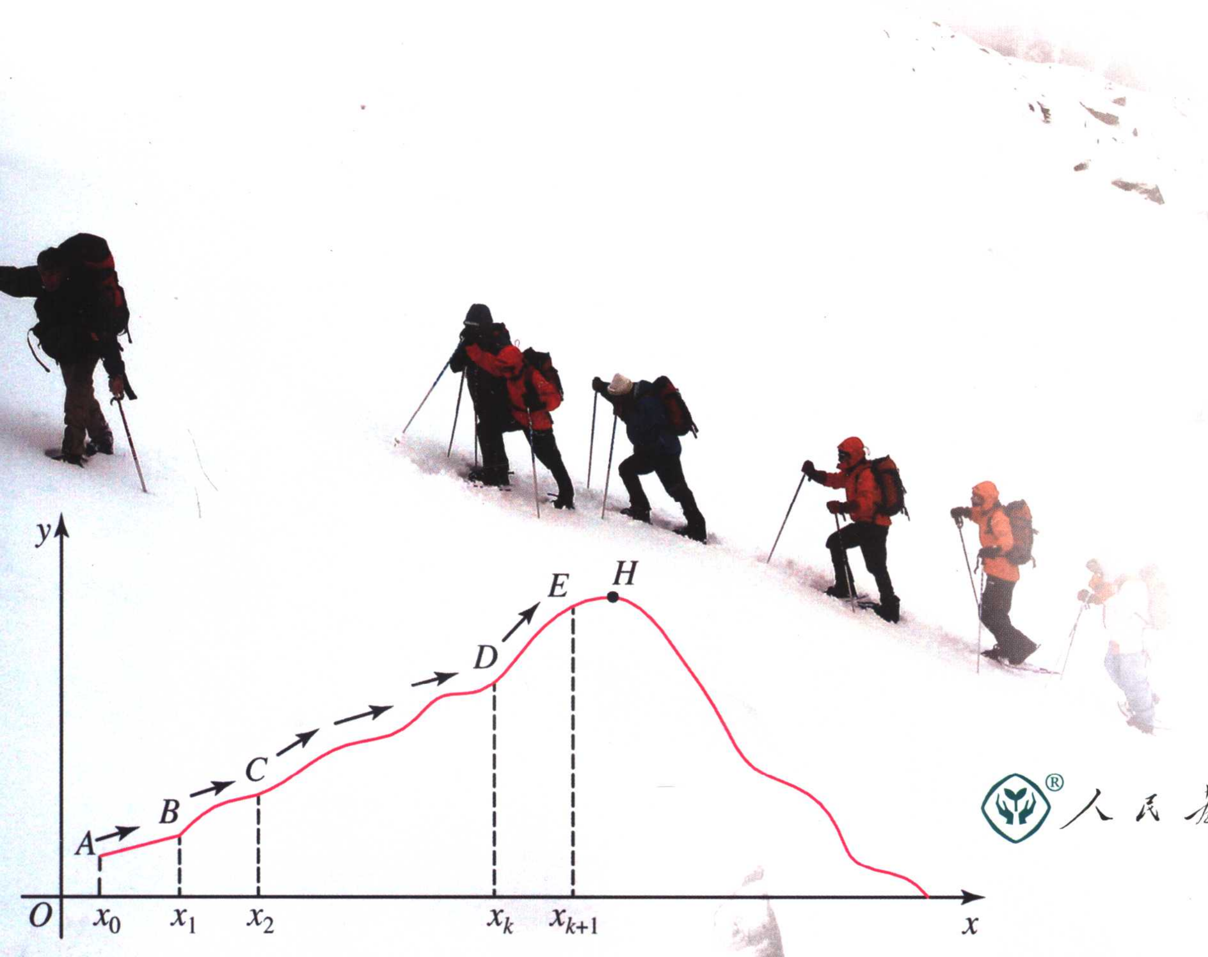
经全国中小学教材审定委员会
2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 2–2

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著



人民教育出版社

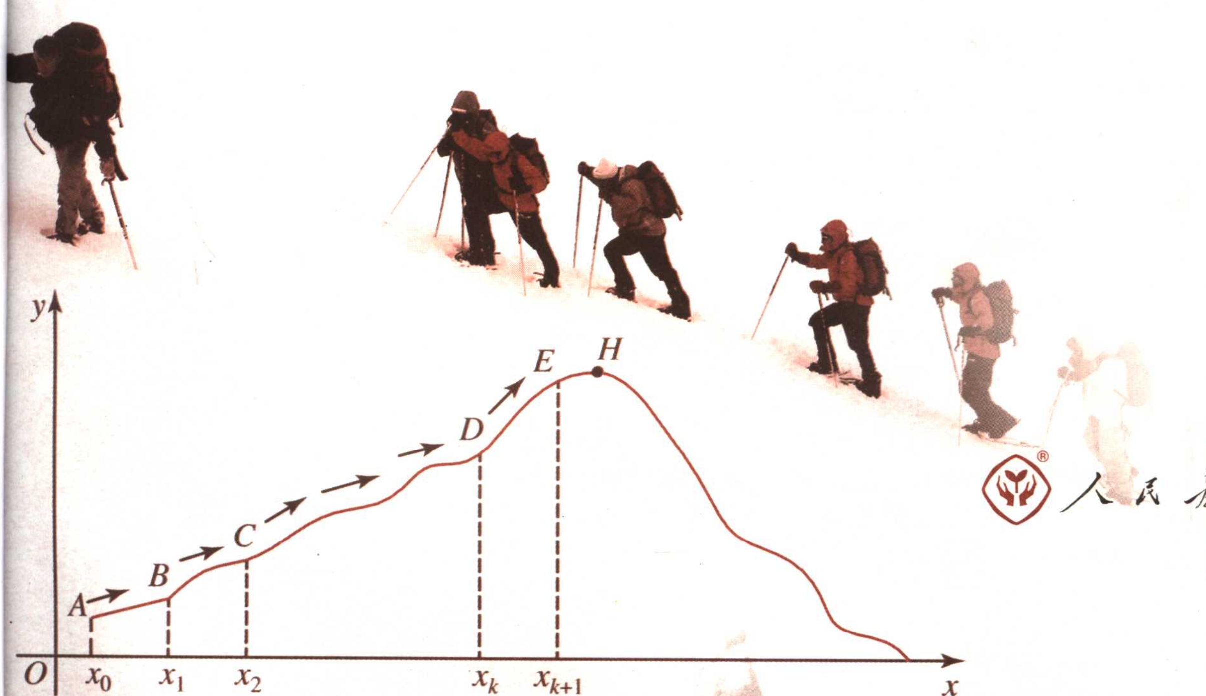
B版

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 2-2

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著



人民教育出版社

B版

主　　编　高存明

本册主编　罗声雄

编　　者　罗声雄　高存明　刘长明

　　　　　李华英　韩际清　张润琦

责任编辑　刘长明

美术编辑　李宏庆　王　喆

封面设计　李宏庆

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 2-2

B 版

人民教育出版社　课程教材研究所
中 学 数 学 教 材 实 验 研 究 组　编著

*

人民教育出版社 出版发行

网址：http://www.pep.com.cn

北京天宇星印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：7　字数：153 000

2006 年 6 月第 2 版　2006 年 10 月第 3 次印刷

ISBN 7-107-19638-3 / G·12688(课)　定价：6.15 元

本册导引

世界上的事物都处在不断变化之中．认识事物的变化规律，是人类面临的重大课题．数学关注变化着的事物内在的数量关系，特别是变量之间的函数关系．研究函数的变化趋势不仅是现实的需要，而且有重要的理论意义．十七世纪，数学泰斗牛顿和莱布尼茨把这种研究提高到一个新的阶段．他们以大量的物理问题和几何问题为背景，研究了函数的平均变化率，引进了一种全新的运算——求导数，进而引进了导数的逆运算——求积分．两位巨匠开创性的工作，使前人未能解决的诸多物理问题，如变速运动的瞬时速度、变力作功等问题迎刃而解；同时使许多重大几何问题，如曲线的切线与长度、封闭曲线形的面积、立体体积等问题也获得圆满解决，并创造了微积分学．三百年来，微积分学不仅对数学，而且对整个人类文明产生了不可估量的影响．

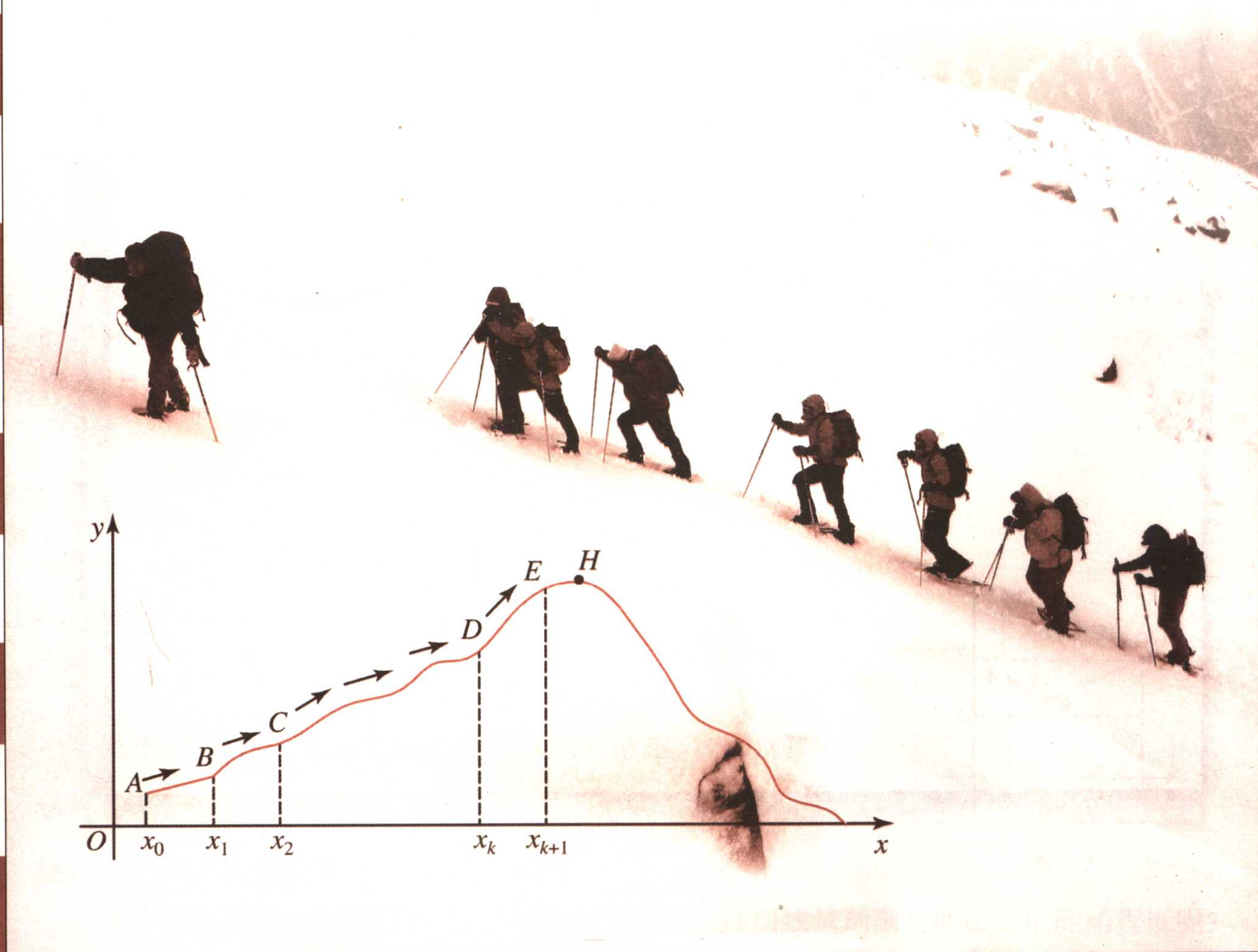
本册第一章“导数及其应用”，将把同学们引入一个充满活力的领域，在这里，同学们将进一步领悟辩证的思维方式，用微观去驾驭宏观，从变量关系层面去把握事物变化的数学本质，并学习运用导数解答现实生活中的问题．

本册第二章“推理与证明”，将比较系统地整理推理方法与证明方法．数学是一门富于活力的学科，常常用合情推理去发现新的数量规律；数学又是一门逻辑严谨的学科，它的结论、定理和公式都要有严格的证明．所谓证明就是用简单的道理（公理）或已知的事实（定理）去说明各种结论的正确性，其实就是说理．通过这一章的学习，同学们不仅要掌握几种推理规则和证明方法，而且要进一步养成思维严谨、条理清晰、言之有理、论证有据的说理习惯，进一步提高逻辑思维能力和创新能力．

本册第三章“数系的扩充与复数”，将简要回顾数系从自然数扩充到实数的过程，并进一步将实数系扩充到复数系．数系的不断扩充，不仅受到实际需要的驱动，而且是解决数学内部矛盾的需要．人类理性思维的超前性在其中得以充分体现．通过本章的学习，同学们将感受到数系扩充和引入复数的必要性，了解复数的一些基本知识，体会人类理性思维的重要性．

目 录

第一章 导数及其应用



同学们，你会求函数曲线的切线吗？你会求曲线形的面积吗？本章将引进一对新的运算——求导数和求积分．它们同加法与减法、乘法与除法一样，互为逆运算．这两种新的运算将帮助你解决上述两个问题．

当你看到“导数”、“积分”这两个名词时，你也许感到生疏，其实它们不过是初中数学概念的延伸．这两种运算的对象是函数（曲线）．求导数和求积分的基本思想是以直代曲．用高倍放大镜观察，一条曲线的微小片段，看上去像一条很短很短的线段．这样曲线可以近似地看成折线，再用处理直线的方法来研究函数曲线．可见“导数”与“积分”来源于同学们所熟悉的知识．

导数和积分是微积分学中最重要的两个概念．它们是研究函数和解决众多实际问题的重要工具．本章的重点是导数及其应用，以及定积分和微积分基本定理．

在本章的学习中，同学们将通过实际问题理解导数与积分概念，并学习求一些初等函数的导数与积分，用它们去解决一些实际问题，为今后进一步学习微积分学打下良好的基础．同时，通过本章的学习，体会用微观驾驭宏观的辩证思维方法，领略微积分学的文化价值．

1.1 导数

1.1.1 函数的平均变化率

在爬山过程中，我们都有这样的感觉：当山坡平缓时，步履轻盈；当山坡陡峭时，气喘吁吁．怎样用数学反映山坡的平缓与陡峭程度呢？下面我们用函数变化的观点来研究这个问题．

假设图 1-1 是一座山的剖面示意图，并在上面建立平面直角坐标系．A 是出发点，H 是山顶．爬山路线用函数 $y=f(x)$ 表示．

自变量 x 表示某旅游者的水平位置，函数值 $y=f(x)$ 表示此时旅游者所在的高度．想想看，如何用数量表示此旅游者登山路线的平缓及陡峭程度呢？

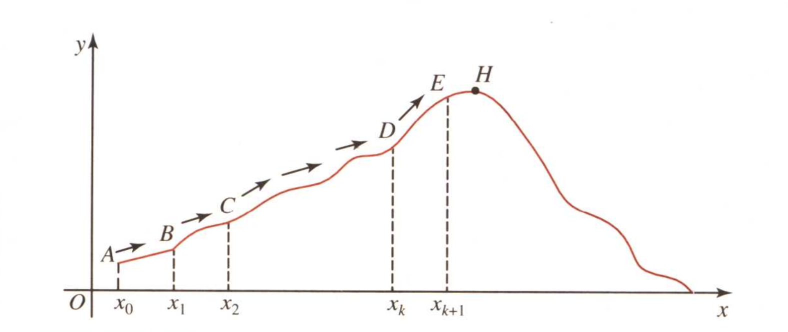


图 1-1

某旅游者从点 A 爬到点 B，假定这段山路是平直的．设点 A 的坐标为$(x_0，y_0)$，点 B 的坐标为$(x_1，y_1)$，自变量 x 的改变量为x_1-x_0，记作 Δx，函数值的改变量为 y_1-y_0，记作 Δy，即

$$\Delta x=x_1-x_0, \qquad \Delta y=y_1-y_0.$$

于是，此人从点 A 爬到点 B 的位移可用向量

$$\overrightarrow{AB}=(\Delta x，\Delta y)$$

来表示．假设向量$\overrightarrow{AB}$对 x 轴的倾斜角为 θ，直线 AB 的斜率为 k，从图 1-2 容易看出

$$k=\tan\theta=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

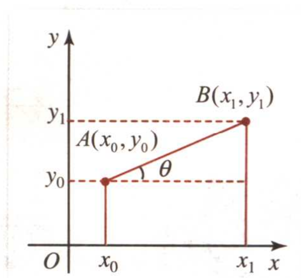


图 1-2

显然，“线段”所在直线的斜率的绝对值越大，山坡越陡．这就是说，竖直位移与水平位移之比$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$的绝对值越大，山坡越陡，反之，山坡越平缓．

现在摆在我们面前的问题是：山路是弯曲的，怎样用数量刻画弯曲山路的陡峭程度呢？

一个很自然的想法是将弯曲山路分成许多小段，每一小段山坡可视为平直的．例如，山坡 DE 可近似地看作线段 DE，再用对平直山坡 AB 分析的方法，得到此段山坡的陡峭程度可以用比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$ 近似地刻画．注意各小段的 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是不尽相同的．但不管是哪一小段山坡，高度的平均变化都可以用起点、终点的纵坐标之差与横坐标之差的比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$$

来度量．由此，我们引出函数平均变化率的概念．

一般地，已知函数 $y=f(x)$，x_0，x_1 是其定义域内不同的两点，记

$\Delta x=x_1-x_0$，

$\Delta y=y_1-y_0=f(x_1)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$❶，

则当 $\Delta x\neq 0$ 时，商

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

称作函数 $y=f(x)$ 在区间 $[x_0, x_0+\Delta x]$（或 $[x_0+\Delta x, x_0]$）的**平均变化率**．

注

❶ 这里 Δx，Δy 可为正值，也可为负值．但 $\Delta x\neq 0$，Δy 可以为 0．

例 1 求函数 $y=x^2$ 在区间 $[x_0,x_0+\Delta x]$（或 $[x_0+\Delta x,x_0]$）的平均变化率．

解：函数在区间 $[x_0, x_0+\Delta x]$（或 $[x_0+\Delta x, x_0]$）的平均变化率为

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=2x_0+\Delta x.$$

由上式可以看出，当 x_0 取定值时，Δx 取不同的数值，函数的平均变化率不同．当 Δx 取定值，x_0 取不同的数值时，该函数的平均变化率也不一样．例如，如图 1-3，x_0 取正值，并不断增大时，该函数的平均变化率也不断地增大，曲线变得越来“越陡”．

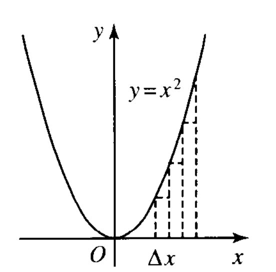


图 1-3

例 2 求函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $[x_0,x_0+\Delta x]$（或 $[x_0+\Delta x,x_0]$）的平均变化率（$x_0\neq 0$，且 $x_0+\Delta x\neq 0$）．

解：函数 $y=\frac{1}{x}$ 的平均变化率为

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x}=-\frac{1}{(x_0+\Delta x)x_0}.$$

探索与研究

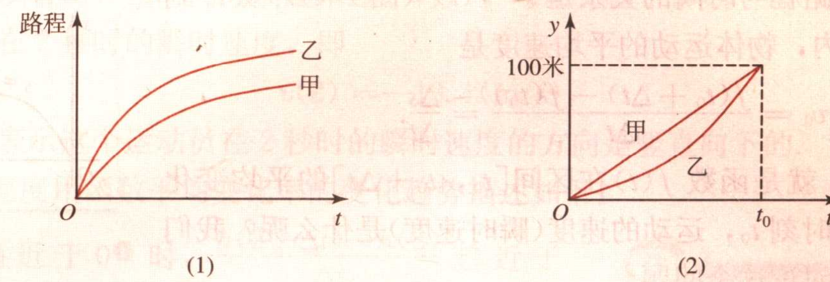
画出反比例函数的图象，从例 2 所得函数的平均变化率表达式，探索表达式的值（平均变化率）与函数图象之间的关系．

练习A

1. 甲、乙两人跑步路程与时间关系以及百米赛跑路程与时间关系分别如图(1)(2)所示，试问：

(1) 甲、乙两人哪一个跑得较快？

(2) 甲、乙两人百米赛跑，问接近终点时，谁跑得较快？



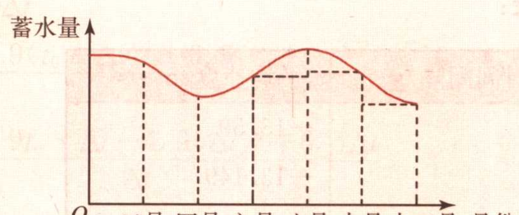
第 1 题

2. 求函数 $y=x^2$ 在区间 $\left[1,\ \frac{4}{3}\right]$，$\left[2,\ \frac{7}{3}\right]$，$\left[\frac{8}{3},\ 3\right]$的平均变化率．其中哪一个最大？哪一个最小？并画图表示．

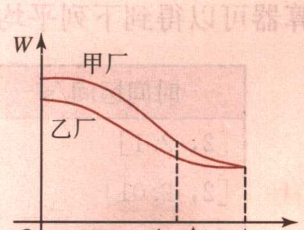
3. 求函数 $y=x^2-2x+3$ 在区间 $\left[\frac{23}{12},\ 2\right]$和$\left[2,\ \frac{25}{12}\right]$的平均变化率．

练习B

1. 一水库的蓄水量与时间关系如图所示．试指出哪一段时间（以两个月计）蓄水效果最好？哪一段时间蓄水效果最差？



第 1 题



第 2 题

2. 两个工厂经过治理，污水的排放量(W)与时间(t)的关系如图所示．试指出在接近 t_0 时哪一个工厂治污效果较好？

3. 试指出正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$\left[0,\ \frac{\pi}{6}\right]$和$\left[\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right]$的平均变化率哪一个较大？

1.1.2 瞬时变化率与导数

物体作匀速直线运动，速度是路程与时间之比：$v=\frac{s}{t}$. 如果物体作变速直线运动，那么它的速度如何刻画呢？例如，自由落体、竖直向上发射火箭都是变速直线运动，这类运动路程随时间变化，速度也随时间变化，速度与路程、时间有什么样的关系呢？

设物体运动路程与时间的关系是 $s=f(t)$（图 1-4）. 从 t_0 到 $t_0+\Delta t$这段时间内，物体运动的平均速度是

$$v_0=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}=\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

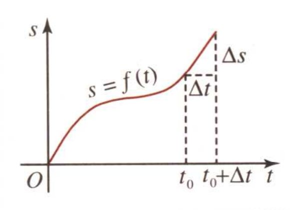


图 1-4

可见平均速度 v_0 就是函数 $f(t)$在区间$[t_0, t_0+\Delta t]$的平均变化率. 那么在某一时刻 t_0，运动的速度(瞬时速度)是什么呢？我们从平均速度出发讨论这个问题.

当$|\Delta t|$取一系列越来越小的值时，平均速度 v_0 取一系列数值，这一系列数值有什么特点呢？下面我们以 10 米跳台跳水运动为例来分析这个问题❶.

> 注
>
> ❶ 跳水运动在竖直方向上是匀加速运动，匀加速运动的运动方程是
>
> $$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2,$$
>
> 其中 v_0 为初始速度，a 为加速度，t 为运动时间.

设在 10 米跳台上，运动员跳离跳台时竖直向上的速度为6.5 m/s. 运动员在时刻 t 距离水面的高度

$$h(t)=10+6.5t-\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 为重力加速度，$g\approx 9.8\ \text{m/s}^2$. 于是，

$$h(t)=10+6.5t-4.9t^2.$$

现在我们来探讨运动员在 $t=2$ 秒时竖直向上的(瞬时)速度.

容易算出，该运动员在 2 s 至 2.1 s(记为$[2, 2.1]$)这段时间内的平均速度为

$$\frac{h(2.1)-h(2)}{2.1-2}=\frac{2.041-3.4}{0.1}=-13.59(\text{m/s}).$$

运用计算器可以得到下列平均速度表：

时间区间/s	时间间隔/s	平均速度/m·s^{-1}
[2, 2.1]	0.1	−13.59
[2, 2.01]	0.01	−13.149
[2, 2.001]	0.001	−13.104 9
[2, 2.000 1]	0.000 1	−13.100 49
[2, 2.000 01]	0.000 01	−13.100 049
……	……	……

时间区间/s	时间间隔/s	平均速度/m·s^{-1}
[1.9，2]	0.1	−12.61
[1.99，2]	0.01	−13.051
[1.999，2]	0.001	−13.095 1
[1.999 9，2]	0.000 1	−13.099 51
[1.999 99，2]	0.000 01	−13.099 951
……	……	……

由此表可以看出，当时间间隔越来越小时，平均速度趋于常数−13.1，这个常数可以看作该运动员在2秒时的瞬时速度，即

$$v(2)=-13.1(\text{m/s}),$$

这里"−"号表示这个运动员在2秒时的瞬时速度的方向是竖直向下的．我们把上述关于2秒时的瞬时速度用函数平均变化率的变化趋势描述如下：

当 $|\Delta t|$ 趋近于0❶时，$\dfrac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}$ 趋近于−13.1.

我们也可以直接由 $\dfrac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}$ 看出这种变化趋势.

$$\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}$$
$$=\frac{[10-4.9(2+\Delta t)^2+6.5(2+\Delta t)]-[10-4.9\times 2^2+6.5\times 2]}{\Delta t}$$
$$=\frac{-4\times 4.9\Delta t-4.9\Delta t^2+6.5\Delta t}{\Delta t}$$
$$=-13.1-4.9\Delta t.$$

当 Δt 趋近于0时，上式右端趋近于常数−13.1．这与前面取具体值计算的结果一致.

一般地，对任一时刻 t_0，也可以计算出瞬时速度：

$$\frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t}$$
$$=\frac{[10-4.9(t_0+\Delta t)^2+6.5(t_0+\Delta t)]-[10-4.9t_0^2+6.5t_0]}{\Delta t}$$
$$=\frac{-2\times 4.9t_0\cdot\Delta t-4.9(\Delta t)^2+6.5\Delta t}{\Delta t}$$
$$=-9.8t_0+6.5-4.9\Delta t. \qquad (*)$$

当 Δt 趋近于0时，上式右端趋近于 $-9.8t_0+6.5$．这就是说，在 t_0 时刻，运动员的瞬时速度是 $-9.8t_0+6.5$(m/s).

以上分析表明，当 Δt 趋近于0时，函数 $h(t)$ 在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 之间的平均变化率

$$\frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t}$$

注

❶ Δt 趋近于0是指变化着的 Δt 与0距离要多小有多小，即 $|\Delta t|$ 要多小有多小，但 $\Delta t\neq 0$．常用 $\Delta t\to 0$ 表示这种变化趋势．"$|\Delta t|$ 要多小有多小"的含义是：$|\Delta t|$ 可以小于任何预先给定的正数.

趋近于常数❶

$$-9.8t_0+6.5,$$

我们把这个常数称为 t_0 时刻的**瞬时变化率**（或**瞬时速度**）.

这时，同学们可能会问，常数 $-9.8t_0+6.5$ 可以在上面(*)式的最后结果中，令 $\Delta t=0$ 而得到. 为什么要用“趋近于 0”来表述？这里，先向同学们说明两点：

(1) 在上面的例子中，我们研究的是平均速度趋近于某一时刻的变化过程，在这个变化过程中，时间间隔 Δt 越来越短，能越过任意小的时间间隔，但始终不能为零.

(2) 当 Δt 趋近于 0 时，存在着一个数 l 与商 $\frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t}$ 无限地接近.

注

❶ 一个数列 a_n 趋近于常数 A 是指当 $n\to+\infty$ 时，$|a_n-A|\to 0$.

一个函数 $f(x)$，当 $x\to x_0$ 时，趋近于常数 l 是指当 $|x-x_0|=|\Delta x|\to 0$ 时，$|f(x)-l|\to 0$.

应当注意，我们这里研究的问题与以前学过的数学有质的不同. 这里研究的是两个变量 Δy 与 Δx 比值变化的性质与状态. 尽管 Δx，Δy 在变化中都趋近于 0，但是它们的比值却趋近于一个确定的常数.

由以上分析，我们给出函数瞬时变化率的概念.

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 附近有定义，当自变量在 $x=x_0$ 附近改变量为 Δx 时，函数值相应地改变

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

如果当 Δx 趋近于 0 时，平均变化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

趋近于一个常数 l（也就是说平均变化率与某个常数 l 的差的绝对值越来越小，可以小于任意小的正数），那么常数 l 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的**瞬时变化率**. 这样，运动的瞬时速度就是位移函数 $y=s(t)$ 的瞬时变化率.

“当 Δx 趋近于零时，$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 趋近于常数 l” 可以用符号“$\to$”记作

$$\text{“当 } \Delta x\to 0 \text{ 时，} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\to l\text{”},$$

或记作

$$\text{“}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=l\text{❷”},$$

符号“$\to$”读作“趋近于”. 函数在 x_0 的瞬时变化率，通常称为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**导数**，并记作 $f'(x_0)$.

这时又称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处是可导的. 于是上述变化过程，可以记作

注

❷ lim 是 limit 的缩写，意为极限. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=l$ 表示当 $\Delta x\to 0$ 时 $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 以常数 l 为极限.

“当 $\Delta x \to 0$ 时，$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)$”

或

$$“\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)”.$$

如果 $f(x)$在开区间(a, b)内每一点 x 都是可导的，则称 $f(x)$在区间(a, b)可导. 这样，对开区间(a, b)内每个值 x，都对应一个确定的导数$f'(x)$. 于是，在区间(a, b)内，$f'(x)$构成一个新的函数，我们把这个函数称为函数$y=f(x)$的**导函数**. 记为 $f'(x)$或 y'(或 y'_x).

导函数通常简称为**导数**. 本书中，如果不特别指明求某一点的导数，那么求导数指的就是求导函数.

例 1 火箭竖直向上发射. 熄火时向上速度达到100 m/s. 试问熄火后多长时间火箭速度为零?

解：火箭的运动方程为

$$h(t)=100t-\frac{1}{2}gt^2,$$

火箭向上位移是初速度引起的位移$(100t)$与重力引起的位移$\left(-\frac{1}{2}gt^2\right)$的合成.

在 t 附近的平均变化率为

$$\frac{\left[100(t+\Delta t)-\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2\right]-\left[100t-\frac{1}{2}gt^2\right]}{\Delta t}$$

$$=\frac{100\Delta t-g\cdot t\cdot \Delta t-\frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$$=100-gt-\frac{1}{2}g\Delta t.$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，上式趋近于 $100-gt$❶. 可见 t 时刻的瞬时速度

$$h'(t)=100-gt.$$

令 $h'(t)=100-gt=0$，

解得 $t=\dfrac{100}{g}\approx\dfrac{100}{9.8}\approx 10.2$(秒).

答：火箭熄火后约 10.2 秒钟速度变为零.

注

❶ $\Delta t \to 0$ 时，Δt 乘上任何常数仍然趋于 0.

思考与讨论

火箭速度变为零，意味着什么？你能计算出此火箭熄火后上升的最大高度吗？

例 2 一正方形铁板在 0 ℃时，边长为 10 cm. 加热后铁板会膨胀. 当温度为 t ℃时，边长变为 $10(1+at)$ cm，a 为常数. 试求铁板面积对温度的膨胀率.

解：设温度的增量为 Δt，则铁板面积 S 的增量

$$\begin{aligned}\Delta S &= 10^2[1+a(t+\Delta t)]^2-10^2(1+at)^2\\ &=200(a+a^2t)\Delta t+100a^2(\Delta t)^2.\end{aligned}$$

因此 $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=200(a+a^2t)+100a^2\Delta t.$

令 $\Delta t\to 0$，得

$$S'=200(a+a^2t).$$

答：铁板对温度的膨胀率为 $200(a+a^2t)$.

探索与研究

研究圆面积与圆周长的关系

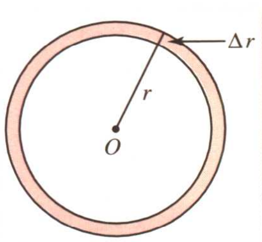


图 1-5

我们知道，圆面积 S 是半径 r 的函数，$S=\pi r^2$；圆周长 l 也是圆半径 r 的函数，$l=2\pi r$.

如图 1-5，利用导数的定义，一步步地求 S 对半径 r 的导数，说出每一步的几何意义，以及它与圆周长之间的关系.

类似地，讨论球的体积与球面积公式的关系. 由此，写一篇小论文，写写你对导数概念的理解.

练习A

1. 设一物体的运动方程是
$$s(t)=v_0t+\frac{1}{2}at^2,$$
其中 v_0 为初速度，a 为加速度，时间单位为秒. 求 $t=2$ s 的瞬时速度.
2. 一同学以 40 m/s 向上斜抛一块石头，抛掷方向与水平成 45°角. 求石头所能达到的最高高度.
3. 求函数 $y=ax+b$ 的瞬时变化率.
4. 如果一个函数的瞬时变化率处处为 0，这个函数是什么函数？

练习B

1. 一同学在投掷场以 50 m/s 向上斜抛一枚手榴弹（练习用），抛掷方向与水平成 60° 角．问手榴弹能掷多远？
2. 求函数 $y=ax^2+bx+c$ 在 $x=1$ 和 $x=2$ 处的瞬时变化率．
3. 用导数概念，说明函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处是不可导的．
4. 设 $f(x)$ 在点 x 是可导的，a、b 为非零常数，试求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[f(x+a\Delta x)-f(x-b\Delta x)]$．

1.1.3 导数的几何意义

设函数 $y=f(x)$ 的图象如图 1-6 所示．AB 是过点 $A(x_0, f(x_0))$ 与点 $B(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ 的一条割线．由此割线的斜率是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

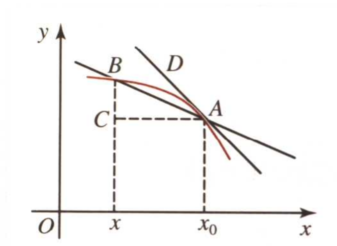


图 1-6

可知曲线割线的斜率就是函数的平均变化率．当点 B 沿曲线趋近于点 A 时，割线 AB 绕点 A 转动，它的最终位置为直线 AD，这条直线 AD 叫做此曲线过点 A 的切线．于是，当 $\Delta x\to 0$时，割线 AB 的斜率趋近于过点 A 的切线 AD 的斜率，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\text{切线 } AD \text{ 的斜率}.$$

由导数意义可知，曲线 $y=f(x)$ 过点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线的斜率等于 $f'(x_0)$．

例 1 求抛物线 $y=x^2$ 过点 $(1, 1)$ 的切线的斜率．

解：过点 $(1, 1)$ 的切线的斜率是

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2.$$

因此，抛物线过点 $(1, 1)$ 的切线的斜率为 2．

例 2 求双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 过点 $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ 的切线方程．

解：因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$