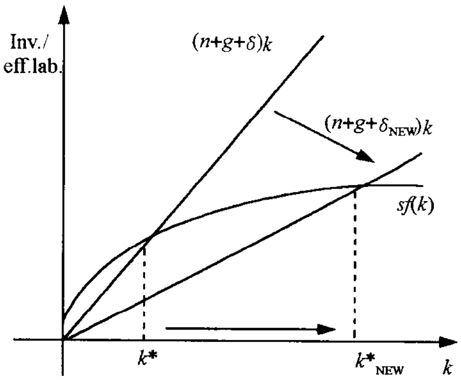

图 1－3　折旧率下降的影响

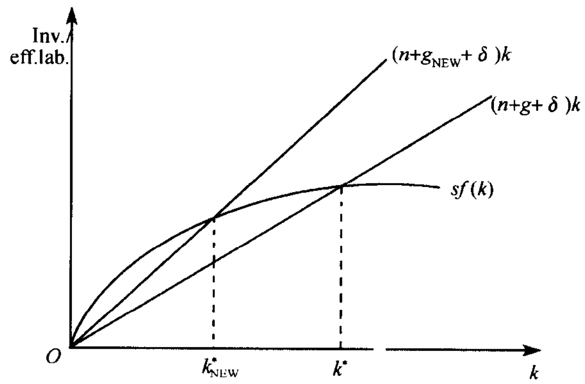

图 1－4　技术进步率上升对稳态人均资本存量的影响

除此之外，α 上升对于 k^{*} 的影响还受到 s 和 $(n+g+\delta)$ 的大小的影响。如果 $s>(n+g+\delta)$，α 的上升会使 k^{*} 上升，如图 1－5 所示。

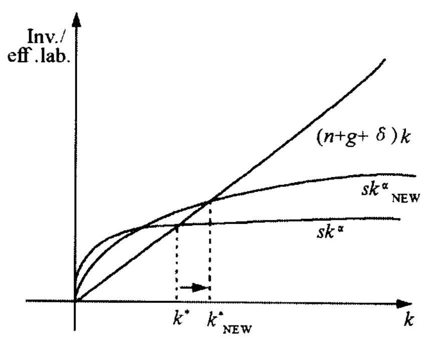

图 1－5　资本份额 α 上升的影响

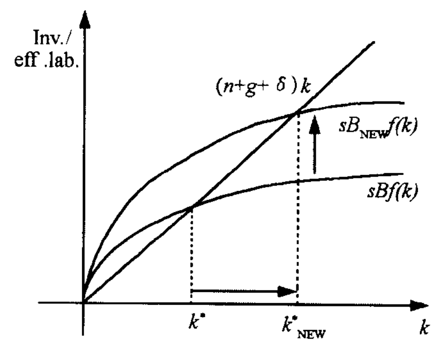

图 1－6　单位有效产出比以前更高的影响

(d) 人们发挥更大的努力，使得对于单位有效劳动的资本的既定值，单位有效劳动的产出比以前有更高的影响：

首先修改密集形式的生产函数形式为：$sBf(k)$，$B>0$，则实际投资线为 $sBf(k)$。

假如工人更加努力的劳动，则 B 会上升，B 的上升会使实际投资线上升，同时，k 也从 k^{*} 上升到 k^{*}_{NEW}。如图 1－6 所示。

1.4　考虑一个具有技术进步但无人口增长的经济，其正处在平衡增长路径上。现在假设工人数发生了一次跳跃。

(a) 在跳跃时刻每单位有效劳动的产出是上升、下降还是保持不变？为什么？

(b) 在新工人出现时，每单位有效劳动的产出发生初始变化（如果存在的话）之后，单位有效劳动的产出是否存在任何进一步的变化？如果发生变化，其将上升还是下降？为什么？

(c) 一旦经济再次达到平衡增长路径，每单位有效劳动的产出是高于、低于还是等于新

工人出现之前？为什么？

答：(a)假定在 t_0 时刻，工人数量发生了一次离散的下降，这使的每单位有效劳动的投资数量从 k^* 下降到 k^*_{NEW}。从 $k=K/AL$ 这一式子中可以看出，由于 L 上升，而 K 和 A 则没有变化，因此，k 会下降。因为 $f'(k)>0$，所以每单位有效劳动的投资数量会降低每单位有效劳动的产出。在图 1－7 中，y 从 y^* 下降到 y_{NEW}。

(b)在 k_{NEW} 处，每单位有效劳动的投资超过了每单位有效劳动的持平投资，即：$sf(k_{NEW})>(g+\delta)k_{NEW}$。在 k_{NEW} 处，经济中储蓄和投资超过了折旧和技术进步所需要的投资数量，因此 k 开始上升。随着每单位有效劳动的资本的上升，每单位有效劳动的产出也会上升。因此，y 从 y_{NEW} 返回到 y^*。

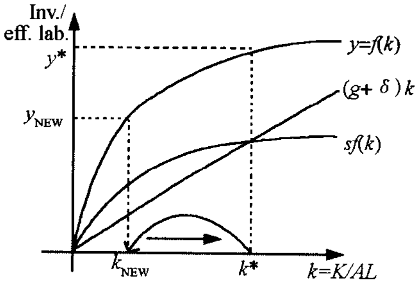

图 1－7　单位有效劳动数量降低的影响

(c)每单位有效劳动的资本会持续不断的上升，直到返回到原先的资本水平 k^*。在 k^* 处，每单位有效劳动的投资恰好与持平投资相等，即：每单位有效劳动的投资抵消了折旧和技术进步所需要的投资数量。一旦经济返回到平衡增长路径，k 便会返回到 k^* 处，从而每单位有效劳动的产出也会返回到原先的水平。所以，一旦经济再次达到平衡增长路径，每单位有效劳动的产出等于新工人出现之前的产出。

1.5　设生产函数是柯布—道格拉斯式的。

(a)找出作为模型参数 s、n、δ、g 和 α 的函数的 k^*、y^* 与 c^* 的表达式。

(b)k 的黄金律值是什么？

(c)获得黄金律资本存量所需的储蓄是什么？

答：(a)下式描述了每单位有效劳动的资本的动态方程式：

$$\dot{k}=sf(k)-(n+g+\delta)k$$

定义柯布—道格拉斯生产函数为：$f(k)=k^\alpha$，将其代入上式，有下式：

$$\dot{k}=sk^\alpha-(n+g+\delta)k$$

在平衡增长路径处，每单位有效劳动的投资恰好与每单位有效劳动持平投资相等，从而 k 保持不变，则有下面结果：

$$sk^{*\alpha}=(n+g+\delta)k^*$$

从上式可以解出：

$$k^*=[s/(n+g+\delta)]^{1/(1-\alpha)} \tag{1}$$

下面求解平衡增长路径处的每单位有效劳动的产出水平：

将(1)式代入 $f(k)=k^\alpha$，则可以解出平衡增长路径处的每单位有效劳动的产出水平：

$$y^*=[s/(n+g+\delta)]^{\alpha/(1-\alpha)} \tag{2}$$

下面求解平衡增长路径处的每单位有效劳动的消费水平：

将(2)式代入 $c^*=(1-s)y^*$，则可以求得平衡增长路径处的每单位有效劳动的消费水平为：

$$c^*=(1-s)[s/(n+g+\delta)]^{\alpha/(1=\alpha)} \tag{3}$$

综合上述(1)、(2)和(3)式可以解出 k^*、y^* 与 c^* 的关于模型参数 s、n、δ、g 和 α 的函数表达式。

(b)所谓黄金率的资本存量水平是指每单位有效劳动的消费水平达到最大化时的资本存量水平。考察这一指标的意义在于考察社会的福利水平，这也是经济学一切分析的核心所在，即考察社会的福利水平，这比考察资本、产出等经济变量更有意义。

由(1)式可以解出 s，即：

$$s=(n+g+\delta)k^{*1-\alpha} \tag{4}$$

将上式代入(3)式，有下式：

$$c^{*}=[1-(n+g+\delta)k^{*1-\alpha}][(n+g+\delta)k^{*1-\alpha}/(n+g+\delta)]^{\alpha/(1-\alpha)}$$

上式可以简化为：

$$c^{*}=k^{*\alpha}-(n+g+\delta)k^{*} \tag{5}$$

即每单位有效劳动的消费等于每单位有效劳动的产出减去每单位有效劳动的实际投资，而每单位有效劳动的实际投资等于每单位有效劳动的持平投资。

下面求 c^{*} 关于 k^{*} 的最优化，可以由(5)得出

$$\partial c^{*}/\partial k^{*}=\alpha k^{*\alpha-1}-(n+g+\delta)=0$$

再简化为：$\alpha k^{*\alpha-1}=(n+g+\delta)$ (6)

(6)式的定义暗含了黄金规则的资本水平。这是因为：$f'(k^{*})=(n+g+\delta)$ 表明生产函数的斜率等于持平投资的斜率。

可以由(6)式解出黄金规则要求的最佳资本水平：

$$k_{GR}^{*}=[\alpha/(n+g+\delta)]^{1/(1-\alpha)} \tag{7}$$

(c)将(7)式代入(4)式即可以得到黄金规则所要求的资本水平：

$s_{GR}=(n+g+\delta)[\alpha/(n+g+\delta)]^{(1-\alpha)/(1-\alpha)}$，进一步简化为：

$$s_{GR}=\alpha \tag{8}$$

由(8)式可以得出：对于柯布—道格拉斯生产函数，黄金规则所要求的储蓄率等于产出的资本弹性，也即资本的产出份额。

1.6 考虑一个正处在平衡增长路径上的索洛经济。为了简化分析，假设不存在技术进步并且现在人口增长率下降。

(a)每工人平均资本、每工人平均产出与每工人平均消费等的均衡增长路径的值发生了什么变化？

(b)描述人口增长的下降对产出(即总产出而非每工人平均产出的)路径的影响。

答：(a)由于不存在技术进步，这里可以不考虑技术因素，将每单位有效劳动简化为平均劳动，定义：$y=Y/L$，$k=K/L$。

由于持平投资线的斜率为$(n+\delta)$，因此，人口增长率 n 的下降会使持平投资线的斜率变小，持平投资线更加平坦。每工人平均资本的动态方程为：

$$\dot{k}=sf(k)-(\delta+n)k$$

由于 n 的下降，这会导致 $\dot{k}$ 变为正数(在平衡增长路径上，$\dot{k}$ 为0，即资本存量处于最佳水平)。在 k^{*} 处，每工人平均实际投资 $sf(k^{*})$ 超过了每工人平均持平投资$(n_{NEW}+\delta)k^{*}$，因而，k^{*} 会增加，移向 k_{NEW}^{*}。

随着每工人平均资本的增加，由 $y=f(k)$ 可以知道每工人平均产出会上升。又因为 $c=(1-s)y$，由于 s 不变，而 y 上升，因此每工人平均消费会上升。如图1-8所示。

其中图1-8(1)为每工人平均资本的变化图，图1-8(2)为每工人平均产出的变化图，

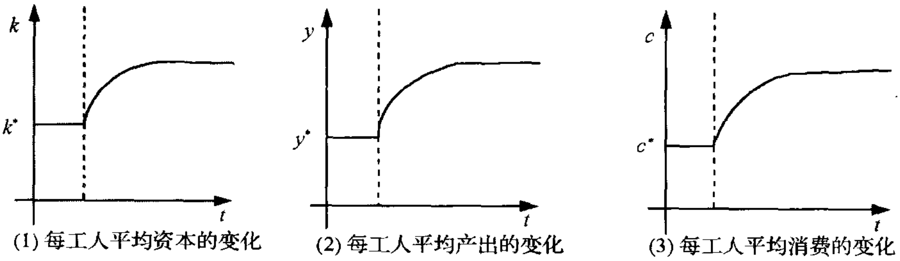

图 1－8　每工人平均资本、产出、消费的变化

图1－8(3)为每工人平均消费的变化图。

(b)由定义 $Y=Ly$，则 Y 的增长率为 $\dot{Y}/Y=\dot{L}/L+\dot{y}/y$，在开始的平衡增长路径上，$\dot{y}/y=0$，因此，$\dot{Y}/Y=\dot{L}/L=n$，在最终的平衡增长路径上，$\dot{Y}/Y=\dot{L}/L=n_{\mathrm{NEW}}<n$。因此，人口增长的下降会导致总产出的增长率下降。如图1－9所示。

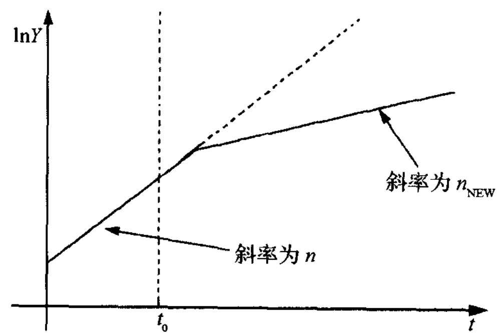

图 1－9　总产出增长率的下降

1.7　找出平衡增长路径上每单位有效劳动的产出 y^* 关于人口增长率 n 的弹性。如果 $\alpha_K(k^*)=1/3$、$g=2\%$ 以及 $\delta=3\%$，n 由 2% 下降至 1% 将会使 y^* 提高多少？

答：由于 $y^*=f(k^*)$，所以对该式两边对 n 求导数，有下式的结果：

$$\partial y^*/\partial n=f'(k^*)[\partial k^*/\partial n] \tag{1}$$

而 $\partial k^*/\partial n$ 值可以从资本的动态方程式 $\dot{k}=sf(k)-(n+g+\delta)k$ 中寻找，在平衡增长路径上，$\dot{k}=0$，$k=k^*$，因此有：$sf(k^*)=(n+g+\delta)k^*$，对两边关于 n 求导，得到下式：

$$sf'(k^*)\frac{\partial k^*}{\partial n}=(n+g+\delta)\frac{\partial k^*}{\partial n}+k^*$$

求解可得：

$$\frac{\partial k^*}{\partial n}=\frac{k^*}{sf'(k^*)-(n+g+\delta)} \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式，得：

$$\frac{\partial y^*}{\partial n}=f'(k^*)\left[\frac{k^*}{sf'(k^*)-(n+g+\delta)}\right] \tag{3}$$

由 $sf(k^*)=(n+g+\delta)k^*$ 求解 s，可得：

$$s=(n+g+\delta)k^*/f(k^*) \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式，可得：

$$\frac{\partial y^*}{\partial n}=\frac{f'(k^*)k^*}{[(n+g+\delta)f'(k^*)k^*/f(k^*)]-(n+g+\delta)}$$

求 y^* 关于 n 的弹性形式：

$$\frac{n}{y^*}\frac{\partial y^*}{\partial n}=\frac{n}{(n+g+\delta)}\frac{f'(k^*)k^*/f(k^*)}{[f'(k^*)k^*/f(k^*)]-1} \tag{5}$$

由产出的资本弹性为：$\alpha_K(k^*)=f'(k^*)k^*/f(k^*)$，代入(5)式

$$\frac{n}{y^*}\frac{\partial y^*}{\partial n}=-\frac{n}{(n+g+\delta)}\left[\frac{\alpha_K(k^*)}{1-\alpha_K(k^*)}\right] \tag{6}$$

现在将 $\alpha_K(k^*)=1/3$、$g=2\%$ 以及 $\delta=3\%$，n 由 2% 下降至 1% 代入，其中 n 取中值，为 0.015，有下式的结果：

$$\frac{n}{y^*}\frac{\partial y^*}{\partial n}=-\frac{0.015}{(0.015+0.02+0.03)}\left(\frac{1/3}{1-1/3}\right)\approx -0.12$$

因此，n 由 2% 下降至 1%，下降了 50%，则产出会上升 6%（12% ×50% =6%），可以发现，人口增长率的大幅度下降并不会导致产出的大幅度增长。

上述结论有着极其重要的价值。在索洛模型中，在解释经济增长的原因时，索洛从资本的角度加以解释，但他发现，资本的差异既不能解释人类历史上长期的增长，也不能解释跨国之间的差距。在索洛模型看来，导致增长的最主要的原因在于有效劳动。本题则从劳动数量的角度解释增长，发现效果并不明显。

1.8 设在美国，投资所占产出的份额永久性地由 0.15 上升至 0.18，并设资本份额为 1/3。

(a)相对于投资不上升的情形，产出最终大约上升多少？

(b)相对于投资不上升的情形，消费大约上升多少？

(c)投资增加对消费的直接影响是什么？消费要恢复到不存在投资增长时的水平，其需花费多长时间？

答：(a)投资所占产出的份额永久性地由 0.15 上升至 0.18，上升 20%，表明储蓄率上升了 20%。由教材(1.27)可以知道产出关于储蓄的弹性公式为：

$$\frac{s}{y^*}\frac{\partial y^*}{\partial s}=\frac{\alpha_K(k^*)}{1-\alpha_K(k^*)}$$

$\alpha_K(k^*)$为产出的资本弹性，这里假设市场是完全的，不存在市场扭曲，资本取其边际产品。将 $\alpha_K(k^*)=1/3$ 代入上述公式，得：

$$\frac{s}{y^*}\frac{\partial y^*}{\partial s}=\frac{\alpha_K(k^*)}{1-\alpha_K(k^*)}=\frac{1/3}{1-1/3}=\frac{1}{2}$$

可以看出产出关于储蓄的弹性为 1/2，则储蓄率上升 20%，产出会上升 10%。

(b)由于储蓄率上升，因此尽管产出上升了 10%，但消费并不会上升 10%，而会更小一些。在此需要求出消费的储蓄弹性。

由于 $c^*=(1-s)y^*$，对此式两边关于 s 求导数，得：

$$\frac{\partial c^*}{\partial s}=-y^*+(1-s)\frac{\partial y^*}{\partial s}$$

对两边都乘以 s/c^*，得到弹性形式如下：

$$\frac{\partial c^*}{\partial s}\frac{s}{c^*}=\frac{-s}{1-s}+\frac{\partial y^*}{\partial s}\frac{s}{y^*}$$

该式第二项为产出的储蓄弹性，由(a)可知为 1/2，投资所占产出的份额永久性地由 0.15上升至 0.18，取中值为 0.165，代入上述公式，得：

$$\frac{\partial c^*}{\partial s}\frac{s}{c^*}=\frac{-0.165}{(1-0.165)}+0.5\approx 0.30$$

因此消费关于储蓄的弹性为 0.3，投资所占产出的份额永久性上升 20%，可以使消费上

升6%（$0.3\times0.2=0.06$）。

（c）投资增加对消费的直接影响是使消费立即下降。原因在于，$c=(1-s)y^*$，在初始平衡增长路径上，y^*保持不变，而s则由0.15上升到0.18，即$1-s$由0.85下降到0.82，下降了0.035。因此投资增加会立刻导致消费下降0.035。

下面使用校准的方法来检验消费的收敛速度。

s在发生一次性上升后便保持不变，因而消费在新的平衡增长路径上会保持不变。在教材上第21页讨论了k和y的收敛速度。首先定义k的动态方程式：$\dot{k}=sf(k)-(n+g+\delta)k$，在平衡增长路径上，$\dot{k}$为0，取$\dot{k}(k)$在$k=k^*$上的一阶泰勒展开：

$$\dot{k}\simeq\left[\left.\frac{\partial\dot{k}(k)}{\partial k}\right|_{k=k^*}\right](k-k^*)$$

令$\lambda=-\partial\dot{k}(k)/\partial k|_{k=k^*}$，有下式：

$$\dot{k}(t)\simeq-\lambda[k(t)-k^*]$$

$k(t)-k^*$的平衡增长路径为：

$$k(t)\simeq k^*+e^{-\lambda t}[k(0)-k^*]$$

在$k=k^*$求解λ：

$$\begin{aligned}\lambda=-\left.\frac{\partial\dot{k}(k)}{\partial k}\right|_{k=k^*}&=-[sf'(k^*)-(n+g+\delta)]\\&=(n+g+\delta)-sf'(k^*)\\&=(n+g+\delta)-\frac{(n+g+\delta)k^*f'(k^*)}{f(k^*)}\\&=[1-\alpha_K(k^*)](n+g+\delta)\end{aligned}$$

因为$(n+g+\delta)$为6%，而$\alpha_K=1/3$，可以得出λ为4%。这意味着k和y每年向平衡增长路径移动4%。由于$c=(1-s)^*y$，因此消费也以稳定的速率向稳定点移动。可以推出下式：

$$c(t)-c^*\cong e^{-(1-\alpha_K)(n+g+\delta)t}[c(0)-c^*]$$

再次简化为：

$$e^{-\lambda t}=\frac{c(t)-c^*}{c(0)-c^*}$$

由题目可知，消费先下降3.5%，而后再上升6%，因此它将移动9.5%。消费必须移动36.8%（3.5%/6% =36.8%）才能到达新的平衡增长路径。这意味着剩余的到达原来的平衡增长路径需要63.2%。为了决定收敛的速度，有下面的式子：

$$e^{-\lambda t^*}=0.632$$

两边取对数，有：$-\lambda t^*=\ln(0.632)$，求得下面的结果：

$$t^*=0.459/0.04=11.5\text{ 年}$$

因此，消费要恢复到不存在投资增长时的水平，需花费11.5年。

1.9 索洛模型中的要素支付。假设劳动与资本均按其边际产品支付。令w表示$\partial F(K,AL)/\partial L$，且$r$表示$[\partial F(K,AL)/\partial K]-\delta$。

（a）证明劳动的边际产品w是$A[f(k)-kf'(k)]$。

（b）证明如果资本与劳动均按其边际产品支付，那么不变的规模报酬意味着生产要素的

总支付量等于总的净产出，这便是证明在不变的规模报酬条件下，$wL+rK=F(K,\ AL)-\delta K$。

(c)随着产出份额被支付给资本与劳动。资本报酬(r)大致也不随时间而变化。处在平衡增长路径上的索洛经济展现这些特征吗？处在均衡增长路径上的 w 与 r 的增长率是多少？

(d)假设经济由一个数量为 $k<k^*$ 的水平开始。随着 k 移向 k^*，w 是否以大于、小于或等于其处在平衡增长路径时的增长率的速率增长？r 会怎样呢？

答：(a)劳动的边际产品为：$w=\partial F(K,\ AL)/\partial L$

生产函数为 $Y=ALf(k)=ALf(K/AL)$，两边关于 L 取导数：

$$w=\partial Y/\partial L=ALf'(k)[-K/AL^2]+Af(k)=A[(-K/AL)f'(k)+f(k)]=A[f(k)-kf'(k)] \quad (1)$$

即：$w=A[f(k)-kf'(k)]$

(b)资本的边际产品为：$r=[\partial F(K,\ AL)/\partial K]-\delta$

生产函数为 $Y=ALf(k)=ALf(K/AL)$，两边关于 K 取导数：

$$r=[\partial Y/\partial K]-\delta=ALf'(k)[1/AL]-\delta=f'(k)-\delta \quad (2)$$

将式(1)和式(2)代入 $wL+rK$，得：

$$wL+rK=A[f(k)-kf'(k)]L+[f'(k)-\delta]K=ALf(k)-f'(k)[K/AL]AL+f'(k)K-\delta K$$

简化为：

$$wL+rK=ALf(k)-f'(k)K+f'(k)K-\delta K=ALf(k)-\delta K=ALF(K/AL,\ 1)-\delta K$$

因为 $ALF(K/AL,\ 1)=F(K,\ AL)$，所以有下式：

$$wL+rK=F(ALK/AL,\ AL)-\delta K=F(K,\ AL)-\delta K \quad (3)$$

(c)已求得 $r=f'(k)-\delta$，因为 δ 保持不变，而 k 在平衡增长路径上也保持不变。因此 $f'(k)$ 不变，r 也将保持不变。这意味着 $\frac{\dot{r}}{r}=0$，从而资本回报率在索洛模型中保持不变。

资本的产出份额为 $\frac{rK}{Y}$，在平衡增长路径上，资本的产出份额保持不变。

$$\frac{(r\dot{K/Y})}{(rK/Y)}=\dot{r}/r+\dot{K}/K-\dot{Y}/Y=0+(n+g)-(n+g)=0$$

因为资本的产出份额与劳动的产出份额之和为1，因此，劳动的产出份额也保持不变。

下面求在平衡增长路径上劳动的增长率：

劳动的边际产品是：$w=A[f(k)-kf'(k)]$，两边取对数求劳动的增长率：

$$\frac{\dot{w}}{w}=\frac{\dot{A}}{A}+\frac{[f(k)-k\dot{f'}(k)]}{[f(k)-kf'(k)]}=g+\frac{[f'(k)\dot{k}-\dot{k}f'(k)-kf''(k)\dot{k}]}{f(k)-kf'(k)}=g+\frac{-kf''(k)\dot{k}}{f(k)-kf'(k)}$$

在平衡增长路径上，$\dot{k}=0$，因此 $\frac{\dot{w}}{w}=g$，即：劳动的边际产品的增长率为有效劳动增长率。

(d)由(c)知道 $\frac{\dot{w}}{w}=g+\frac{-kf''(k)\dot{k}}{f(k)-kf'(k)}$，因为 $f''(k)<0$，所以式中第二项为正，如果 $\dot{k}>0$。当 $k<k^*$ 时，$\dot{k}>0$，$\frac{\dot{w}}{w}>g$，因此劳动的边际生产率比平衡增长路径时更快。因此，当 $k<k^*$ 时，劳动的边际生产率比平衡增长路径时更快。

资本的边际产品的增长率为：

$$\frac{\dot{r}}{r}=\frac{[\dot{f'(k)}]}{f'(k)}=\frac{f''(k)\dot{k}}{f'(k)}$$

当 k 向 k^* 移动时，$\dot{k}>0$，而 $f''(k)<0$，因此 $\frac{\dot{r}}{r}<0$，从而资本的边际产品的增长率下降。

1.10 假设像习题 1.9 中的一样，资本与劳动按其边际产品获得收益。此外，假设一切资本收入被储蓄且所有劳动收入被消费。因此，$\dot{K}=[\partial F(K,\ AL)/\partial K]K-\delta K$。

(a)证明这种经济收敛于一平衡增长路径。

(b)处在均衡增长路径上的 k 大于、小于或等于 k 的黄金律水平吗？关于这个结论的直觉是什么？

答：(a)下面证明该经济可以收敛于平衡增长路径。

由 $k=K/AL$，对其两边关于时间求导，可得：

$$\dot{k}=\left(\frac{\dot{K}}{AL}\right)=\frac{\dot{K}(AL)-K[\dot{L}A-\dot{A}L]}{(AL)^2}=\frac{\dot{K}}{AL}-\frac{K}{AL}\left[\frac{\dot{L}A+\dot{A}L}{AL}\right]=\frac{\dot{K}}{AL}-k\left(\frac{\dot{L}}{L}+\frac{\dot{A}}{A}\right) \tag{1}$$

将 $\dot{K}=[\partial F(K,\ AL)/\partial K]K-\delta K$、$\frac{\dot{L}}{L}=n$ 和 $\frac{\dot{A}}{A}=g$ 代入(1)式，可得：

$$\dot{k}=\frac{[\partial F(K,\ AL)/\partial K]K-\partial K}{AL}-(n+g)k=\frac{\partial F(K,\ AL)}{\partial K}k-\delta k-(n+g)k \tag{2}$$

将 $\partial F(K,\ AL)/\partial K=f'(k)$ 代入(2)式，可得：

$$\dot{k}=[f'(k)-(n+g+\delta)]k \tag{3}$$

当 $\dot{k}=0$ 时，每单位有效劳动保持不变。即：$f'(k)-(n+g+\delta)=0$，因此平衡增长路径上的每单位有效劳动的资本可以由 $f'(k)-(n+g+\delta)=0$ 潜在地决定。

$k=K/AL$，由于在平衡增长路径上 k 保持不变，因此，K 必须与 AL 保持同样的增长速度。AL 的增长速度为 $n+g$，所以 K 的增长速度为 $n+g$。由于生产函数是规模报酬不变的，因此，在平衡增长路径上每单位有效劳动的产出也必须是 $n+g$。

综合上述，可以发现所有变量增长速度均为不变。

下面证明经济收敛于平衡增长路径。

在 $k=k^*$ 时，$f'(k)-(n+g+\delta)=0$，此时经济处于平衡增长路径上。如果 $k>k^*$，由于 $f''<0$，所以 $\dot{k}<0$，则经济向下偏离平衡增长路径；反之，如果 $k<k^*$，则 $\dot{k}>0$，经济向上偏离平衡增长路径。所以，不管初始的 k 如何，经济都将收敛于平衡增长路径，此时所有的经济变量都以不变的速率增长。

(b)所谓满足黄金规则的资本水平是指每单位有效劳动最大化的消费的资本水平，即：$f'(k^{GR})=(n+g+\delta)$。此刻满足生产函数的斜率等于持平投资线的斜率。而这正是经济收敛到均衡增长路径时 k 的水平，这时所有的资本收入被储蓄，所有的劳动收入被消费。

在本模型中，将资本的贡献(资本的边际产品乘以资本的数量)储蓄起来。如果资本的贡献超过持平投资，即 $kf'(k)>(n+g+\delta)k$，则 k 上升；反之，如果 $kf'(k)<(n+g+\delta)k$，则 k 下降。因此，经济收敛于 $kf'(k)=(n+g+\delta)k$，或者，$f'(k)=(n+g+\delta)$这一点上，此刻经济收敛于平衡增长路径。

1.11 物化(embodied)的技术进步(取自索洛 1960，萨托 Sato 1966)。有关技术进步的一种观点是，在 t 时刻建立的资本品的生产力依存于 t 时刻的技术状态并且不受后续技术进

步的影响。这便是人所共知的物化的技术进步(技术进步在其可提高产出之前，必须“物化”在新资本中)。这个习题要求你去探讨其效应。

(a)作为一个前提，让我们把基本的索洛模型修改为技术进步是资本增加型的而非劳动增加型的，使得一个平衡增长路径存在。假设生产函数是柯布—道格拉斯型的，$Y(t)=[A(t)K(t)]^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}$。假设 A 以如下的速率 μ 增长：$\dot{A}(t)=\mu A(t)$。

证明经济收敛于一平衡增长路径，并且求出平衡增长路径上的 Y 与 K 的增长率，(提示：证明可把 $Y/(A^{\phi}L)$ 写成 $K/(A^{\phi}L)$ 的函数，这里 $\phi=\alpha/(1-\alpha)$，然后分析 $K/(A^{\phi}L)$ 的动态学。)

(b)现在考虑物化的技术进步。特别地，设生产函数为 $Y(t)=J(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}$，式中 $J(t)$ 是有效资本存量，$J(t)$ 的动态学为 $\dot{J}(t)=sA(t)Y(t)-\delta J(t)$。在这个表达式中 $A(t)$ 的出现意味着在 t 时刻，投资的生产力依存 t 时刻的技术。

证明经济收敛于一个平衡增长路径。在平衡增长路径上 Y 与 J 的增长率是多少？

(提示：令 $\bar{J}(t)=J(t)/A(t)$。然后利用像(a)一样的分析方法，主要集中于用 $\bar{J}/A^{\phi}L$) 替代 $K/(A^{\phi}L)$。

(c)在平衡增长路径上产出关于 s 的弹性是什么？

(d)在平衡增长路径邻近，经济怎样快速地收敛于平衡增长路径？

(e)将你在(c)与(d)中得出的结论与课文中基本的索洛模型得出的相应结论进行比较。

答：(a)A 以 $Y=F(K,AL)$ 的形式进入，则技术进步为哈罗德中性的；A 以 $Y=F(AK,L)$ 的形式进入，则技术进步为资本增加型的；A 以 $Y=AF(K,L)$ 的形式进入，则技术进步为希克斯中性的。本题为第二种情况。

资本增进型的技术进步的生产函数的形式为：

$$Y(t)=[A(t)K(t)]^{\alpha}L(t)^{1-\alpha} \tag{1}$$

在(1)式左右两边同时除以 $A(t)^{\alpha/(1-\alpha)}L(t)$，可得：

$$\frac{Y(t)}{A(t)^{\alpha/(1-\alpha)}L(t)}=\left[\frac{A(t)^{1-\alpha/(1-\alpha)}K(t)}{L(t)}\right]^{\alpha}A(t)^{-\alpha}=\left[\frac{A(t)^{1-\alpha/(1-\alpha)}A(t)^{-1}K(t)}{L(t)}\right]^{\alpha}$$

上式再简化为：

$$\frac{Y(t)}{A(t)^{\alpha/(1-\alpha)}L(t)}=\left[\frac{K(t)}{A(t)^{\alpha/(1-\alpha)}L(t)}\right]^{\alpha}$$

定义：$\phi=\alpha/(1-\alpha)$，$k(t)=K(t)/A(t)^{\phi}L(t)$ 及 $y(t)=Y(t)/A(t)^{\phi}L(t)$，代入上式，可得：

$$y(t)=k(t)^{\alpha} \tag{2}$$

为求 k 的动态学，将 $k(t)=K(t)/A(t)^{\phi}L(t)$ 两边求导数得：

$$\dot{k}(t)=\frac{\dot{K}(t)[A(t)^{\phi}L(t)]-K(t)[\phi A(t)^{\phi-1}\dot{A}(t)L(t)+\dot{L}(t)A(t)^{\phi}]}{[A(t)^{\phi}L(t)]^2}$$

即：$\dot{k}(t)=\dfrac{\dot{K}(t)}{A(t)^{\phi}L(t)}-\dfrac{K(t)}{A(t)^{\phi}L(t)}\left[\phi\dfrac{\dot{A}(t)}{A(t)}+\dfrac{\dot{L}(t)}{L(t)}\right]$

将 $k(t)=K(t)/A(t)^{\phi}L(t)$，$\dot{A}(t)/A(t)=\mu$ 及 $\dot{L}(t)/L(t)=n$ 代入上式，可得：

$$\dot{k}(t)=\dot{K}(t)/A(t)^{\phi}L(t)-(\phi\mu+n)k(t) \tag{3}$$

总资本存量的动态方程式为：

$$\dot{K}(t)=sY(t)-\delta K(t) \tag{4}$$