

积分表

徐桂芳 編譯

646

03292

上海科学技术出版社

51.57.1
C6

积 分 表

徐 桂 芳 編 譯

上 海 科 学 技 术 出 版 社

內 容 提 要

本表系根据 B. O. Peirce 的积分表編成, 列举了一般的代数函数及超越函数的积分公式, 并收集了若干常用的定积分公式及椭圆积分公式等共 628 条。

为了便于查考起見, 篇末列有附录一篇, 介绍各种有关的輔助公式, 并附刊有各种常用的数值表。

各表的使用方法見篇首的查表須知。

本表适于一般工程技术設計計算时作查考之用, 也适于高等学校数学、物理、工程各系学生作参考之用。

积 分 表

徐 桂 芳 編 譯

上海科学技术出版社出版 (上海瑞金二路 450 号)

上海市书刊出版业营业許可証出 098 号

上海市印刷五厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 787×1092 1/32 印張 4 28/32 排版字数 136,000

(原新亚、科技版共印 83,000 册 1953 年 11 月第 1 版)

1959 年 3 月新 1 版 1963 年 7 月第 8 次印刷 印数 107,501--132,500

統一书号 13119·23 定价(十四) 0.50 元

弁 言

本表是根据 B. O. Peirce 的积分表編成的。内容分为三部分：

- 一. 查表須知；
- 二. 积分公式；
- 三. 附 录。

第一部分查表須知，說明怎样選擇公式和应用公式；这是編者加进去的，希望对初学微积分和微分方程的讀者有些帮助。

为求内容的更有条理，原表中的許多部分已經編者加以整理。例如把超越函数的积分公式分为八类，使讀者更容易找到需要的公式。

編 者 一九五三年

目 录

一. 查表须知

I. 公式的选择	1
II. 反三角函数、对数函数和反双曲线函数的主值	2
III. 间接积分公式	4

二. 积分公式

I. 基本的积分公式 (1—20)	5
II. 有理代数函数的积分公式 (21—90)	6
A. 式中含有 $(a+bx)$	6
B. 式中含有 $(a+bx^n)$	9
C. 式中含有 $(a+bx+cx^2)$	10
D. 有理分式	13
III. 根式代数函数的积分公式 (91—213)	15
A. 式中含有 $\sqrt[n]{a+bx}$	15
B. 式中含有 $\sqrt{a+bx}$ 和 $\sqrt{a'+b'x}$	16
C. 式中含有 $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ 或 $\sqrt{a^2 - x^2}$	18
D. 式中含有 $\sqrt{a+bx+cx^2}$	21
E. 式中含有 $(a'+b'x)^n$ 和 $(a+bx+cx^2)^{m+\frac{1}{2}}$	25
IV. 其他代数函数的积分公式 (214—235)	29
V. 超越函数的积分公式 (236—479)	32
A. 一般的超越函数	32
B. 式中仅含有三角函数	34
C. 式中含有三角函数和积分变数的幂	44
D. 式中含有反三角函数和积分变数的幂	46

E. 式中含有指数函数和代数函数	48
F. 式中含有指数函数和三角函数	49
G. 式中含有对数函数	50
H. 式中含有双曲线函数或反双曲线函数	52
VI. 定积分公式 (480—523)	55
VII. 椭圆积分公式 (524—569)	58
VIII. 格林 (Green) 定理和斯多克司 (Stokes) 定理的积分公式 (570—587)	65
IX. 普遍的积分公式 (588—611)	67
X. 交流电流理论中常见的积分公式 (612—628)	68

三. 附 录

I. 辅助公式 (629—938)	72
A. 三角函数和反三角函数	72
B. 双曲线函数和反双曲线函数	80
C. 椭圆函数	82
D. 贝塞尔 (Bessel) 函数	85
E. 无穷级数和无穷积	86
F. 导数	93
G. 布阿松 (Poisson) 微分方程	100
II. 附 表	101
A. 常用的常数	101
B. 插值法说明	101
C. 几率积分表	102
D. 椭圆积分表	107
E. 双曲线函数表	110
F. $\log_{10} e$ 的倍数表	114
G. $1/\log_{10} e$ 的倍数表	114
H. 指数表	115
I. e^x 和 e^{-x} 的普通对数表	117
J. 自然对数表 (五位)	119
K. $\Gamma(x)$ 的普通对数表	132
L. 三角函数表 (三位)	133

[iv] 目 录

M. 普通对数表(四位)	134
N. 三角函数表(四位)	138
O. 弧度,度对照表.....	145
P. 平方根表	146

一. 查表須知

I. 公式的選擇

形式相同的积分可有几种不同的結果。公式的選擇不但要看哪一个有意义,并且要看哪一个便于計算,或者形式上比較簡單。

【例一】公式 48:

$$\int \frac{dx}{c^2 - x^2} = \frac{1}{2c} \log \frac{c+x}{c-x} = \frac{1}{c} \tanh^{-1} \frac{x}{c}$$

或
$$\frac{1}{2c} \log \frac{x+c}{x-c} = \frac{1}{c} \operatorname{ctnh}^{-1} \frac{x}{c}.$$

当 $|x| < c$ 时,前面的两个結果

$$\int \frac{dx}{c^2 - x^2} = \frac{1}{2c} \log \frac{c+x}{c-x} = \frac{1}{c} \tanh^{-1} \frac{x}{c} \quad (48a)$$

有意义,后面的两个結果

$$\int \frac{dx}{c^2 - x^2} = \frac{1}{2c} \log \frac{x+c}{x-c} = \frac{1}{c} \operatorname{ctnh}^{-1} \frac{x}{c} \quad (48b)$$

沒有意义。但当 $|x| > c$ 时, (48a) 沒有意义,所以应选择 (48b)。例如

$$(a) \quad \int_0^1 \frac{dx}{4-x^2} = \frac{1}{4} \log \frac{2+x}{2-x} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \log 3.$$

$$(b) \quad \int_3^4 \frac{dx}{4-x^2} = \frac{1}{4} \log \frac{x+2}{x-2} \Big|_3^4 = \frac{1}{4} \log \frac{3}{5}.$$

有时为了計算方便形式簡單,我們采用反双曲綫函数而不采用对数函数。例如求下列方程的积分

$$(c^2 - y^2) dx - dy = 0, \quad |y| < c,$$

得

$$\int dx = \int \frac{dy}{c^2 - y^2},$$

[2] 查表須知

則
$$x+k=\frac{1}{c} \tanh^{-1} \frac{y}{c},$$

k 是积分常数, 因此求得

$$y=c \tanh c(x+k).$$

【例二】 公式 3:

$$\int \frac{dx}{x} = \log x \text{ 或 } \log(-x).$$

当 $x > 0$ 时, 采用

$$\int \frac{dx}{x} = \log x;$$

当 $x < 0$ 时, 采用

$$\int \frac{dx}{x} = \log(-x).$$

【例三】 公式 49, 50, 298, 300, 等等, 要看 a, b 的值能使哪一个等式有意义, 同时应留意哪一个等式便于计算, 或者使我们所研究的问题得到形式比较简单的结果。

一个不收敛的广义积分是没有意义的, 应当在查表之前加以留意。

【例四】 定积分 (見公式 462):

$$\int_{-1}^1 \operatorname{ctnh}^2 x \, dx = x - \operatorname{ctnh} x \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{1-e^2}.$$

但是这个广义积分不收敛, 因此求得的结果是没有意义的。

【例五】 定积分 (見公式 436, 当 $a=0$ 时):

$$\int_{-1}^1 \log x^2 \, dx = x \log x^2 - 2x \Big|_{-1}^1 = -4.$$

这是一个收敛的广义积分, 因此求得的结果是正确的。

II. 反三角函数、对数函数和 反双曲线函数的主值

A. 三角函数是周期函数 它们的周期是 2π 或 π :

$$\sin(2n\pi + y) = \sin y,$$

$$\cos(2n\pi + y) = \cos y,$$

$$\tan(n\pi + y) = \tan y.$$

因此它們的反函数是多值函数。本表中所列的这类函数的值都以主值为限。在許多含有三角函数的积分公式中，常引用 $z = \tan \frac{1}{2} x$ 替代式求解，无形之中已經应用主值計算，所以自变数变程的限制是必需的条件。例見公式 300。

B. 指数函数和双曲綫函数也是周期函数 它們的周期是 $2\pi i$ 或 πi ：

$$e^{2n\pi i + y} = e^y,$$

$$\sinh(2n\pi i + y) = \sinh y,$$

$$\cosh(2n\pi i + y) = \cosh y,$$

$$\tanh(n\pi i + y) = \tanh y.$$

因此，对数函数和反双曲綫函数在复变数范围里都是多值函数。

C. 对数函数和反双曲綫函数能取得实值时，便以实值为主值 反三角函数的主值依照下列規定：

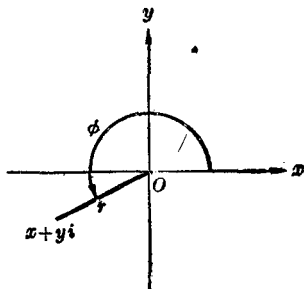
$$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \tan^{-1} x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi, \quad 0 \leq \operatorname{ctn}^{-1} x \leq \pi.$$

$\tan^{-1} x$ 和 $\operatorname{ctn}^{-1} x$ 的主值满足下列恒等式

$$\tan^{-1} x + \operatorname{ctn}^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$$



D. 关于 $\log(x + yi)$

$$\text{公式} \quad \log(x + yi) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

是容易发生錯誤的，因为 $\log(x + yi)$ 的周期是 $2\pi i$ ，而 $i \tan^{-1} \frac{y}{x}$ 的周期是 πi ，因此 $\log(x + yi)$ 的通值須加上 πi 的奇数倍或偶数倍，要看 x, y 的符号再作决定。最好应用下列公式計算：

$$\log(x + yi) = \log r + \phi i,$$

$$\begin{aligned}x &= r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \\r &= \sqrt{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

III. 間接积分公式

不定积分的公式可以分为两类，一类是直接查得結果的，另一类是間接求得結果的。例如

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{k^2 - x^2}},$$

表中无直接公式可查，可間接应用公式 159 ($a=k^2$, $c=-1$, $f(x^2)=x^2$):

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} &= \int (u^2 - k^2) du = \frac{u^3}{3} - k^2 u, \quad u^2 = k^2 - x^2 \\&= -\frac{1}{3} \sqrt{k^2 - x^2} (x^2 + 2k^2).\end{aligned}$$

其他如递演积分公式也是属于这一类。

二. 积分公式

I. 基本的积分公式

1. $\int a dx = ax.$

2. $\int af(x) dx = a \int f(x) dx.$

3. $\int \frac{dx}{x} = \log x.$ 或 $\log(-x).$ $[\log x = \log(-x) + (2k+1)\pi i].$

4. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$ 当 $m \neq -1$ 时.

5. $\int e^x dx = e^x.$

6. $\int a^x \log a dx = a^x.$

7. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x,$ 或 $-\operatorname{ctn}^{-1} x.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x,$ 或 $-\cos^{-1} x.$

9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x,$ 或 $-\csc^{-1} x.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \operatorname{versin}^{-1} x,$ 或 $-\operatorname{coversin}^{-1} x.$

11. $\int \cos x dx = \sin x,$ 或 $-\operatorname{coversin} x.$

12. $\int \sin x dx = -\cos x,$ 或 $\operatorname{versin} x.$

13. $\int \operatorname{ctn} x dx = \log \sin x.$

$$14. \int \tan x \, dx = -\log \cos x.$$

$$15. \int \tan x \sec x \, dx = \sec x.$$

$$16. \int \sec^2 x \, dx = \tan x.$$

$$17. \int \csc^2 x \, dx = -\cot x.$$

在下列公式中, u, v, w 和 y 都表示 x 的任意函数:

$$18. \int (u+v+w+\text{etc.}) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx + \int w \, dx + \text{etc.}$$

$$19a. \int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

$$19b. \int u \frac{dv}{dx} \, dx = uv - \int v \frac{du}{dx} \, dx.$$

$$20. \int f(y) \, dx = \int \frac{f(y) \, dy}{\frac{dy}{dx}}.$$

II. 有理代数函数的积分公式

A. 式中含有 $(a+bx)$

应用替代式 $y=a+bx$ 和 $z=(a+bx)/x$, 得下列积分公式:

$$21. \int (a+bx)^m \, dx = \frac{1}{b} \int y^m \, dy.$$

$$22. \int x(a+bx)^m \, dx = \frac{1}{b^2} \int y^m (y-a) \, dy.$$

$$23. \int x^n (a+bx)^m \, dx = \frac{1}{b^{n+1}} \int y^m (y-a)^n \, dy.$$

$$24. \int \frac{x^n \, dx}{(a+bx)^m} = \frac{1}{b^{n+1}} \int \frac{(y-a)^n \, dy}{y^m}.$$

$$25. \int \frac{dx}{x^n (a+bx)^m} = -\frac{1}{a^{m+n-1}} \int \frac{(z-b)^{m+n-2} \, dz}{z^m}.$$

因此有

$$26. \int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \log(a+bx).$$

$$27. \int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}.$$

$$28. \int \frac{dx}{(a+bx)^3} = -\frac{1}{2b(a+bx)^2}.$$

$$29. \int \frac{x dx}{a+bx} = \frac{1}{b^2} [a+bx - a \log(a+bx)].$$

$$30. \int \frac{x dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2} \left[\log(a+bx) + \frac{a}{a+bx} \right].$$

$$31. \int \frac{x dx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^2} \left[-\frac{1}{a+bx} + \frac{a}{2(a+bx)^2} \right].$$

$$32. \int \frac{x^2 dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3} \left[\frac{1}{2} (a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2 \log(a+bx) \right].$$

$$33. \int \frac{x^2 dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3} \left[a+bx - 2a \log(a+bx) - \frac{a^2}{a+bx} \right].$$

$$34. \int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a} \log \frac{a+bx}{x}.$$

$$35. \int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2} \log \frac{a+bx}{x}.$$

$$36. \int \frac{(a+bx) dx}{a'+b'x} = \frac{bx}{b'} + \frac{ab'-a'b}{b'^2} \log(a'+b'x).$$

$$37. \int (a+bx)^n (a'+b'x)^m dx = \frac{1}{(m+n+1)b} \left((a+bx)^{n+1} (a'+b'x)^m - m(ab'-a'b) \int (a+bx)^n (a'+b'x)^{m-1} dx \right)$$

$$38. \int \frac{(a+bx)^n dx}{(a'+b'x)^m} = -\frac{1}{(m-1)(ab'-a'b)} \left(\frac{(a+bx)^{n+1}}{(a'+b'x)^{m-1}} + (m-n-2)b \int \frac{(a+bx)^n dx}{(a'+b'x)^{m-1}} \right) \\ = -\frac{1}{(m-n-1)b'} \left(\frac{(a+bx)^n}{(a'+b'x)^{m-1}} \right)$$

$$* \int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2} \log \frac{a+bx}{x}.$$

$$\begin{aligned}
 & +n(ab'-a'b) \int \frac{(a+bx)^{n-1} dx}{(a'+b'x)^m} \\
 & = -\frac{1}{(m-1)b'} \left(\frac{(a+bx)^n}{(a'+b'x)^{m-1}} - nb \int \frac{(a+bx)^{n-1} dx}{(a'+b'x)^{m-1}} \right).
 \end{aligned}$$

$$39. \int \frac{dx}{(a+bx)(a'+b'x)} = \frac{1}{ab'-a'b} \cdot \log \frac{a'+b'x}{a+bx}.$$

$$\begin{aligned}
 40. \int \frac{dx}{(a+bx)^n(a'+b'x)^m} \\
 & = \frac{1}{(m-1)(ab'-a'b)} \left(\frac{1}{(a+bx)^{n-1}(a'+b'x)^{m-1}} \right. \\
 & \quad \left. - (m+n-2)b \int \frac{dx}{(a+bx)^n(a'+b'x)^{m-1}} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 41. \int \frac{xdx}{(a+bx)(a'+b'x)} \\
 & = \frac{1}{ab'-a'b} \left(\frac{a}{b} \log(a+bx) - \frac{a'}{b'} \log(a'+b'x) \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 42. \int \frac{dx}{(a+bx)^2(a'+b'x)} \\
 & = \frac{1}{ab'-a'b} \left(\frac{1}{a+bx} + \frac{b'}{ab'-a'b} \log \frac{a'+b'x}{a+bx} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 43. \int \frac{xdx}{(a+bx)^2(a'+b'x)} \\
 & = \frac{-a}{b(ab'-a'b)(a+bx)} - \frac{a'}{(ab'-a'b)^2} \log \frac{a'+b'x}{a+bx}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 44. \int \frac{x^2 dx}{(a+bx)^2(a'+b'x)} &= \frac{a^2}{b^2(ab'-a'b)(a+bx)} \\
 &+ \frac{1}{(ab'-a'b)^2} \left[\frac{a'^2}{b'} \log(a'+b'x) + \frac{a(ab'-2a'b)}{b^2} \log(a+bx) \right].
 \end{aligned}$$

$$45. \int (a+bx)^{\frac{1}{n}} dx = \frac{n}{(n+1)b} (a+bx)^{\frac{n+1}{n}}.$$

$$46. \int \frac{dx}{(a+bx)^{\frac{1}{n}}} = \frac{n}{(n-1)b} (a+bx)^{\frac{n-1}{n}}.$$

B. 式中含有 $(a+bx^n)$

$$47. \int \frac{dx}{c^2+x^2} = \frac{1}{c} \tan^{-1} \frac{x}{c} = \frac{1}{c} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2+c^2}}.$$

$$48. \int \frac{dx}{c^2-x^2} = \frac{1}{2c} \log \frac{c+x}{c-x} = \frac{1}{c} \tanh^{-1} \frac{x}{c},$$

$$\text{或} = \frac{1}{2c} \log \frac{x+c}{x-c} = \frac{1}{c} \operatorname{ctnh}^{-1} \frac{x}{c}.$$

$$49. \int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \tan^{-1} \frac{x\sqrt{ab}}{a}.$$

$$50. \int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \log \frac{a+x\sqrt{-ab}}{a-x\sqrt{-ab}},$$

$$\text{或} \frac{1}{\sqrt{-ab}} \tanh^{-1} \frac{x\sqrt{-ab}}{a}, \text{或} \frac{1}{\sqrt{-ab}} \operatorname{ctnh}^{-1} \frac{x\sqrt{-ab}}{a}.$$

$$51. \int \frac{dx}{(a+bx^2)^2} = \frac{x}{2a(a+bx^2)} + \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{a+bx^2}.$$

$$52. \int \frac{dx}{(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{1}{2ma} \cdot \frac{x}{(a+bx^2)^m} + \frac{2m-1}{2ma} \int \frac{dx}{(a+bx^2)^m}.$$

$$53. \int \frac{x dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b} \log \left(x^2 + \frac{a}{b} \right).$$

$$54. \int \frac{x dx}{(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{(a+bz)^{m+1}}, \text{式中 } z=x^2.$$

$$55. \int \frac{dx}{x(a+bx^2)} = \frac{1}{2a} \log \frac{x^2}{a+bx^2}.$$

$$56. \int \frac{x^2 dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a+bx^2}.$$

$$57. \int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{a+bx^2}.$$

$$58. \int \frac{x^2 dx}{(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{-x}{2mb(a+bx^2)^m} + \frac{1}{2mb} \int \frac{dx}{(a+bx^2)^m}.$$

$$59. \int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)^m} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{(a+bx^2)^{m+1}}.$$

$$60. \int \frac{dx}{a+bx^3} = \frac{k}{3a} \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{(k+x)^2}{k^2-kx+x^2} \right) + \sqrt{3} \tan^{-1} \frac{2x-k}{k\sqrt{3}} \right],$$

式中 $bk^3=a$.

$$61. \int \frac{x dx}{a+bx^3} = \frac{1}{3bk} \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{k^2-kx+x^2}{(k+x)^2} \right) + \sqrt{3} \tan^{-1} \frac{2x-k}{k\sqrt{3}} \right],$$

式中 $bk^3=a$.

$$62. \int \frac{dx}{x(a+bx^n)} = \frac{1}{an} \log \frac{x^n}{a+bx^n}.$$

$$63. \int \frac{dx}{(a+bx^n)^{m+1}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{(a+bx^n)^m} - \frac{b}{a} \int \frac{x^n dx}{(a+bx^n)^{m+1}}.$$

$$64. \int \frac{x^n dx}{(a+bx^n)^{p+1}} = \frac{1}{b} \int \frac{x^{n-n} dx}{(a+bx^n)^p} - \frac{a}{b} \int \frac{x^{n-n} dx}{(a+bx^n)^{p+1}}.$$

$$65. \int \frac{dx}{x^m(a+bx^n)^{p+1}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^m(a+bx^n)^p} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}.$$

$$66. \int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx = \begin{cases} \frac{1}{b(m+np)} \left[x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} \right. \\ \quad \left. - (m-n)a \int x^{m-n-1}(a+bx^n)^p dx \right], \\ \frac{1}{m+np} \left[x^m(a+bx^n)^p \right. \\ \quad \left. + npa \int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1} dx \right], \\ \frac{1}{ma} \left[x^m(a+bx^n)^{p+1} \right. \\ \quad \left. - (m+np+n)b \int x^{m+n-1}(a+bx^n)^p dx \right], \\ \frac{1}{an(p+1)} \left[-x^m(a+bx^n)^{p+1} \right. \\ \quad \left. + (m+np+n) \int x^{m-1}(a+bx^n)^{p+1} dx \right]. \end{cases}$$

C. 式中含有 $(a+bx+cx^2)$ 令 $X=a+bx+cx^2$ 和 $q=4ac-b^2$, 则有

$$67. \int \frac{dx}{X} = \frac{2}{\sqrt{q}} \tan^{-1} \frac{2cx+b}{\sqrt{q}}.$$

$$68. \int \frac{dx}{X} = \frac{1}{\sqrt{-q}} \log \frac{2cx+b-\sqrt{-q}}{2cx+b+\sqrt{-q}},$$